

---

# Formulation et évaluation d'un modèle d'élément fini discret au sens de Mindlin pour l'analyse des structures isotropes

**Siham Sakami\*** — **Hamid Sabhi\*** — **Rezak Ayad\*\***  
**Nabil Talbi\*\***

\* *Laboratoire d'Analyse des Contraintes Mécanique (LACM EA n° 3304)*  
*7 bd. Jean Delautre F-08000 Charleville-Mézières*

*siham.sakami@univ-reims.fr*

\*\* *Groupe de Mécanique des Matériaux et des Structures (GMMS EA n° 2617)*  
*ESIEC, Esp. R.Garros BP 1029, F-51686 Reims*

---

*RÉSUMÉ. Ce travail présente une formulation variationnelle en déplacement, utilisant des hypothèses locales discrètes, pour aboutir à un modèle robuste d'élément fini de coque avec une géométrie simple. Une première hypothèse cinématique permet d'introduire le déplacement transversal aux 4 nœuds sommets. Les 4 nœuds milieux des côtés sont éliminés à l'aide d'une 2<sup>e</sup> hypothèse mécanique discrète. Le nouvel élément fini, baptisé DMQS, possède 4 nœuds et 6 ddl/nœud. Ses performances numériques sont évaluées à travers des cas-tests standard de plaques et de coques. Il peut être considéré comme une alternative aux éléments de structures minces sans cisaillement transversal, dits de Kirchhoff discrets.*

*ABSTRACT. This work deals with a displacement formulation using local discrete hypotheses, to lead to a simple and accurate shell finite element. A first kinematic hypothesis allows introducing the transverse displacement in the 4 corner nodes. The other 4 mid-side nodes are eliminated using a 2nd mechanical hypothesis. The new element DMQS (Discrete Mindlin Quadrilateral for Shells) has 4 nodes and 6 dofs/node. Its numerical performances are analysed using some known standard tests. It can be considered as an alternative to thin structure finite elements without transverse shear, called Discrete Kirchoff Elements.*

*MOTS-CLÉS : élément fini, plaque et coque, cisaillement transversal, modèle déplacement discret.*

*KEYWORDS: finite element, plate and shell, transverse shea, displacement discrete model.*

---

DOI:10.3166/REMN.17.529-552 © 2008 Lavoisier, Paris

## 1. Introduction

Les éléments finis de coque continuent à être largement utilisés dans l'industrie, tous secteurs confondus (automobile, aéronautique, militaire, génie civil, etc.). Cependant, les spécialistes s'accordent à dire que ces éléments, aujourd'hui disponibles, ne sont pas suffisamment fiables. Les causes étant multiples, la plus répandue reste incontestablement le phénomène de verrouillage numérique en cisaillement transversal *CT* lorsque la structure devient mince. Quelle serait la valeur ajoutée à apporter à une formulation variationnelle pour que celle-ci aboutisse à des éléments finis libres de tout verrouillage, tout en ayant une géométrie simple, avec un minimum de nœuds et de ddl par nœud, et satisfaisant aux conditions de convergence et de précision pour une situation donnée ? Tel est l'objectif que les chercheurs en éléments finis se sont fixés il y a une vingtaine d'années, objectif qui se poursuit encore aujourd'hui. On ne peut aborder la littérature sur le sujet sans citer l'article de référence associé à Ahmad, Irons et Zienkiewicz (Ahmad *et al.*, 1970). Ces auteurs ont proposé pour la première fois un élément fini assez particulier : il s'agit d'un modèle de coque à 8 nœuds dérivant d'un solide 3D qui dégénère sur une surface moyenne, avec la possibilité de prendre en compte le gauchissement d'une coque. Ce travail pionnier a laissé place à un développement extraordinaire durant les trois dernières décennies, en matière d'éléments finis à cinématique particulière. Une synthèse bibliographique est résumée par (Kerber, 1990) et (Mackerle, 2002). Un grand nombre d'auteurs, comme Bathe, Hughes, Zienkiewicz, Taylor, Dhatt, etc. ont apporté un savoir faire qui a permis de rendre la formulation d'éléments finis de Reissner-Mindlin simple et abordable. Dans cette section, nous rappelons les quelques modèles d'éléments connus, basés sur l'approche géométrique du solide 3D dégénéré qui considère la coque comme courbe. La première conséquence est l'apparition d'un gauchissement de la coque au niveau de la formulation. L'approche du solide dégénéré trouve son application dans des domaines variés de calcul des structures comme l'analyse linéaire des coques composites multicouches (Vlachoutsis, 1987; Vlachoutsis, 1990; Wilt *et al.*, 1990; Rammerstofer, 1991) ou la prise en compte des non-linéarités géométriques et matérielles (Hughes *et al.*, 1981; Fezans, 1981; Dvorkin *et al.*, 1984; Bathe *et al.*, 1986; Ramm *et al.*, 1986; Simo *et al.*, 1989; Simo *et al.*, 1990; Cofer *et al.*, 1991; Parisch, 1991; Boisse *et al.*, 1992; Ayad *et al.*, 2002).

Des travaux récents utilisant l'approche en question ont vu le jour, avec notamment des cinématiques particulières rendant les éléments robustes avec un minimum de nœuds et de ddl/nœud. Nous citons en particulier les travaux de (Zeng *et al.*, 1998; Lemosse, 2000; Legay *et al.*, 2003; Ayad *et al.*, 2002; Ayad, 2005; Dammak *et al.*, 2005; Kim *et al.*, 2007; Tafla, 2007).

Le nouveau modèle DMQS (*Discrete Mindlin Quadrilateral for Shells*) que nous présentons dans ce travail améliore sensiblement les résultats de coques présentant des comportements assez complexes en flexion. Il est formulé sur la base d'un élément quadrilatéral à 4 nœuds et 6 ddl par nœud. En flexion/*CT*, il devient l'élément de plaque DKMQ (Katili, 1993b) qui fût validé avec rigueur par l'auteur. En coque, il est courbe (solide dégénéré), sa formulation est de type déplacement avec une représen-

tation naturelle des déformations de  $CT$  au niveau élémentaire. Il est enrichi en introduisant initialement une approximation quadratique incomplète des rotations autour de la normale à la surface moyenne. Une des conséquences de ce type d'interpolation est l'apparition de ddl supplémentaires aux milieux des côtés. Ceux-ci sont éliminés par l'introduction d'hypothèses discrètes que nous développerons dans les sections suivantes. Nous aboutissons en conséquence à un élément fini isoparamétrique courbe, géométriquement simple (quadrangle à 4 nœuds), pouvant atteindre des précisions appréciables proches de celles de l'élément classique à huit nœuds, voire meilleures dans certaines situations. L'élément DMQS est libre de tout verrouillage, passe l'ensemble des patch-tests de déformations et de contraintes constantes, ne présente pas de modes parasites et demeure peu sensible aux distorsions géométriques de maillages. Il peut être considéré comme une alternative aux éléments finis de coque minces courbes, dits de Kirchhoff discrets, qui ont largement fait leurs preuves dans des applications industrielles sur des structures non sensibles au cisaillement transversal. Le modèle DMQS prend en compte les effets de  $CT$  ; il peut en conséquence être utilisé pour modéliser des structures composites stratifiées et sandwich. Nous présentons dans ce travail uniquement les applications aux cas des structures isotropes. Le modèle DMQS multicouche est en cours de développement (Sakami, Soutenance 2008).

## 2. Formulation théorique du modèle DMQS

Dans ce travail, nous avons adopté la formulation en déplacement et l'approche isoparamétrique du solide tridimensionnel dégénéré. La théorie utilisée est celle du premier ordre de Reissner-Mindlin, où les champs de déplacement varient linéairement dans la direction ( $z$ ) de l'épaisseur. Elle prend en compte les effets du  $CT$  à travers l'épaisseur. Nous présentons dans cette section les expressions des différentes relations géométriques, cinématiques et mécaniques, nécessaires à la construction du modèle déplacement projeté en cisaillement DDM (*Displacement Discrete Mindlin*) et de l'élément fini de coque correspondant DMQS (*Discrete Mindlin Quadrilateral for Shells*). Pour plus de détails sur la géométrie différentielle associée aux problèmes de coques courbes, le lecteur pourra consulter la référence (Ayad, 2002).

