
Une méthode de surface de réponse adaptative en fiabilité des structures basée sur la régression pondérée

Xuan Son Nguyen — Alain Sellier — Frédéric Duprat
Gérard Pons

Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions (LMDC)

INSA-UPS Génie Civil

135 Avenue de Ranguei, F-31077 Toulouse cedex 4

{xuan-son.nguyen ; alain.sellier ; frederic.duprat ; gerard.pons} @insa-toulouse.fr

RÉSUMÉ. En fiabilité des structures pour lesquelles la réponse structurale est calculée par éléments finis, le recours à une méthode de surface de réponse est largement utilisé. Typiquement, la surface de réponse est construite à partir d'un polynôme dont les coefficients sont estimés à partir d'une fonction d'état limite implicite numériquement définie en des points de calage. L'emplacement de ces points doit être choisi de façon judicieuse pour minimiser les temps de calcul sans altérer la qualité de l'approximation polynomiale. Pour contribuer au développement de cette méthode, nous proposons ici quelques améliorations. Une construction adaptative des plans d'expérience est exposée. La surface de réponse est calée par la technique de régression pondérée qui permet de pondérer les points de calage selon leurs distances par rapport à la surface de défaillance. Les surfaces de réponse sont choisies de manière évolutive. La méthode proposée permet de minimiser le temps de calcul en assurant la précision des résultats. Des exemples sont présentés pour démontrer l'efficacité et la précision de la méthode.

ABSTRACT. In structural reliability analysis where the structural response is computed from the finite element method, the response surface method is frequently used. Typically, the response surface is built from polynomial whose coefficients are estimated from an implicit limit state function numerically defined at fitting points. The location of these points must be selected in a judicious way in order to minimize computing time without deteriorating the quality of polynomial approximation. To contribute to the development of this method, we propose some improvements here. An adaptive construction of the numerical design is proposed. The response surface is fitted by the regression technique that allows the fitting points to be weighted according to their distance from the true failure surface. The response surface is successively formed in a cumulative manner. This method is aimed to minimize computing time and simultaneously to produce satisfactorily results. The effectiveness and the accuracy of the proposed method can be judged from examples taken in the previous literature.

MOTS-CLÉS : éléments finis, méthodes probabilistes, méthode des surfaces de réponse, régression pondérée.

KEYWORDS: finite elements, probabilistic methods, response surface method, weight regression.

1. Introduction

Actuellement, la méthode des éléments finis est l'outil numérique le plus adapté pour la conception et la requalification des structures de génie civil. Elle permet de discrétiser des équations mécaniques et de tenir compte des comportements non linéaires des matériaux et des structures. Les paramètres d'entrée pour un modèle aux éléments finis ne constituent pas toujours des valeurs certaines en raison des incertitudes qui les affectent. La résistance des matériaux constitutifs des ouvrages, de même que leur géométrie et les actions appliquées à ceux-ci présentent ainsi des écarts aléatoires par rapport aux valeurs de projet. Ceux-ci peuvent être pris en compte par l'application des règlements semi-probabilistes de dimensionnement des ouvrages, tels que les Eurocodes structureaux. Cependant, les dimensionnements ainsi obtenus ne sont pas toujours suffisants pour le concepteur désireux de connaître plus précisément l'influence de l'aléa sur le risque de dysfonctionnement de l'ouvrage. L'analyse probabiliste de la fiabilité des structures apporte alors un élément de réponse en proposant de calculer la probabilité de défaillance d'une structure compte tenu de la variabilité des paramètres. Le recours à l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind est une solution courante pour une mesure approximative de la probabilité de défaillance à un coût numérique réduit. L'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind est par ailleurs la mesure de fiabilité la plus fréquemment utilisée dans les codes de conception et de dimensionnement.

En pratique, l'analyse probabiliste ne peut s'appliquer de façon efficace en termes du temps de calcul qu'à des problèmes physiques dont la modélisation numérique n'entraîne pas de temps de calcul prohibitifs. Parallèlement, on assiste à un développement permanent des modèles non linéaires s'accompagnant d'une inflation des temps CPU. La question du développement d'un outil qui permet de minimiser le temps de calcul pour l'évaluation de l'indice de fiabilité en assurant la précision des résultats reste donc d'actualité.

En fiabilité des structures, le recours à une méthode de surface de réponse est largement utilisé. L'efficacité et l'exactitude de cette méthode dépendent de l'emplacement des points utilisés pour caler la surface de réponse et du temps de calcul. Cet article s'intéresse à des méthodes itératives de surface de réponse dont les formes sont représentées par les polynômes. Une variante de la méthode itérative de surface de réponse est proposée dont l'efficacité est illustrée par comparaison avec des méthodes antérieures.

