
Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement à rupture avec le modèle de Dugdale régularisé

Hichème Ferdjani* — Med Zaim Khelifi*
Jean-Jacques Marigo**

* Université Saad Dahlab, Département de Mécanique
Route de Soumaa, Blida, Algérie
h_ferdjani@yahoo.fr, k_zaim@yahoo.fr.

** Institut Jean Le Rond D'Alembert (UMR-CNRS 7607), Université Paris 6
4, Place Jussieu case 162, F-75252 Paris cedex 5
marigo@lmm.jussieu.fr

RÉSUMÉ. Le but du travail est de montrer, dans le cadre de la mécanique de la rupture avec le modèle de Dugdale régularisé des forces cohésives, que les défauts de petite taille devant la longueur caractéristique du matériau ont pratiquement peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure. On traite pour cela deux exemples : le cas d'une plaque préfissurée, puis le cas d'une plaque contenant une cavité circulaire. Les calculs sont effectués avec la méthode des éléments finis.

ABSTRACT. The goal of this work is to prove that, within the framework of Fracture Mechanics with the regularized Dugdale's model of cohesive forces, the defects the size of which are small compared to the material characteristic length are practically without influence on the limit loads of structures. For that, we treat two examples : the case of a precracked plate, then the case of a plate with a circular hole. The calculations are made with the finite element method.

MOTS-CLÉS : rupture, modèle de Dugdale régularisé, effet d'échelle, charges limites.

KEYWORDS: fracture, Regularized Dugdale's model, scale effect, limit loads.

DOI:10.3166/REMN.17.481-493 © 2008 Lavoisier, Paris

1. Introduction

Les modèles de rupture de forces cohésives présentent l'avantage, sur le modèle de Griffith, de rendre compte de l'amorçage de fissure dans une structure saine en termes d'un critère en contraintes, (cf. par exemple Del Piero, 1999, Del Piero *et al.*, 2001, Charlotte *et al.*, 2000, Charlotte *et al.*, 2006, Laverne *et al.*, 2004). De façon générale, les modèles de forces cohésives sont de plus en plus employés et il est donc nécessaire de connaître de mieux en mieux leurs propriétés pour pouvoir les utiliser à bon escient. En particulier les effets d'échelle qui les accompagnent du fait de la présence d'une longueur caractéristique sont mal connus. Il ne s'agit évidemment pas ici de valider le modèle des forces cohésives, ni de voir pour quel type de matériau il peut être utilisé, mais de voir s'il est assez robuste pour que, grâce aux effets d'échelle qu'il induit, la réponse des structures ne soit pas sensible à des défauts de petite taille. Ce résultat a été obtenu par Ferdjani *et al.* (2006a), Ferdjani *et al.* (2006b) et Ferdjani *et al.* (2007), dans le cas du modèle de Dugdale (cf. Dugdale, 1960), pour le cas particulier d'une plaque contenant une fissure ou une cavité circulaire sollicitée en traction simple. L'objectif de cette étude est la généralisation de ce résultat à d'autres modèles de forces cohésives.

Le modèle étudié dans ce travail, et appelé modèle de Dugdale régularisé, est une combinaison entre le modèle des zones cohésives continus (cf. Xie *et al.*, 2006) et le modèle de Dugdale. Ce modèle ajoute au modèle de Dugdale une zone cohésive continuum (ZCC) dans la partie saine du matériau qui se situe sur le trajet de la fissure. La loi de comportement, donnant la relation entre les forces cohésives et l'ouverture des lèvres de la fissure, en supposant que l'ouverture se fait en mode I pur, est représentée sur la figure 1.

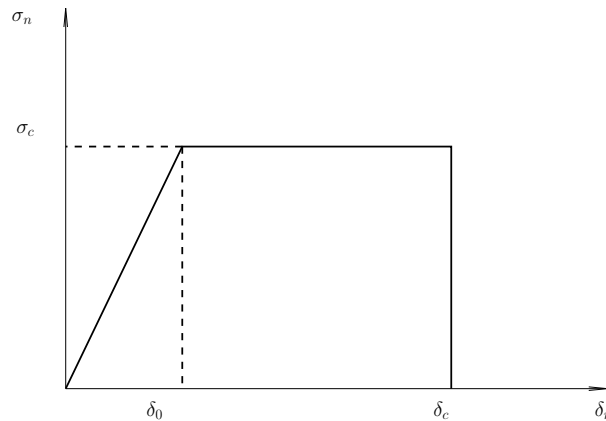


Figure 1. Loi de comportement dans le modèle de Dugdale régularisé

Dans la figure 1, δ_n désigne la discontinuité du déplacement normal, σ_n désigne la contrainte normale d'interaction entre les lèvres de la fissure, σ_c désigne la contrainte critique du matériau, δ_c désigne la longueur caractéristique du modèle, et δ_0 désigne le saut critique de décohesion. La fissure est donc divisée en trois zones représentées sur la figure 2.