### 2.1. Représentation du champ de déplacements

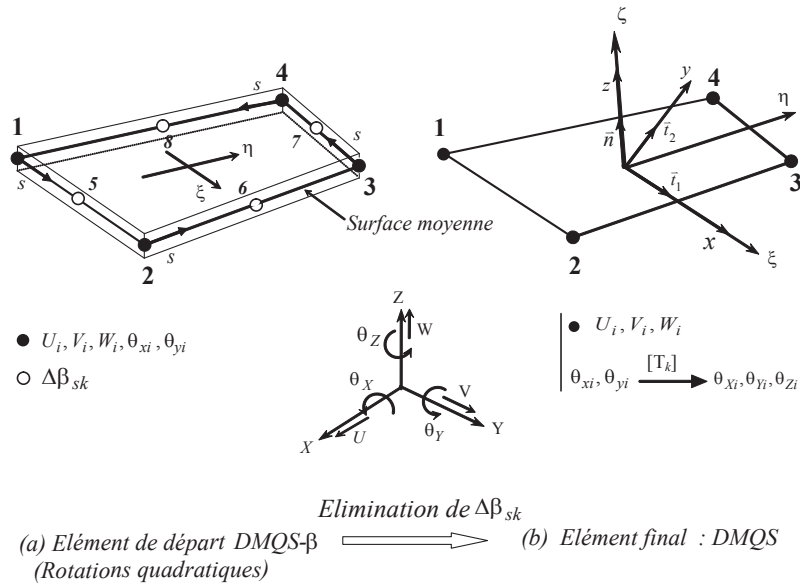
La géométrie de l'élément DMQS (figure 1) est engendrée par une surface moyenne  $A$  et sa normale  $\vec{n}$ . Elle est limitée par deux surfaces courbes supérieure et inférieure situées à égale distance  $+\frac{h}{2}$  et  $-\frac{h}{2}$  de la surface  $A$ . L'épaisseur  $h$ , considérée dans notre étude comme étant constante par élément, reste petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques d'une coque (Longueur  $L$ , largeur  $l$ , rayon de courbure minimum  $R_{min}$ ).

Le champ de déplacements d'un point quelconque  $q$  de la coque est défini en considérant l'hypothèse des sections droites, communément associée à Hencky-Mindlin-

Reissner. Celle-ci permet de retenir une mesure des déformations de *CT*. Nous écrivons ainsi :

$$\{u_q\} = \sum_{i=1}^4 N_i \{u_{pi}\} + \zeta \frac{h}{2} \{\beta_i\}; \{u_{pi}\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad [1]$$

$$\{\beta_i\} = \sum_{i=1}^4 N_i \{-\theta_{xi} \{t_{2i}\} + \theta_{yi} \{t_{1i}\}\} + \sum_{k=5}^8 P_k \Delta \beta_{sk} \{t_{sk}\} \quad [2]$$



**Figure 1.** Élément de coque courbe DMQS

Les déplacements et les rotations sont définis par une interpolation quadratique incomplète, faisant apparaître six ddl  $\{U_i, V_i, W_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}$  aux quatre nœuds sommets de l'élément et quatre accroissements de rotation  $\Delta\beta_{sk}$  aux nœuds milieux des côtés. Les fonctions d'interpolation bilinéaires  $\{N_i\}$  et quadratiques  $\{P_k\}$  sont représentées dans le tableau 1.

$\{N_i\}$	$\{P_k\}$
$4N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)$	$2P_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta)$
$4N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)$	$2P_6 = (1 + \xi)(1 - \eta^2)$
$4N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)$	$2P_7 = (1 - \xi^2)(1 + \eta)$
$4N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)$	$2P_8 = (1 - \xi)(1 - \eta^2)$

**Tableau 1.** Fonctions d'interpolation bi-linéaires et quadratiques incomplètes de l'élément initial DMQS  $\beta$

- $U_i, V_i, W_i$  : déplacements du nœud  $i$  dans le repère global d'axes  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  ;
- $\theta_{xi}, \theta_{yi}$  : rotations de la normale au nœud  $i$  autour des axes tangents  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  ;
- $\Delta\beta_{sk}$  : rotations tangentielles de bord associées à la représentation quadratique de  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sur chacun des côtés.

## 2.2. Approximation des champs de déformations

Les expressions des formulations variationnelles du modèle de coque DMQS sont assez complexes à mettre en œuvre. Pour simplifier la lecture au lecteur, une définition cohérente et représentative de l'ensemble des déformations, qui consiste à négliger les courbures moyenne et gaussienne sans affecter la précision des résultats, a été retenue (MacNeal *et al.*, 1985). Il s'agit de définir une approximation linéaire en  $z$  pour les déformations de membrane-flexion et une approximation constante en  $z$  pour les déformations de  $CT$  :

$$\{\varepsilon_s\} = \{\varepsilon_0\} + z \{\varepsilon_1\} \quad [3]$$

$$\{\gamma_s\} = \{\gamma_0\} \quad [4]$$

- $\langle \varepsilon_0 \rangle = \langle e_x, e_y, e_{xy} \rangle$  : déformations de membrane ;
- $\langle \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_{x1}, \varepsilon_{y1}, \gamma_{xy1} \rangle$  : déformations de flexion avec prise en compte du couplage entre les effets de membrane et de flexion ;
- $\langle \gamma_0 \rangle = \langle \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \rangle$  : déformations de  $CT$  (constantes en  $z$ ).

### 2.2.1. Déformations de membrane

L'interpolation du champ de déplacements relation [1] permet d'écrire les équations suivantes reliant les déformations réelles et virtuelles de membrane  $\{\varepsilon_0\}$  et  $\langle \varepsilon_0^* \rangle$  respectivement aux déplacements nodaux  $\{U_n\}$  et  $\langle U_n^* \rangle$  :

$$\{\varepsilon_0\} = [B_0] \{U_n\} \quad ; \quad \langle \varepsilon_0^* \rangle = \langle U_n^* \rangle [B_0]^T \quad [5]$$

$$\langle U_n \rangle = \langle U_i \ V_i \ W_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ \dots i = 1 \text{ à } 4 \rangle \quad [6]$$

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & \\ \langle t_2 \rangle N_{i,y} & 0 & 0 & \dots i = 1 \text{ à } 4 \\ \langle t_1 \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & \end{bmatrix} \quad [7]$$

$$N_{i,x} = C_{11}N_{i,\xi} + C_{21}N_{i,\eta} \text{ et } N_{i,y} = C_{12}N_{i,\xi} + C_{22}N_{i,\eta} \quad [8]$$

$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$  sont les termes de la matrice  $[C_0]$ . La matrice  $[B_0]$ , de dimension  $3 \times 20$ , fait intervenir uniquement les variables nodales de déplacements.

2.2.2. *Déformations de flexion (courbures)*

Les vecteurs de déformations de flexion réelles et virtuelles  $\{\varepsilon_1\}$  et  $\langle \varepsilon_1^* \rangle$  sont calculés comme pour la membrane, à partir de la relation [ 1] en fonction des déplacements nodaux  $\{U_n\}$  (respectivement  $\langle U_n^* \rangle$ ) et des rotations tangentielles  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  (respectivement  $\langle \Delta\beta_{sk}^* \rangle$ ) :

$$\{\varepsilon_1\} = [B_1] \{U_n\} + [B_{1\Delta\beta}] \{\Delta\beta_{sk}\} ; \langle \varepsilon_1^* \rangle = \langle U_n^* \rangle [B_1]^T + \langle \Delta\beta_{sk}^* \rangle [B_{1\Delta\beta}]^T \quad [9]$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,x} & \frac{h}{2} \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,x} & \\ \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,y} & \frac{h}{2} \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,y} & \dots i = 1 \text{ à } 4 \\ \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,y} + \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,x} & \frac{h}{2} [\langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,x}] & \end{bmatrix} \quad [10]$$

$$\bar{N}_{i,x} = b_{c11}N_{i,\xi} + b_{c21}N_{i,\eta} ; \bar{N}_{i,y} = b_{c12}N_{i,\xi} + b_{c22}N_{i,\eta} \quad [11]$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{t}_{1i} \rangle &= \langle -\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{2i} \quad \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{1i} \rangle \\ \langle \bar{t}_{2i} \rangle &= \langle -\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{2i} \quad \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{1i} \rangle \end{aligned} \quad [12]$$

$$[B_{1\Delta\beta}] = \begin{bmatrix} (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,x} & & \\ (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,y} & & \dots k = 5 \text{ à } 8 \\ (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,y} + (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,x} & & \end{bmatrix} \quad [13]$$

$$P_{k,x} = C_{11}P_{k,\xi} + C_{21}P_{k,\eta} \text{ et } P_{k,y} = C_{12}P_{k,\xi} + C_{22}P_{k,\eta} \quad [14]$$

$b_{c11}, b_{c12}, b_{c21}, b_{c22}$  sont les termes de la matrice  $[b_c]$ . Cette dernière prend en considération le cas du gauchissement des coques.

La matrice  $[B_1]$ , de dimension  $3 \times 20$ , fait intervenir toutes les variables nodales. La matrice  $[B_{1\Delta\beta}]$ , de dimension  $3 \times 4$ , fait intervenir les rotations  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  aux milieux des côtés. Ces dernières seront éliminées en utilisant deux hypothèses discrètes modifiées de Mindin que nous présentons par la suite.

### 2.2.3. Déformations de cisaillement transversal

Dans la plupart des modèles variationnels, qu'ils soient mixtes ou en déplacement, le verrouillage en *CT* provient essentiellement de la définition numérique des déformations de *CT*  $\{\gamma_0\}$ . Ce problème numérique est la conséquence d'une définition de  $\{\gamma_0\}$  à partir des approximations bilinéaires et quadratiques des variables cinématiques relation [1]. Pour éliminer le verrouillage en *CT* et obtenir une définition cohérente des déformations de *CT*, nous avons retenu l'approche des déformations de substitution (méthode ANS : *Assumed Natural Strains*) qui fût proposée par (Bathe *et al.*, 1985) et (Bathe *et al.*, 1986). Cette technique consiste à introduire une hypothèse de Mindlin sous forme discrète, par écriture des déformations naturelles ou covariantes  $\{\gamma_{\xi\xi}\}$  et  $\{\gamma_{\eta\xi}\}$  en fonction des déformations  $\{\gamma_{\zeta k}\}$  calculées aux milieux des côtés élémentaires :

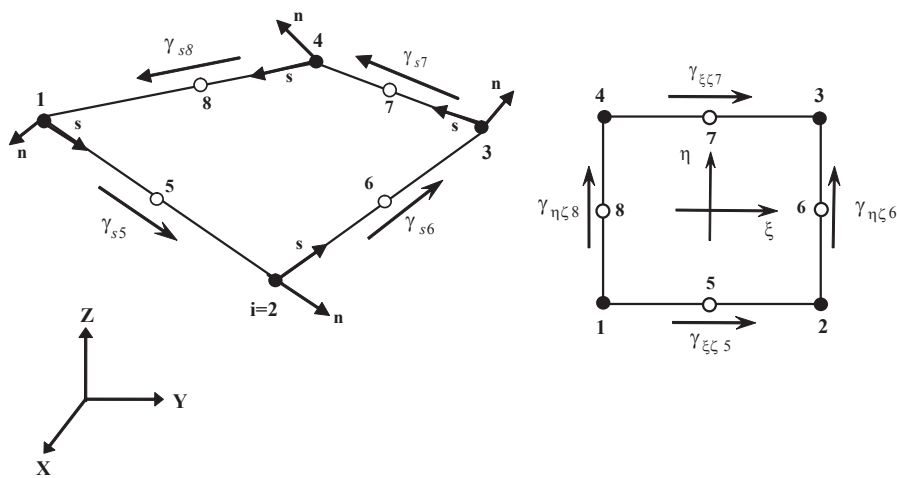
$$\{\gamma_0\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [C_0]^T \{\gamma_\zeta\} \quad [15]$$

$$\{\gamma_\zeta\} = [A] \{\gamma_{\zeta k}\} ; [A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 \\ 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi \end{bmatrix} \quad [16]$$

$$\langle \gamma_{\zeta k} \rangle = \langle \gamma_{\xi\xi 5} \ \gamma_{\eta\xi 6} \ \gamma_{\xi\xi 7} \ \gamma_{\eta\xi 8} \rangle \quad [17]$$

$\gamma_{\xi\zeta 5}$ ,  $\gamma_{\eta\varsigma 6}$ ,  $\gamma_{\xi\zeta 7}$  et  $\gamma_{\eta\varsigma 8}$  sont les déformations covariantes de cisaillement, définies sur les quatre côtés 5, 6, 7 et 8 respectivement (figure 2). Elles sont reliées aux déformations tangentielles de bord  $\gamma_{s5}$ ,  $\gamma_{s6}$ ,  $\gamma_{s7}$  et  $\gamma_{s8}$  par la relation :

$$\gamma_{\xi\zeta 5} = L_5\gamma_{s5}/2, \quad \gamma_{\eta\varsigma 6} = L_6\gamma_{s6}/2, \quad \gamma_{\xi\zeta 7} = -L_7\gamma_{s7}/2, \quad \gamma_{\eta\varsigma 8} = -L_8\gamma_{s8}/2 \quad [18]$$



**Figure 2.** Déformations naturelles de CT projetées sur les côtés

Ces dernières sont choisies constantes sur les côtés de l'élément. L'expression finale du vecteur des déformations de CT  $\{\gamma_0\}$  relation [15] s'écrit :

$$\{\gamma_0\} = [C_0]^T [A] \{\gamma_{sk}\} \quad [19]$$

avec

$$\langle \gamma_{sk} \rangle = \langle \gamma_{s5} \quad \gamma_{s6} \quad \gamma_{s7} \quad \gamma_{s8} \rangle = \left\langle \frac{2}{L_5}\gamma_{\xi\zeta 5} \quad \frac{2}{L_6}\gamma_{\eta\varsigma 6} \quad -\frac{2}{L_7}\gamma_{\xi\zeta 7} \quad -\frac{2}{L_8}\gamma_{\eta\varsigma 8} \right\rangle \quad [20]$$

#### 2.2.4. Hypothèses discrètes de Mindlin

La formulation du modèle « élément fini » fait apparaître jusqu'à présent huit nœuds au total (4 nœuds sommets et 4 nœuds milieux des côtés). Nous proposons de



simplifier la description géométrique de l'élément en éliminant les nœuds aux milieux des côtés. Nous introduisons pour cela deux hypothèses de Mindlin sous une forme discrète sur le côté  $k$  de l'élément :

– la première hypothèse est cinématique, elle fait intervenir une relation entre ladéformation de  $CT$  de bord et les variables cinématiques correspondantes. Elle ne contribue pas directement à l'élimination des rotations  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  mais elle fait apparaître le déplacement transversal aux nœuds sommets. Elle s'écrit :

$$\int_0^{L_k} (\gamma_{sk} - \vec{u}_{p,s} \cdot \vec{n}_k - \vec{\beta} \cdot \vec{t}_{sk}) ds = 0 ; \quad k = 5 \text{ à } 8 \quad [21]$$

Nous revenons sur cette hypothèse par la suite ;

– la seconde hypothèse est mécanique, elle fait intervenir une relation entre la déformation de  $CT$  de bord  $\{\gamma_{sk}\}$  et l'effort tranchant correspondant  $T_s$  via la loi de comportement en  $CT$ . Elle s'écrit :

$$\int_0^{L_k} (\gamma_{sk} - \frac{T_s}{D_c}) ds = 0 ; \quad k = 5 \text{ à } 8 \quad [22]$$

L'effort de  $CT$ , est relié aux moments de flexion  $M_s$  et  $M_{sn}$  (figure 3) en utilisant une équation d'équilibre en flexion sur le bord  $k$ .