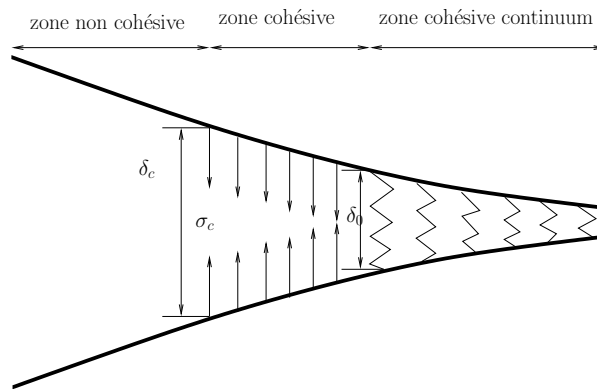


Figure 2. Les différentes zones de la fissure dans le modèle de Dugdale régularisé

Ce modèle a une origine et une justification purement phénoménologiques. Le lecteur intéressé par une justification micromécanique de ce type de modèle peut se référer à (Budiansky *et al.*, 1995) où, à partir d'une analyse simplifiée, les auteurs arrivent à construire un modèle cohésif effectif pour des composites contenant une fissure principale matricielle pontée par des fibres partiellement décollées.

Notons que ce type de modèle possède le défaut majeur de présenter une contrainte d'amorçage nulle, ce qui veut dire que le déplacement est discontinu dès la mise en charge à travers *toutes* les surfaces autorisées. Il ne faut donc l'utiliser que dans des situations où le trajet de fissuration est connu *a priori*. C'est dans cet esprit que ce type de modèle a été introduit dans (Needleman, 1987) avant d'être repris abondamment par la suite, (cf. par exemple Needleman, 1990, Tvergaard, 1990, Needleman, 1992, Chaboche *et al.*, 2001, Roe *et al.*, 2002). D'un point de vue numérique, l'introduction d'une phase « élastique » par rapport à la phase « rigide » de Dugdale permet d'avoir une relation univoque entre ouverture et contrainte cohésive. Nous allons donc l'utiliser dans un cadre où il est pertinent, *i.e.* en se donnant le trajet de fissuration. Le principal objectif de ce papier est de voir si l'introduction d'une phase élastique modifie les conclusions obtenues pour le modèle de Dugdale.

Du fait de la présence d'une longueur caractéristique δ_c dans le modèle des forces cohésives, les effets d'échelle sont importants. La charge de rupture dépend de façon essentielle du rapport entre la taille du défaut et la longueur caractéristique δ_c . Un résultat majeur serait de montrer que, quelle que soit la forme du défaut, la charge de rupture tend vers la contrainte critique σ_c lorsque la taille du défaut tend vers 0,

à longueur caractéristique fixée (ou de façon équivalente, lorsque la longueur caractéristique δ_c tend vers l'infini, à taille du défaut fixée). Ceci signifierait qu'avec le modèle des forces cohésives, les structures sont insensibles aux petits défauts et se comportent comme des structures saines, et ce bien qu'elles développent des zones d'amorçage avant rupture. On se contentera d'étudier ici les deux cas extrêmes et de montrer qu'une plaque en traction simple est insensible à un petit défaut de type fissure ou cavité circulaire justement en raison des effets d'échelle.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 2, le problème est posé. Dans la section 3, on le résout numériquement par la méthode des éléments finis dans le cas d'une fissure préexistante et d'une cavité circulaire. On synthétise les résultats obtenus et on conclut dans la section 4.

2. Position du problème

On considère un milieu bidimensionnel carré $\Omega = (-L, +L)^2$ contenant un défaut centré \mathcal{D} et soumis sur les faces supérieure $x_2 = +L$ et inférieure $x_2 = -L$ à une traction uniforme d'intensité σ_∞ croissante depuis 0. Le défaut considéré \mathcal{D} sera soit une fissure préexistante perpendiculaire à l'axe de traction et de longueur $2\ell_0$, soit un trou circulaire de rayon ℓ_0 (figure 3). L'étude est effectuée dans le cadre des contraintes planes. Le matériau est linéairement élastique, homogène et isotrope, de tenseur de rigidité \mathbf{A} , de module de Young E et de coefficient de Poisson ν .