$$T_s = M_{s,s} + M_{sn,n} \quad [23]$$

La loi de comportement en flexion permet une écriture des moments  $M_s$  et  $M_{sn}$  en fonction des rotations  $\beta_s$  et  $\beta_n$  :

$$M_s = D_f(\beta_{s,s} + \nu\beta_{n,n}) \quad [24]$$

$$M_{sn} = D_f \frac{1-\nu}{2}(\beta_{s,n} + \nu\beta_{n,s}) \quad [25]$$

$D_f$  et  $D_c$  sont respectivement les rigidités de flexion et de  $CT$ ,  $G$  le module de cisaillement et  $k$  le facteur de correction du  $CT$  :

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} ; \quad D_c = kGh ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \quad k = 5/6 \quad [26]$$

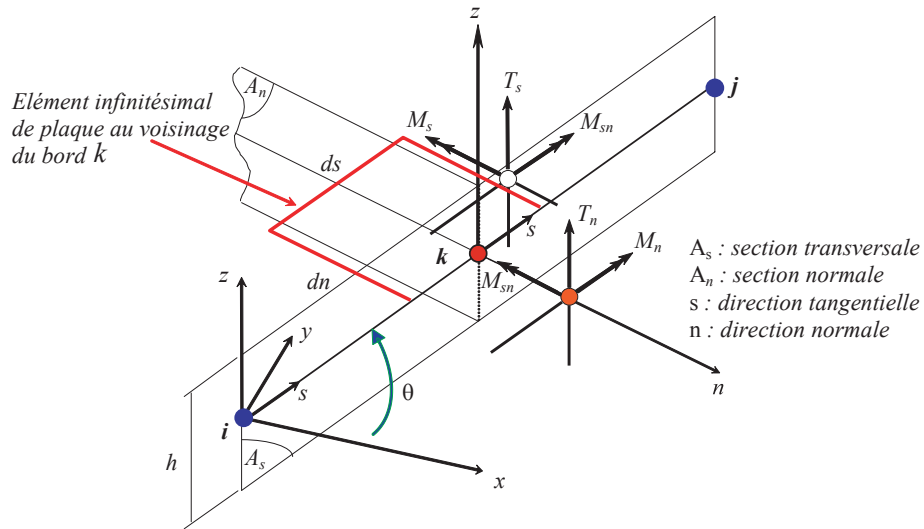


Figure 3. Hypothèses de Mindlin sur un bord élémentaire  $i - j$

L'élimination des quatre rotations  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  ( $k = 5$  à  $8$ ) s'obtient en identifiant les deux expressions relatives aux déformations de CT de bord [21] et [22]. Une approximation quadratique incomplète pour la rotation  $\beta_s$  et linéaire pour la rotation  $\beta_n$  (figure 4) permettront de faire apparaître les rotations de bord  $\{\Delta\beta_{sk}\}$ .

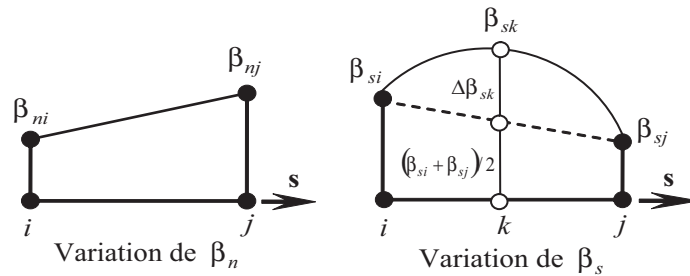


Figure 4. Variation des rotations tangentielles suivant  $s$

$$\beta_s = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{si} + \frac{s}{L_k}\beta_{sj} + 4\frac{s}{L_k}\left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\Delta\beta_{sk} \quad [27]$$

$$\beta_n = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{ni} + \frac{s}{L_k}\beta_{nj} \quad [28]$$

Dans l'hypothèse mécanique de Mindlin [22], une substitution des approximations [27] et [28] dans les expressions de  $M_s$  [24] et  $M_{sn}$  [25], et l'utilisation de l'équation d'équilibre [23] permettent d'aboutir à l'expression suivante de  $\gamma_{sk}$  :

$$\gamma_{sk}L_k = \frac{D_f}{D_c}L_k\beta_{s,ss} = -\frac{2}{3}L_k\Phi_k\Delta\beta_{sk} \quad [29]$$

$\Phi_k$  est le facteur d'influence de  $CT$ , défini pour une section homogène isotrope par :

$$\Phi_k = \frac{D_f}{D_c} \frac{12}{L_k^2} = \frac{2}{k(1-\nu)} \left( \frac{h}{L_k} \right)^2 \quad [30]$$

L'application de l'hypothèse cinématique [21] sur chacun des côtés  $k$  de l'élément, avec les mêmes approximations définies pour  $\{\beta_s\}$  [27] et  $\{\beta_n\}$  [28], conduit à l'expression suivante du vecteur des déformations de  $CT$  de bord  $\{\gamma_{sk}\}$  projetées sur les degrés de liberté nodaux  $\{U_n\}$  et  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  :

$$\gamma_{sk}L_k = w_j - w_i + \frac{L_k}{2}(\beta_{si} + \beta_{sj}) + \frac{2}{3}L_k\Delta\beta_{sk} \quad [31]$$

Une écriture du vecteur  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  en termes de ddls  $\{U_n\}$  est obtenue par une combinaison des deux expressions associées à  $\{\gamma_{sk}\}$  [29] et [31] :

$$\{\Delta\beta_n\} = [A_n] \{U_n\} \quad ; \quad [A_n] = [A_\Phi]^{-1} [A_G] \quad [32]$$

Les matrices  $[A_\Phi]$  et  $[A_G]$  sont données par :

$$[A_\Phi] = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} L_5(1 + \Phi_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_6(1 + \Phi_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_7(1 + \Phi_7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_8(1 + \Phi_8) \end{bmatrix} \quad [33]$$

$$[A_G] = \begin{bmatrix} -\langle \vec{n}^5 \rangle & \langle -\vec{a}_1 \cdot \vec{t}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{t}_1 \rangle & \langle \vec{n}^5 \rangle & \langle -\vec{a}_1 \cdot \vec{t}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{t}_1 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & -\langle \vec{n}^6 \rangle & \langle -\vec{a}_2 \cdot \vec{t}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{t}_1 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \vec{n}^8 \rangle & \langle \vec{a}_2 \cdot \vec{t}_2 & -\vec{a}_2 \cdot \vec{t}_1 \rangle & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \vec{n}^6 \rangle & \langle -\vec{a}_2 \cdot \vec{t}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{t}_1 \rangle & 0 & 0 & 0 \\ -\langle \vec{n}^7 \rangle & \langle \vec{a}_1 \cdot \vec{t}_2 & -\vec{a}_1 \cdot \vec{t}_1 \rangle & \langle \vec{n}^7 \rangle & \langle \vec{a}_1 \cdot \vec{t}_2 & -\vec{a}_1 \cdot \vec{t}_1 \rangle \\ 0 & 0 & -\langle \vec{n}^8 \rangle & \langle \vec{a}_2 \cdot \vec{t}_2 & -\vec{a}_2 \cdot \vec{t}_1 \rangle \end{bmatrix}$$

La matrice  $[A_G]$  est de dimension  $(4 \times 20)$ , elle fait intervenir toutes les variables nodales  $\{U_n\}$ . La matrice  $[A_\Phi]$  est de dimension  $(4 \times 4)$ .

REMARQUE. —  $\vec{n}^k$  est la normale définie aux points milieux des côtés 5, 6, 7 et 8. Elle s'écrit en fonction des normales  $\vec{n}_i$  et  $\vec{n}_j$  aux nœuds  $i - j$  du bord  $k$  (tableau 2).