Pour des raisons de symétrie, on supposera que la fissuration ne se développe que sur l'axe $x_2 = 0$ et de façon symétrique depuis les points $(\pm\ell_0, 0)$ du défaut initial. L'évolution de la fissuration suit la loi de Dugdale régularisé, autrement dit les lèvres $(-L, -\ell_0)$ et $(+\ell_0, +L)$ (de l'axe $x_2 = 0$) peuvent comporter trois parties :

1) une zone $\Gamma_n = [-\ell_c, -\ell_0] \cup [\ell_0, \ell_c]$, proche du défaut initial et dite *zone non cohésive*, où les lèvres de la fissure n'interagissent plus ;

2) une zone $\Gamma_c = [-\ell_a, -\ell_c] \cup [\ell_c, \ell_a]$ dite *zone cohésive* où les lèvres de la fissure sont soumises à des forces cohésives de traction d'intensité constante σ_c ;

3) une zone $\Gamma_z = [-L, -\ell_a] \cup [\ell_a, L]$, dite *zone cohésive continuum (ZCC)*, où les forces d'interaction entre lèvres sont proportionnelles à la discontinuité du déplacement normal à travers la fissure.

Les limites entre ces trois zones sont les points $x_1 = \pm\ell_c$ et $x_1 = \pm\ell_a$. Les valeurs de ℓ_a et ℓ_c dépendent évidemment de la valeur de la charge σ_∞ . Compte tenu de la symétrie du problème, toutes les évolutions se feront en mode I pur. Notons que pour certaines valeurs de σ_∞ certaines zones peuvent ne pas exister. On a donc en général $\ell_a \geq \ell_c \geq \ell_0$, les égalités étant possibles. Lors de la mise en charge ($\sigma_\infty = 0$), les conditions initiales sont $\ell_a = \ell_c = \ell_0$. Les différents critères d'apparition et de propagation de ces zones sont les suivants :

1) une ZCC apparaît dès que la contrainte σ_{22} n'est plus nulle aux points $x_1 = \pm\ell_0$ de l'axe $x_2 = 0$, c'est-à-dire dès la mise en charge ;

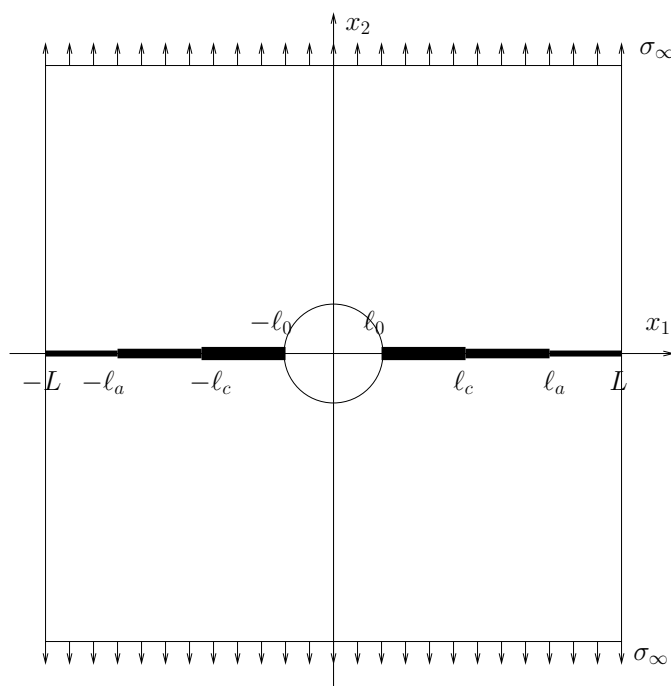


Figure 3. Géométrie de la plaque contenant le défaut centré avec les zones cohésive, non cohésive et la ZCC

2) une zone cohésive apparaît et dès lors $l_a > l_c = l_0$, lorsque l'ouverture atteint le saut critique de décohésion δ_0 aux points $x_1 = \pm l_0$;

3) les points $x_1 = \pm l_a$ de la zone cohésive avancent de telle sorte que l'ouverture de la fissure $[[u_2]]$ en ces points ne dépasse jamais le saut critique de décohésion δ_0 ;

4) une zone non cohésive apparaît et dès lors $l_a > l_c > l_0$, lorsque l'ouverture atteint la valeur δ_c aux points $x_1 = \pm l_0$;

5) les points $x_1 = \pm l_c$ de la zone non cohésive avancent de telle sorte que l'ouverture ne dépasse jamais δ_c en ces points.

On peut *a priori* distinguer trois phases d'évolution de la fissuration lors du processus de chargement :

1) *phase élastique* : $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_a$. Durant cette phase, il n'y a que la ZCC qui apparaît et la réponse de la structure est purement élastique. Le champ des déplacements u et le champ des contraintes σ sont donc solution du problème élastique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \sigma = 0 & \text{dans } \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \Gamma_z) \\ \sigma = A\varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{D} \\ \sigma n = k[[u_2]]n & \text{sur } \Gamma_z \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \\ \sigma n = 0 & \text{sur } x_1 = \pm L \\ \sigma n = \sigma_\infty n & \text{sur } x_2 = \pm L \end{array} \right. \quad [1]$$

n désignant la normale unitaire sortante au domaine avec défaut initial $\Omega \setminus \mathcal{D}$ et $k = \frac{\sigma_c}{\delta_0}$ désigne la rigidité de la ZCC.

Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale de la fissure atteint le saut critique de décohesion δ_0 . La valeur de la charge appliquée correspondante est appelée charge d'amorçage σ_a ;

2) *phase d'amorçage* : $\sigma_a < \sigma_\infty \leq \sigma_r$. Durant cette phase, une zone cohésive se crée. Au fur et à mesure que l'on augmente le chargement, cette zone grandit et le saut de déplacement normal croît. Quand σ_∞ est suffisamment proche de σ_a , l'ouverture $[[u_2]]$ est partout inférieure à la valeur critique δ_c . Par conséquent, les lèvres de la fissure ne comportent que deux zones : la zone cohésive et la ZCC. Durant cette phase le champ des déplacements u et le champ des contraintes σ sont donc solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \sigma = 0 & \text{dans } \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \Gamma_z \cup \Gamma_c) \\ \sigma = A\varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \Gamma_z \cup \Gamma_c) \\ \sigma n = k[[u_2]]n & \text{sur } \Gamma_z \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \\ \sigma n = 0 & \text{sur } x_1 = \pm L \\ \sigma n = \sigma_\infty n & \text{sur } x_2 = \pm L \\ \sigma n = \sigma_c n & \text{sur } \Gamma_c \end{array} \right. \quad [2]$$

La loi gouvernant l'évolution de la pointe cohésive ℓ_a avec le chargement est donnée par :

$$[[u_2(\pm\ell_a)]] = \delta_0 \quad [3]$$

Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale dans la zone cohésive atteint la valeur critique δ_c . La valeur de la charge correspondante est la charge de rupture σ_r ;

3) *phase de propagation*. Une fois la charge de rupture atteinte, l'équilibre de la structure ne peut plus être assuré sans que se développe une zone de fissuration non

cohésive. En tenant compte de la présence de cette zone, le champ des déplacements u et le champ des contraintes σ devront donc être solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{dans } \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \Gamma_z \cup \Gamma_c \cup \Gamma_n) & \text{div } \sigma = 0 \\ \text{dans } \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \Gamma_z \cup \Gamma_c \cup \Gamma_n) & \sigma = A\varepsilon(u) \\ \text{sur } \Gamma_z & \sigma n = k[[u_2]]n \\ \text{sur } \partial\mathcal{D} \cup \Gamma_n & \sigma n = 0 \\ \text{sur } x_1 = \pm L & \sigma n = 0 \\ \text{sur } x_2 = \pm L & \sigma n = \sigma_\infty n \\ \text{sur } \Gamma_c & \sigma n = \sigma_c n \end{array} \right. . \quad [4]$$

La loi gouvernant les évolutions de la pointe cohésive ℓ_a et de la pointe non cohésive ℓ_c avec le chargement est donnée par :

$$[[u_2(\pm\ell_a)]] = \delta_0, \quad [[u_2(\pm\ell_c)]] = \delta_c \quad [5]$$

3. Résultats

Plutôt que de faire diminuer la taille du défaut, nous avons choisi d'augmenter la longueur caractéristique δ_c tout en maintenant constante la contrainte critique σ_c et la raideur de la phase élastique σ_c/δ_0 . Ce faisant on maintient constant le saut critique de décohésion δ_0 et augmentons le rapport δ_c/δ_0 . Ce choix n'est pas neutre et il serait intéressant de voir si les conclusions seraient les mêmes si l'on faisait un autre choix. Nous reportons cette étude à un travail futur.