$k : (\xi, \eta)$	8 : (0,-1)	5 : (1,0)	6 : (0,1)	7 : (-1,0)
nœud $i$	4	1	2	3
nœud $j$	1	2	3	4

Tableau 2.  $N$  nœuds  $i-j$  du bord  $k$

$$\vec{n}^k = \frac{\vec{n}^k}{|\vec{n}^k|}; \quad \vec{n}^k = \frac{1}{2}(\vec{n}_i + \vec{n}_j) \tag{34}$$

2.2.5. Expression finale des déformations  $\{\varepsilon_1\}$  et  $\{\gamma_0\}$

Après élimination des rotations  $\{\Delta\beta_{sk}\}$ , nous aboutissons aux expressions suivantes des vecteurs de déformation de flexion et de CT :

$$\{\varepsilon_1\} = [B_f] \{U_n\} \quad \text{et} \quad \{\gamma_0\} = [B_c] \{U_n\} \tag{35}$$

avec

$$[B_f] = [B_1] + [B_{1\Delta\beta}] [A_n] \quad \text{et} \quad [B_c] = [B_{s\Delta\beta}] [A_n] \tag{36}$$

$[B_f]$  et  $[B_c]$  sont les nouvelles matrices modifiées de déformations de flexion et de CT respectivement. Elles sont de dimensions  $(3 \times 20)$  et  $(2 \times 20)$  et sont associées au nouvel élément fini de coque à 4 nœuds et 5 ddl par nœud.

### 3. Matrice de rigidité élémentaire

#### 3.1. Matrice de rigidité

L'expression du  $P.T.V$  est définie par sa forme généralisée suivante :

$$W = \sum_{Elts} (W_{int}^e - W_{ext}^e) = 0 ; \quad \forall \vec{u}_q^* \quad [37]$$

L'expression du travail virtuel interne  $W_{int}^e$  est donnée par :

$$W_{int}^e = \int_{V_e} (\langle \varepsilon_s^* \rangle [H] \{ \varepsilon_s \} + \langle \gamma_s^* \rangle [G] \{ \gamma_s \}) dV = \langle U_n^* \rangle [k^e] \{ U_n \} \quad [38]$$

$[k^e]$  est la matrice de rigidité élémentaire totale, de dimension 20 x 20. Elle contient toutes les modifications apportées aux tenseurs des déformations de flexion et de  $CT$  grâce à l'introduction des deux hypothèses discrètes de Mindlin :

$$[k^e] = [k_m] + [k_f] + [k_c] \quad [39]$$

$$[k_m] = \int_{A_e} [B_0]^T [H_m] [B_0] det [F_0] d\xi d\eta ; \quad [H_m] = h [H] \quad [40]$$

$$[k_f] = \int_{A_e} [B_f]^T [H_f] [B_f] det [F_0] d\xi d\eta ; \quad [H_f] = \frac{h^3}{12} [H] \quad [41]$$

$$[k_c] = \int_{A_e} [B_c]^T [H_c] [B_c] det [F_0] d\xi d\eta ; \quad [H_c] = h [G] \quad [42]$$

$$det [F_0] = \frac{h}{2} |\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|$$

$[H]$  et  $[G]$  sont les matrices classiques d'élasticité plane pour un matériau homogène isotrope :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad et \quad [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [43]$$

Notons que seuls 2 x 2 points de gauss suffisent pour intégrer exactement la matrice de rigidité élémentaire  $[k^e]$ .

### 3.2. Matrice de rigidité fictive

Tous les termes de la matrice  $[k^e]$  [39] associés aux rotations autour de la normale  $\theta_{zi}$  sont nuls. Par conséquent, si tous les éléments connectés à un nœud  $i$  sont coplanaires, la matrice de rigidité assemblée devient singulière lors du passage du repère local au repère global. Pour éviter ce problème numérique, nous introduisons une matrice de rigidité fictive  $[k_{\theta z}]$  associée aux quatre rotations nodales  $\theta_{zi}$ , telle que  $[k^e] = [k^e] + [k_{\theta z}]$ . Nous avons adopté l'expression suivante de la matrice  $[k_{\theta z}]$  proposée par (Batoz *et al.*, 1992) :

$$[k_{\theta z}] = \alpha H_{f1} \int_{A^e} [N_{\theta z}]^T [N_{\theta z}] dA \quad [44]$$

$H_{f1}$  est une valeur caractéristique associée à une rigidité de flexion.  $\alpha$  est un coefficient dépendant de la précision de l'ordinateur.  $\alpha = 10^{-4}$  et  $H_{f1} = Eh^3$  ont été utilisés dans la programmation. Le passage du repère local au repère global se traduit par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = [Q^T] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} = [Q^T] \begin{Bmatrix} \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix} \quad [45]$$

$$\langle u_n \rangle_{loc} = \langle u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi} ; i = 1 \text{ à } 4 \rangle \quad [46]$$

$$\langle U_n \rangle_{glob} = \langle U_i, V_i, W_i, \theta_{Xi}, \theta_{Yi}, \theta_{Zi} ; i = 1 \text{ à } 4 \rangle \quad [47]$$

La matrice de rigidité élémentaire dans le repère global s'écrit enfin :

$$[k^e]_{glob} = [T]^T [k^e]_{loc} [T] \quad [48]$$

avec

$$[k^e]_{loc} = [k_m] + [k_f] + [k_c] + [k_{\theta z}] \quad [49]$$

$$[T]_{24 \times 24} = \begin{bmatrix} [A] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [A] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [A] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [A] \end{bmatrix} ; \quad [A]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [Q]^T & [0] \\ [0] & [Q]^T \end{bmatrix} \quad [50]$$

#### 4. Résultats numériques

Les performances de convergence et de précision du nouvel élément fini de coque courbe DMQS sont évaluées à travers un ensemble de cas-tests standard de coque, considérés comme sévères par les chercheurs. Pour chaque cas-test, le résultat obtenu est comparé à une solution de référence et à des solutions approchées issues d'éléments finis connus de la littérature. Les tests standard considérés dans cette étude sont ceux de la plaque carrée simplement supportée sous charge uniforme pour vérifier l'absence de verrouillage en  $CT$ , du cylindre pincé supporté par deux diaphragmes rigides, de la poutre vrillée sous chargements plan et hors plan et de la coque hémisphérique pincée.

Nous rappelons brièvement les caractéristiques des éléments  $Q4\gamma24$  et DMTS, utilisés pour une confrontation numérique avec notre modèle DMQS :

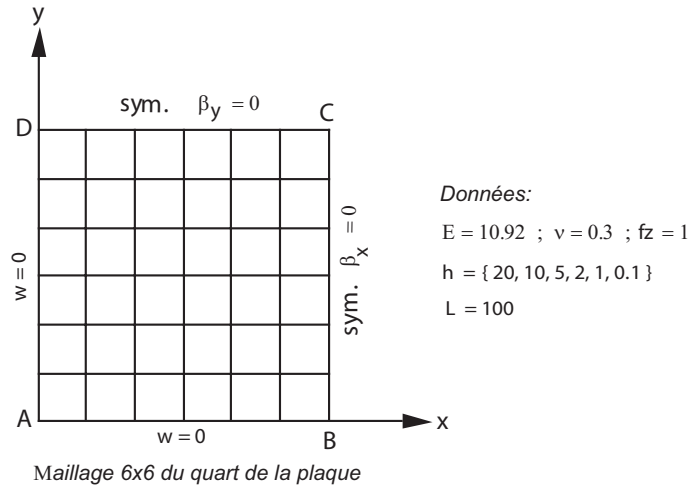
- élément DMTS : élément de coque triangulaire à 3 nœuds. Il est formulé sur la base du nouveau modèle variationnel DDM (*Displacement Discrete Mindlin*). On introduit de la même façon que pour DMQS deux hypothèses discrètes de Mindlin (cinématique et mécanique) au niveau de la plaque ou de la partie « flexion/ $CT$  ». DMTS utilise l'approche par « facettes planes » avec une combinaison de l'élément plan de membrane classique CST à celui de plaque en flexion/ $CT$  DKMT (Katili, 1993a) ;

- élément  $Q4\gamma24$  ou l'élément MITC4 est proposé par (Bathe *et al.*, 1985; Bathe *et al.*, 1986). Il a été reformulé en faisant appel aux transformations Jacobiennes. C'est un élément de coque isoparamétrique courbe à 4 nœuds, avec une approximation bilinéaire des rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  et des déplacements  $U, V, W$ .

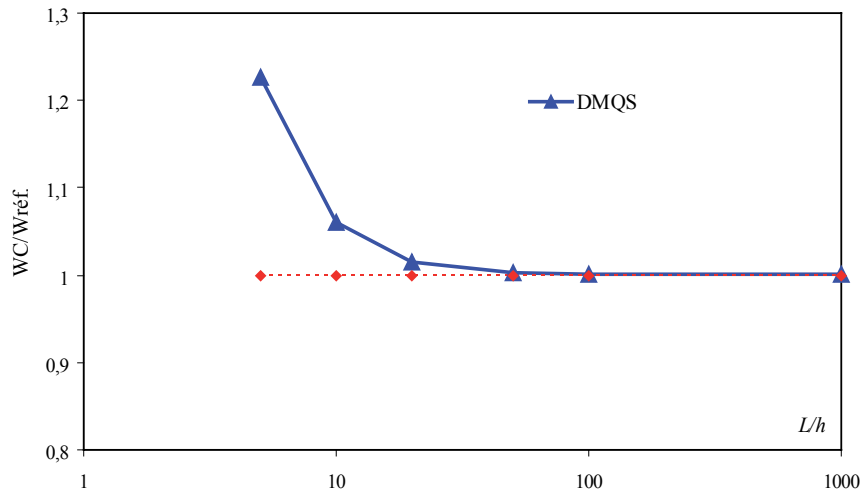
##### 4.1. Influence de l'élanement $L/h$ . Test de verrouillage en $CT$

L'aspect numérique du verrouillage en  $CT$  est décrit à travers l'analyse d'une plaque carrée isotrope simplement supportée et soumise à une charge uniforme (figure 5) pour différents élanements  $L/h$  (5 à 1000).

Les résultats de notre modèle DMQS sur le déplacement  $W_C$  en fonction de l'élanement  $L/h$  (figure 6) tendent vers ceux de plaque mince (théorie de kirchhoff), montrant ainsi l'absence du verrouillage en  $CT$ .



**Figure 5.** Plaque carrée isotrope simplement supportée sous charge uniforme. Données



**Figure 6.** Influence de l'élancement  $L/h$  sur la flèche au centre de la plaque

#### 4.2. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides

Un des tests réputés sévères pour les problèmes de coque est celui d'un cylindre court ( $L/R = 2$ ) et mince ( $R/h = 100$  et  $L/h = 200$ ) supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités, et soumis à deux charges concentrées diamétralement op-

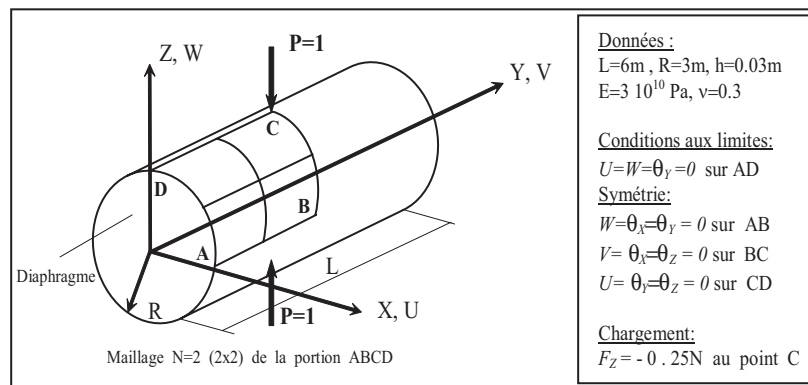


posées (figure 7). Ce test permet d'examiner l'aptitude d'un élément de coque à simuler des états de membrane complexes, avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne, notamment au niveau des zones sollicitées. Le problème étant symétrique, seul le huitième de la coque est modélisé en utilisant des maillages réguliers ( $N = 2$  à 16 éléments par côté). (Flugge, 1960) et (Lindberg *et al.*, 1969) ont proposé une solution de référence basée sur la théorie de coque mince :

- déplacement  $W_C$  sous la charge :  $\overline{W}_C = -W_C E h / P = 164,24$  ;
- déplacement  $V_D$  suivant Y :  $\overline{V}_D = -V_D E h / P = 4,11$ .

Les courbes de convergence des déplacements  $\overline{W}_C$  et  $\overline{V}_D$  en fonction du nombre de degrés de liberté actifs « ddls » sont présentées sur les (figures 8 et 9).

Les éléments de coque DMQS, DMTS (?) et  $Q4\gamma 24$  (Batoz *et al.*, 1992) convergent de façon monotone vers la solution de référence dans le cas du déplacement  $\overline{W}_C$ . La flexion étant dominante au voisinage du point C ; la bonne performance de l'élément DMQS par rapport à l'élément  $Q4\gamma 24$  s'explique par une représentation plus riche et plus précise de la flexion au sein de la formulation du modèle DDM (rappelons que les rotations de la normale à la surface moyenne sont interpolées de manière quadratique). Dans le cas du déplacement  $\overline{V}_D$ , une convergence assez bonne est obtenue par l'élément  $Q4\gamma 24$  mais moins bonne que celle obtenue par DMQS.



**Figure 7.** Cylindre pincé avec diaphragmes. Données

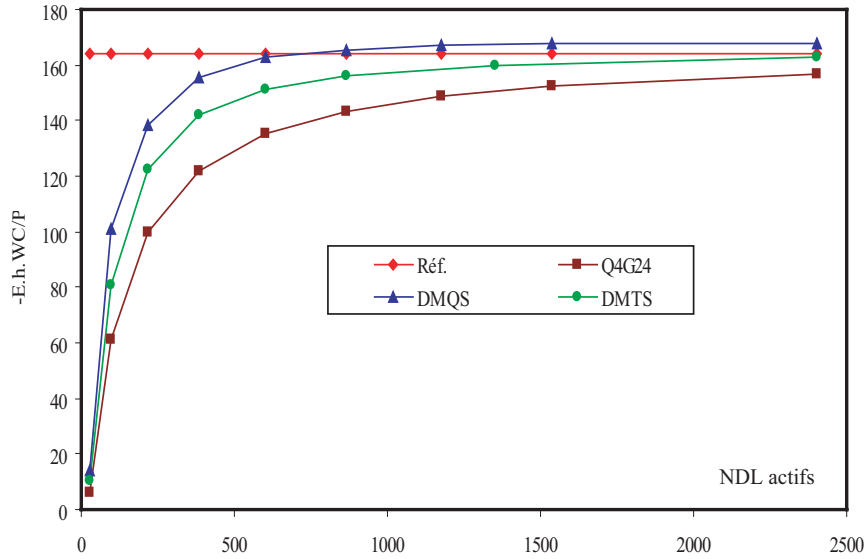


Figure 8. Cylindre pincé. Convergence de  $\overline{W}_C$

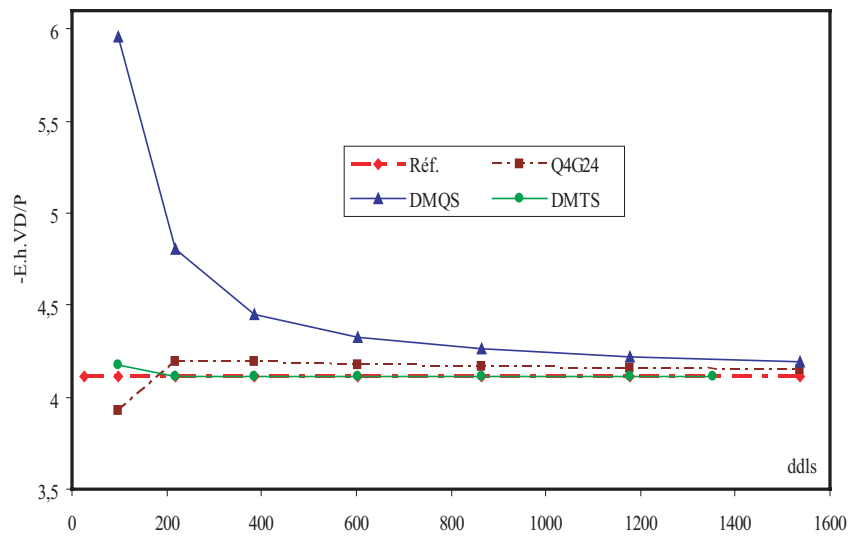


Figure 9. Cylindre pincé. Convergence de  $\overline{V}_D$

### 4.3. Poutre vrillée avec chargements plan et hors plan

Ce cas-test a été proposé par (MacNeal *et al.*, 1985) pour tester les formulations solides ou coques dans le cas de maillages distordus. Il s'agit d'une poutre vrillée encastree à une extrémité et soumise à deux cas de chargement concentré à l'autre extrémité : une charge dans le plan et une autre hors plan comme indiqué sur la (figure 10). La géométrie vrillée d'un angle de  $90^\circ$  conduit à des éléments distordus rendant ainsi ce test assez complexe. C'est pour cette raison que celui-ci est souvent considéré comme un bon examen de validation d'éléments finis de coque avec gauchissement de la surface moyenne, en particulier les éléments quadrilatéraux à 4 nœuds. Les résultats obtenus par notre élément DMQS sont comparés, pour différents maillages, à la solution de référence proposée par (MacNeal *et al.*, 1985) et à ceux des éléments DKT-CST (Batoz *et al.*, 1992),  $Q4\gamma$ -Q4 (Ayad, 1993) et NHMiSP4 (?). Ils sont reportés respectivement sur les tableaux 3 et 4 pour les deux cas de charges et pour deux valeurs différentes de l'épaisseur :  $h = 0,32$  et  $h = 0,0032$ .