Nous choisissons pour les dimensions du problème $L = 100$ mm, $\ell_0 = 3$ mm. Pour les données matériau, on choisit celles d'un polymère PMMA

$$\sigma_c = 72 \text{ MPa}, \quad E = 3000 \text{ MPa}, \quad \nu = 0,36$$

Enfin pour le saut critique de décohésion, nous choisissons $\delta_0 = 0,00402$ mm. Le domaine est maillé par des éléments finis triangulaires à 3 noeuds (pour des raisons de symétrie seul un quart du domaine est maillé) figure 4. La ZCC est modélisée à l'aide d'éléments d'interface quadrangulaires d'épaisseur nulle.

3.1. Phase élastique et charge d'amorçage

On commence par faire un calcul purement élastique pour déterminer la charge d'amorçage σ_a , *i.e.* la charge σ_∞ à partir de laquelle l'ouverture de la ZCC atteint le saut critique de décohésion δ_0 . Pour des raisons évidentes de symétrie et de conditions aux limites, l'ouverture maximale se situe au bord du défaut, aux points $(x_1 = \pm\ell_0, x_2 = 0)$. La charge d'amorçage calculée est égale à 6,55 MPa pour la fissure et à 9,36 MPa pour le trou.

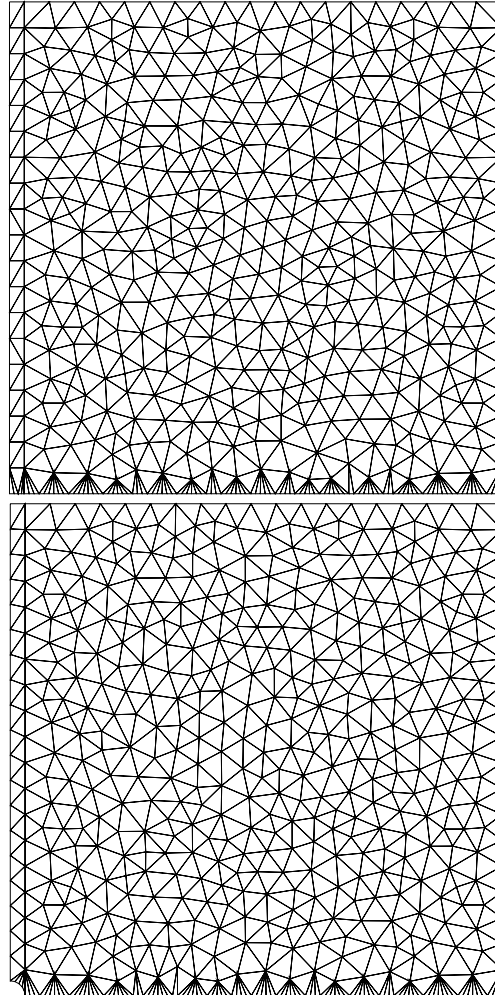


Figure 4. Maillage du quart du domaine pour les cas du trou et de la fissure

3.2. Phase d'amorçage

Une zone cohésive apparaît et s'étend si l'on augmente la charge au-delà de σ_a . Le critère gouvernant la propagation de la pointe cohésive ℓ_a est $[[u_2(\ell_a)]] = \delta_0$. C'est une relation implicite entre σ_∞ et ℓ_a . D'un point de vue pratique, il est plus facile de calculer σ_∞ en supposant connue ℓ_a . En effet, en utilisant la linéarité du problème élastique, l'ouverture $[[u_2(\ell_a)]]$ peut s'écrire :

$$[[u_2(\ell_a)]] = \sigma_\infty [[u_2(\ell_a)]]^\infty + [[u_2(\ell_a)]]^c \quad [6]$$

où $\llbracket u_2(\ell_a) \rrbracket^\infty$ et $\llbracket u_2(\ell_a) \rrbracket^c$ sont respectivement l'ouverture pour le problème sans forces cohésives et $\sigma_\infty = 1$, et le problème avec forces cohésives et $\sigma_\infty = 0$. L'équation $\llbracket u_2(\ell_a) \rrbracket = \delta_0$ donne :

$$\sigma_\infty = \frac{\delta_0 - \llbracket u_2(\ell_a) \rrbracket^c}{\llbracket u_2(\ell_a) \rrbracket^\infty} \quad [7]$$

Donc, pour une valeur donnée de ℓ_a , nous déterminons σ_∞ par la formule [7]. Les résultats obtenus pour la fissure et le trou sont représentés sur la figure 5. On observe que le chargement σ_∞ est une fonction croissante de la longueur de la zone cohésive. On observe également qu'à part la charge d'amorçage les courbes correspondant au trou et à la fissure sont quasiment identiques. On peut conclure que la sensibilité de la phase d'amorçage à la forme du défaut est faible.

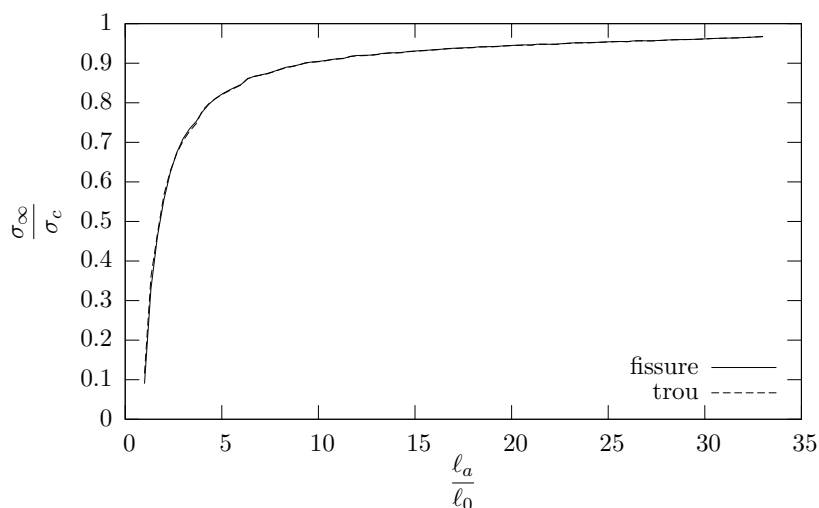


Figure 5. Relation entre la charge appliquée et la position de la zone cohésive dans la phase cohésive

3.3. Charge de rupture

La charge de rupture σ_r est la contrainte appliquée correspondant à des ouvertures de la fissure $\llbracket u_2(\pm \ell_0) \rrbracket = \delta_c$ et $\llbracket u_2(\pm \ell_a) \rrbracket = \delta_0$. Pour déterminer la charge de rupture, pour une longueur caractéristique donnée, la méthode numérique suivante est utilisée. Pour une valeur testée de ℓ_a , σ_∞ est obtenue en résolvant l'équation $\llbracket u_2(\ell_a) \rrbracket = \delta_0$ selon la procédure expliquée dans la section 3.2. La bonne valeur de ℓ_a est obtenue par dichotomie de telle sorte que $\llbracket u_2(\ell_0) \rrbracket = \delta_c$. Nous calculons σ_r pour plusieurs valeurs de la longueur caractéristique δ_c (δ_0 restant fixe).

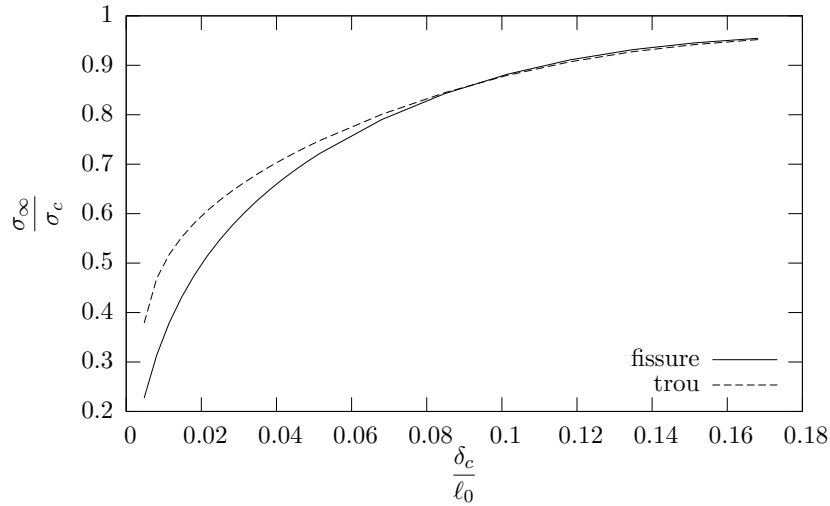


Figure 6. Relation entre la charge appliquée et la position de la zone cohésive dans la phase cohésive