Pour ( $h = 0,32$  ; tableau 3), l'ensemble des éléments converge de façon monotone vers la solution de référence pour les deux cas de charge. Dans le cas du chargement hors plan, les effets de membrane dominent ceux de flexion au voisinage de l'encastrement. La convergence des éléments  $Q4\gamma$ -Q4 et DKT-CST est plus lente car la partie membrane, représentée par les éléments standard bilinéaires Q4 (pour le quadrilatère) et linéaires CST (pour le triangle DKT), n'est pas assez riche en approximation pour simuler des effets membranaires dominants. Les éléments DMQS et mixte-hybride NHMiSP4 donnent de très bons résultats.

Pour une coque très mince ( $h = 0,0032$  ; tableau 4) et pour les deux cas de charge, les résultats donnés par l'élément DMQS sont très satisfaisants. Ceux des éléments  $Q4\gamma$ -Q4 et DKT-CST convergent de façon monotone vers la solution de référence. Une petite divergence passagère est observée pour l'élément DKT-CST dans le cas du maillage  $4 \times 24$ . Celui-ci reconverge à nouveaux à partir de  $6 \times 36$ .

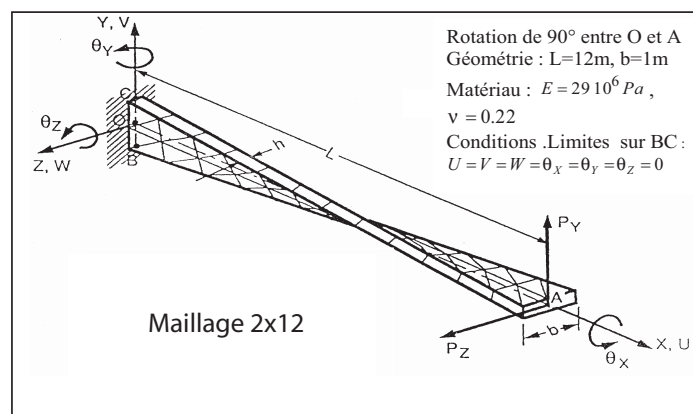


Figure 10. Poutre vrillée sous charges concentrées. Données

a. Chargement dans le plan: $P_Y = 0$ , $P_Z = 10^3$				
maillage (NxN)	<i>DMQS</i>	<i>NHMiSP4</i>	$Q4\gamma - Q4$	<i>DKT - CST</i>
2x12	5.391	5.386	5.37	5.327
4x24	5.398	5.406	5.39	5.367
6x36	5.426	5.412	5.406	5.343
Référence: $W_A = 5.424$				
b. Chargement hors plan: $P_Y = 10^3$ , $P_Z = 0$ :				
maillage (NxN)	<i>DMQS</i>	<i>NHMiSP4</i>	$Q4\gamma - Q4$	<i>DKT - CST</i>
2x12	1.628	1.731	1.607	1.465
4x24	1.738	1.746	1.708	1.621
6x36	1.741	1.749	1.731	1.682
Référence: $V_A = 1.754$				

**Tableau 3.** Poutre vrillée. Résultat des déplacements en A pour  $h = 0,32$ 

a. Chargement dans le plan: $P_Y = 0$ , $P_Z = 1$				
maillage (NxN)	<i>DMQS</i>	<i>NHMiSP4</i>	$Q4\gamma - Q4$	<i>DKT - CST</i>
2x12	5189	5186	5127	5268
4x24	5219	5233	5204	5203
6x36	5247	5244	5227	5258
Référence: $W_A = 5316$				
b. Chargement hors plan: $P_Y = 1$ , $P_Z = 0$				
maillage (NxN)	<i>DMQS</i>	<i>NHMiSP4</i>	$Q4\gamma - Q4$	<i>DKT - CST</i>
2x12	1274	1272	1256	1285
4x24	1285	1288	1283	1282
6x36	1292	1291	1288	1287
Référence: $V_A = 1296$				

**Tableau 4.** Poutre vrillée. Résultats des déplacements en A, pour  $h = 0,0032$ 

#### 4.4. Coque hémisphérique pincée

Il s'agit d'une coque hémisphérique mince ( $R/h = 250$ ) soumise sur sa base libre à quatre charges concentrées diamétralement opposées. Dans cet exemple, l'hémisphère subit d'importantes rotations de corps rigide et des déformations de flexion sans extension. Ce problème constitue un bon test pour vérifier l'absence de blocage en membrane et la bonne représentation des mouvements de corps rigide. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la structure est discrétisé en  $N \times N$  éléments réguliers ( $N = 2$  à 16 par côté, avec deux forces unitaires selon les directions axiales  $Ox$  et  $Oy$ ). Les conditions aux limites sont libres. Toutefois pour éviter les mouvements de corps rigides, le déplacement selon  $Oz$  d'un point (B par exemple) est bloqué. La géométrie, les

caractéristiques mécaniques, les conditions aux limites et les conditions de symétrie sont présentées dans la (figure 11).

Une solution de référence est donnée par (MacNeal *et al.*, 1985) pour le déplacement radial selon l'axe ( $Ox$ ) :  $U_A = -V_B = 0,094 m$ . Les résultats obtenus par le modèle *DMQS* en termes de convergence vers la solution de référence sont représentés dans la (figure 12). Le modèle *DMQS* converge assez rapidement vers la solution de référence et ne présente aucun blocage numérique.

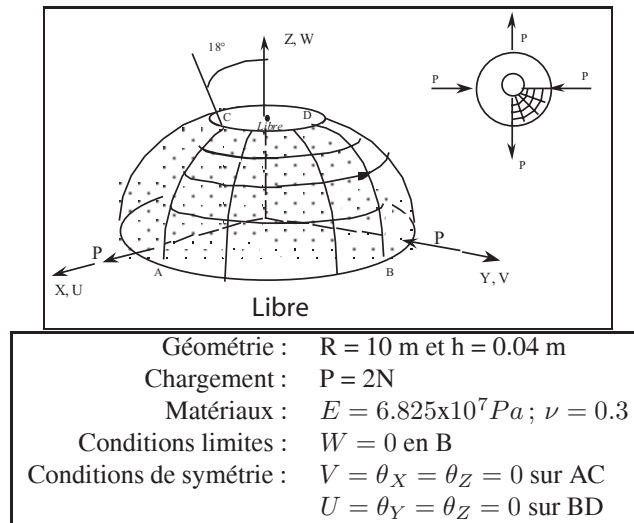


Figure 11. Coque hémisphérique pincée. Données

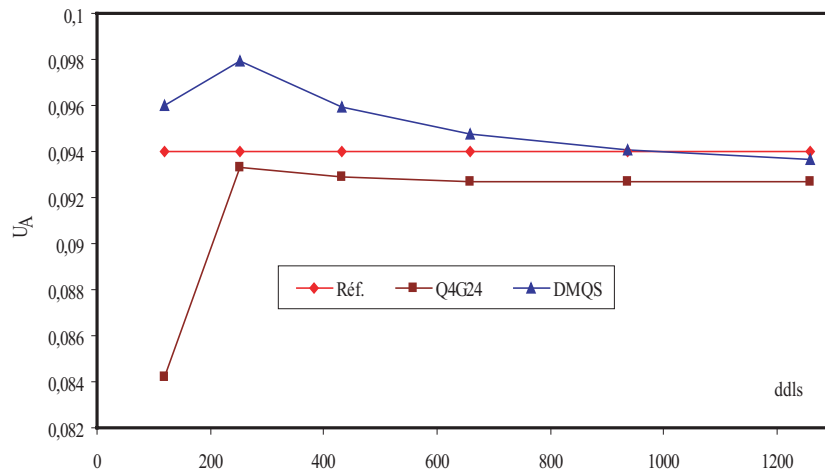


Figure 12. Convergence de  $U_A$ . Coque hémisphérique pincé

## 5. Conclusion

Le modèle d'élément fini de coque courbe DMQS (*Discrete Mindlin Quadrilateral for Shells*) est développé afin d'alimenter les codes de calcul des structures en éléments à géométrie simple, avec un nombre minimum de nœuds et de ddl par nœud, qui soient précis et convergents. Le principal apport du modèle DMQS réside dans la manière de présenter les contributions en flexion et en *CT* au niveau du modèle variationnel. La méthode des déformations de substitution (ANS : *Assumed Natural Strains*) est exploitée dans une première étape comme une hypothèse cinématique discrète de Mindlin. Elle conduit à l'élimination du verrouillage en *CT* sans recourir à l'intégration réduite. La géométrie initiale du modèle – un élément quadratique à huit nœuds – est difficilement exploitable sur le plan pratique, en raison de la présence de quatre accroissements de rotations tangentielles aux milieux des côtés. Nous avons pu introduire une seconde hypothèse de Mindlin qui est mécanique et qui fait intervenir une équation d'équilibre et deux lois de comportement (une en flexion et une autre en *CT*). Une identification par analogie entre les deux hypothèses conduit à éliminer les accroissements de rotation, pour laisser place au nouvel élément fini quadrilatéral à 4 nœuds : DMQS (*Discrete Mindlin Quadrilateral for Shells*). Celui-ci est libre de tout verrouillage en *CT* et en membrane. Il passe les patch-tests de convergence et présente des performances en précision satisfaisantes pour un maillage donné. Il peut être considéré comme une alternative aux éléments de Kirchhoff discrets (sans *CT*), connus pour leur simplicité et leur robustesse. Les travaux, actuellement en cours de développement, concernent la formulation et l'évaluation du modèle DMQS/ml (*ml* : *multilayer*) pour l'analyse statique et dynamique des plaques et des coques stratifiées et sandwichs.

## 6. Références

- Ahmad S., Irons B., Zienkiewicz O., "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 2, p. 419-451, 1970.
- Ayad R., *Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement*, Thèse de doctorat, UTC, 1993.
- Ayad R., "Contribution à la modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non newtoniens. Application à des matériaux d'emballage", *Habilitation à diriger les recherches*, URCA, 2002.
- Ayad R., "Une formulation mixte-hybride naturelle robuste pour la modélisation des coques courbes isotropes", *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 14, n° 1, p. 33-64, 2005.
- Ayad R., Batoz J., Dhett G., "Formulation du modèle MiSP Coque Tridimensionnel Dégénéré", *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 11, n° 6, p. 719-747, 2002.
- Bathe K., Dvorkin E., "A four-node plate bending élément based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation", *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 21, p. 367-383, 1985.
- Bathe K., Dvorkin E., "A formulation of general shell elements-the use of mixed interpolation of tensorial components", *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 22, p. 697-722, 1986.

- Batoz J., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermès, Vol. 3 : Coque, 1992.
- Boisse P., Daniel J., Gelin J., “ A new class of three node and four node shell elements for the finite inelastic strain analysis. Applications in sheet metal forming”, *New Advances in Computational Structural Mechanics*, eds P.Ladevèze & O.C.Zienkiewicz, Elsevier, 1992.
- Cofer W., Will K., “ A three dimensional shell solid transition element for general nonlinear analysis”, *Comput. Struct.*, vol. 38, n° 4, p. 449-462, 1991.
- Dammak F., Abid S., Gakwaya A., Dhat G., “ A formulation of the non linear discrete Kirchhoff quadrilateral shell element with finite rotations et enhanced strains”, *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 14, n° 1, p. 7-31, 2005.
- Dvorkin E., Bathe K., “ A continuum mechanics based four node shell element for general non-linear analysis”, *Eng. Comput.*, vol. 1, p. 77-88, 1984.
- Fezens G., Analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques par éléments finis isoparamétriques tridimensionnels dégénérés, Thèse de doctorat, ENSAE Toulouse, 1981.
- Flügge W., “ Sresses in shells, Springer Verla”, 1960.
- Hughes T., Liu W., “ Nonlinear finite element analysis of shells: Part I: Three dimensional shells. Part II: Two dimensional shells”, *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, vol. 26-27, p. 331-362 et 167-181, 1981.
- Katili I., “ A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields - part I: An extended DKT element for thick-plate bending analysis”, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 36, p. 1859-1883, 1993a.
- Katili I., “ A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields - part II: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis”, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 36, p. 1885-1908, 1993b.
- Kerber T., “ Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verrouillage et de leurs remèdes”, *La Recherche Aérospatiale*, vol. 3, p. 45-79, 1990.
- Kim K., Sung-Cheon H., Songsak S., “ Geometrically non-linear analysis of laminated composite structures using a 4-node co-rotational shell element with enhanced strains”, *International Journal non-linear Mechanics*, 2007.
- Legay A., Combescure A., “ Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS”, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 57, p. 1299-1322, 2003.
- Lemosse D., Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces, Thèse de doctorat, Ecole doctorale SPMI/INSA-Rouen, 2000.
- Lindberg G., Olson M., Cowper G., “ New development in the finite element analysis of shells”, *Q. Bull Div. Mech. Eng. et Nat. Aeronautical Establishment, National Research council of Canada*, 1969.
- Mackerle J., “ Finite- and boundary-element linear and nonlinear analyses of shells and shell-like structures: A bibliography (1999 2001)”, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 38, p. 765-782, 2002.
- MacNeal R., Harder R., “ A proposed standard set of problems to test finite element accuracy”, *Finite Elements Analysis design*, vol. 1, p. 3-20, 1985.
- Parisch H., “ An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element”, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 31, p. 127-150, 1991.

- Ramm E., Matzenmiller A., “ Large deformation shell analysis based on the degeneration concept”, *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, vol. 1, Hughes, Hinton, Eds, p. 365-393, 1986.
- Rammerstofer F., “ Composite and sandwich shells, Lecture in Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements”, *CISM Course, Udine, Italy, June*, 1991.
- Sakami S., Modélisation numérique des matériaux composites multicouches à l'aide d'une approche discrète au sens de Mindlin. Le modèle DDM (Displacement Discrete Mindlin), Thèse de doctorat, URCA, Soutenance 2008.
- Simo J., Fox D., Rifai M., “ Geometrically exact stress resultant shell models: formulation and computational aspects of the nonlinear theory”, *In Analytical and Computational Models of Shells*, (Noor, Belytschko and Simo Eds), ASME, vol. CED-3, p. 161-190, 1989.
- Simo J., Fox D., Rifai M., “ On stress resultant geometrically exact shell model - Part III: Computational aspects on the nonlinear theory”, *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, vol. 79, p. 21-70, 1990.
- Tafla A., Eléments finis mixte-hybrides pour les structures en coques composites multicouches, Thèse de doctorat, URCA, 2007.
- Vlachoutsis S., Eléments finis tridimensionnels dégénérés de coques avec intégration explicite suivant l'épaisseur, Thèse de doctorat, ENSAE - Toulouse, 1987.
- Vlachoutsis S., “ Explicit integration for three dimensional degenerated shell finite elements”, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 29, p. 861-880, 1990.
- Wilt T., Saleeb A., Chang T., “ A mixed element for laminated plates and shells”, *Comput. Struct.*, vol. 37, p. 597-611, 1990.
- Zeng Q., Combescure A., “ A new one-point quadrature, general non-linear quadrilateral shell element with physical stabilization”, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 42, p. 1307-1338, 1998.