Les valeurs numériques calculées pour la fissure et le trou sont représentées dans la figure 6 dans un diagramme $\sigma_r - \delta_c$. Comme attendu, la charge de rupture est une fonction croissante de δ_c , mais on notera que la charge de rupture n'atteint jamais la valeur σ_c quelle que soit la valeur de δ_c . C'est dû au caractère fini des dimensions de la plaque. En effet, en utilisant un raisonnement élémentaire de calcul à la rupture, il est facile de voir que la plaque trouée ne peut pas supporter une charge plus grande que $(1 - \frac{\ell_a}{L})\sigma_c$ qui correspond à la charge d'équilibre de la plaque lorsque la zone cohésive occupe toute la largeur de la plaque. Compte tenu des valeurs numériques choisies, la charge de rupture ne peut donc dépasser $0,97 \sigma_c$. Notons enfin que si l'on faisait tendre la longueur du défaut vers 0 ou la largeur de la plaque vers l'infini, alors la charge de rupture tendrait vers σ_c .

3.4. Phase de propagation

Il reste à prouver que σ_r est réellement la charge maximale que la structure peut supporter tout en vérifiant les équations d'équilibre et les critères de propagation des différentes zones. Pour cela, on fixe la valeur de la pointe non cohésive ℓ_c et on calcule les valeurs de la charge σ_∞ et de la pointe cohésive ℓ_a en résolvant le système d'équations non linéaires [5]. La méthode numérique utilisée est la suivante. Pour une valeur testée de ℓ_a , σ_∞ est obtenue en résolvant l'équation $\llbracket u_2(\ell_a) \rrbracket = \delta_0$ avec la procédure expliquée dans la section 3.2. La bonne valeur de ℓ_a est obtenue par dichotomie de telle sorte que $\llbracket u_2(\ell_c) \rrbracket = \delta_c$.

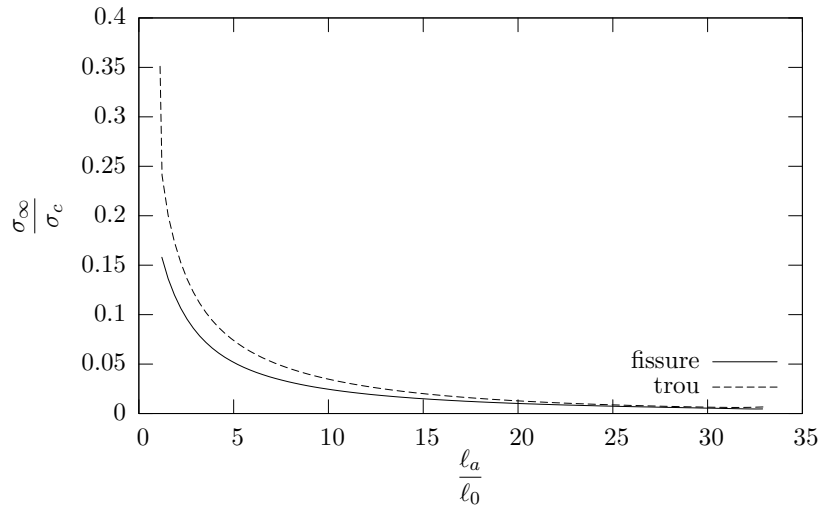


Figure 7. Relation entre la charge appliquée et la position de la zone cohésive dans la phase de propagation

Nous obtenons finalement σ_∞ en fonction de ℓ_a pour un δ_c donné. Quand $\ell_c = \ell_0$ nous avons évidemment $\sigma_\infty = \sigma_r$. Il s'avère que σ_∞ est une fonction décroissante de ℓ_a , ceci prouve que σ_r est une charge limite et par conséquent la charge de rupture de la structure. Par exemple, nous avons représenté sur la figure 7 la relation entre σ_∞ et ℓ_a pour une valeur de δ_c égale à 0,00804 mm respectivement pour le trou et la fissure. Les charges de rupture sont 0,35 σ_c pour le trou et 0,16 σ_c pour la fissure.

4. Conclusion générale

En comparant les réponses obtenues pour la plaque fissurée et la plaque trouée, on voit que la charge d'amorçage est sensible à la forme du défaut, mais pas à sa taille. Par contre, la charge limite de la structure est très sensible à la taille du défaut, mais peu à sa forme. De plus, on voit que plus le défaut est petit, la longueur de référence étant la longueur caractéristique du matériau introduite dans le modèle des forces cohésives, plus la charge limite se rapproche de la contrainte critique du matériau. Autrement dit, ceci semble indiquer que les défauts de petite taille ont peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure si l'on adopte le modèle des forces cohésives. Ce résultat est identique au résultat obtenu par Ferdjani *et al.* (2006a), Ferdjani *et al.* (2006b) et Ferdjani *et al.* (2007) dans le cas du modèle de Dugdale. Il serait évidemment intéressant de généraliser ce résultat à n'importe quel type de défaut, n'importe quel type de structure et n'importe quel modèle de force cohésive. Cela nécessitera

le développement d'outils théoriques et numériques adaptés. Mais on peut considérer que les deux cas traités, extrêmes de par la forme du défaut choisie, et les deux modèles de forces cohésives étudiés sont un gage du caractère générique du résultat.

Remerciements

Ce travail a été partiellement effectué avec le soutien financier de l'OTAN dans le cadre de l'accord PST.MD.CLG 980960 et du CNRS dans le cadre d'un accord de coopération DEF/CNRS 02DZA1079.

5. Bibliographie

- Budiansky B., Evans A. G., Hutchinson J. W., "Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites", *Int. J. Solids Structures*, vol. 32, n° 3-4, 1995, p. 315–328.
- Chaboche J.-L., Feyel F., Monerie Y., "Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency", *Int. J. Solids Structures*, vol. 38, n° 18, 2001, p. 3127–3160.
- Charlotte M., Francfort G., Marigo J.-J., Truskinovsky L., "Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models.", in A. Benallal (ed.), *Proceedings of the Symposium on Continuous Damage and Fracture*, Elsevier, Paris, 2000, p. 7–12.
- Charlotte M., Laverne J., Marigo J.-J., "Initiation of cracks with cohesive force models : a variational approach", *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 25, n° 4, 2006, p. 649–669.
- Del Piero G., "One-dimensional ductile-brittle transition, yielding, and structured deformations", *Variations of domain and free-boundary problems in solid mechanics (Paris, 1997)*, vol. 66 of *Solid Mech. Appl.*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, p. 203–210.
- Del Piero G., Truskinovsky L., "Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity", *Int. J. Solids Structures*, vol. 38, n° 6, 2001, p. 1135–1138.
- Dugdale D. S., "Yielding of steel sheets containing slits", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 8, n° 2, 1960, p. 100–108.
- Ferdjani H., Abdelmoula R., Marigo J.-J., « Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement à rupture avec le modèle de Dugdale », *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 15, n° 4, 2006a, p. 409–425.
- Ferdjani H., Abdelmoula R., Marigo J.-J., "Study of the influence of small size defects on the rupture behavior with the Dugdale model.", *Third International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics*, 2006b.
- Ferdjani H., Abdelmoula R., Marigo J.-J., "Insensitivity to small defects of the rupture of materials governed by the Dugdale model", *Contin. Mech. Thermodyn.*, vol. 19, 2007, p. 191–210.
- Laverne J., Marigo J.-J., « Approche globale, minima relatifs et Critère d'Amorçage en Mécanique de la Rupture », *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 332, n° 4, 2004, p. 313–318.
- Needleman A., "A continuum model for void nucleation by inclusion debonding", *J. Appl. Mech.*, vol. 54, 1987, p. 525–531.

- Needleman A., "An analysis of tensile decohesion along an interface", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 38, n° 3, 1990, p. 289–324.
- Needleman A., "Micromechanical modelling of interface decohesion", *Ultramicroscopy*, vol. 40, 1992, p. 203–214.
- Nguyen O., Repetto E. A., Ortiz M., Radovitzki R. A., "A cohesive model of fatigue crack growth", *Int. J. Frac. Mech.*, vol. 110, n° 4, 2001, p. 351–369.
- Roe K. L., Siegmund T., "An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation", *Engineering Frac. Mech.*, vol. 70, n° 2, 2002, p. 209–232.
- Tvergaard V., "Effect of fiber debonding in a whisker-reinforced metal", *Mat. Sci. Eng. A-Struc.*, vol. 125, 1990, p. 203–213.
- Xie D., Waas A., "Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis", *Engineering Frac. Mech.*, vol. 73, n° 13, 2006, p. 1783–1796.