2. Eléments bibliographiques

Soit $\bar{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ le vecteur aléatoire regroupant n variables aléatoires du problème aux éléments finis (propriétés du matériau, géométrie, chargement, etc.). Une réalisation de ce vecteur aléatoire sera notée \bar{x} . Les composantes de ce vecteur

présentent une densité conjointe de probabilité $f_{\bar{x}}(\bar{x})$ intégrant les éventuelles dépendances statistiques entre les variables. Pour chaque mode de défaillance de la structure, une fonction d'état limite $G(\bar{X})$ est définie dans l'espace des variables aléatoires. L'ensemble des variables pour lequel $G(\bar{X}) > 0$ représente le domaine de sûreté. L'ensemble des variables pour lequel $G(\bar{X}) \leq 0$ représente le domaine de défaillance. La frontière $G(\bar{X}) = 0$ est la surface d'état limite.

La probabilité de défaillance P_f est définie par :

$$P_f = P[G(\bar{X}) \leq 0] = \int_{G(\bar{X}) \leq 0} f_{\bar{x}}(\bar{x}) dx_1 \dots dx_n \quad [1]$$

Cette intégrale est difficilement calculable en pratique. En effet, d'une part, la densité conjointe n'est pas toujours de forme intégrable analytiquement lorsqu'elle est disponible, d'autre part, le calcul n'est pas possible explicitement lorsque le domaine de défaillance est défini implicitement. Le cas le plus courant est celui où $G(\bar{X})$ ne peut être évaluée que ponctuellement par une méthode numérique aux éléments finis.

Pour calculer P_f , on peut alors recourir aux simulations de Monte-Carlo (Melchers, 1999 ; Rubinstein, 1981) ou à des méthodes approchées qui sont basées sur la notion d'indice de fiabilité β comme l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind (Hasofer et Lind, 1974), d'utilisation fréquente. Cet indice est défini dans un espace où les variables aléatoires sont transformées en variables normales centrées réduites et stochastiquement indépendantes, appelé espace standardisé. β est défini comme la distance minimale de l'origine de cet espace à un point de la surface d'état limite, dit point de conception et noté P^* . L'indice β peut être déterminé par n'importe quel algorithme de minimisation sous contrainte, comme par exemple l'algorithme de Rackwitz-Fiessler (Rackwitz, 1978). On peut trouver le détail des méthodes et algorithmes utilisés en fiabilité des structures dans un rapport bien documenté sur l'état de l'art (Sudret et Der Kiureghian, 2000).

Parmi les méthodes disponibles pour estimer l'indice de fiabilité, la méthode de surface de réponse (MSR) est un outil puissant (Faravelli, 1989 ; Bucher et Bourgund, 1990 ; Lemaire, 1998). L'idée de la MSR est d'approcher la fonction d'état limite implicite $G(\bar{X})$ estimée ponctuellement par la méthode des éléments finis par une fonction $\tilde{G}(\bar{X})$ équivalente en termes de réponse, explicite et simple à manipuler. Cette fonction utilisée à la place du modèle complexe qu'elle remplace permet un gain de temps de calcul appréciable. Néanmoins, l'exactitude et la précision des résultats obtenus en fiabilité dépendent de la qualité d'approximation de la fonction d'état limite. Les paramètres de la fonction approchée sont calés par une technique de régression à partir d'un nombre minimum de points où la fonction d'état limite $G(\bar{X})$ est effectivement évaluée. L'ensemble de ces points constitue le plan d'expérience (PE). La qualité de la surface de réponse (SR) obtenue repose

essentiellement sur le choix des points du PE. De nombreuses méthodes ont été développées permettant de choisir ces points pour des modèles physiques particuliers, notamment par (Draper et Smith, 1981 ; Box et Draper, 1987 ; Atkinson et Donev, 1992 ; Dreesbeke *et al.*, 1994 ; Benoist *et al.*, 1994). Ces méthodes permettent de construire un PE optimal à partir d'une forme choisie de la SR. Toutefois la difficulté pratique de ces méthodes est qu'il est difficile de valider le choix de la forme de la SR et d'autre part, leur application aux modèles numériquement définis par points n'est pas immédiate. De ce fait, dans les travaux antérieurs concernant les SR, les points du PE et la forme de la fonction approchée sont choisis de plusieurs manières par les différents chercheurs.

Wong (1985) a utilisé le plan d'expérience dit « plan factoriel » qui contient 2^n points. L'auteur a sélectionné des valeurs symétriques autour de la moyenne à une distance d'un écart type. Le nombre de points de calage augmente rapidement avec le nombre de variables aléatoires n .

Pour réduire le nombre de points de calage dans le cas où n est grand, Bucher et Bourgund (1990) ont proposé une approche itérative des surfaces de réponse pour l'analyse de fiabilité. Un polynôme du second degré sans termes mixtes, qui est défini par $(2n+1)$ coefficients, a été utilisé comme fonction approchée de la SR. Dans la première étape, le point moyen est choisi comme point central du PE. Les points de calage sont choisis de part et d'autre le long des axes à une distance de quelques multiples de l'écart type des variables aléatoires. A partir de cette première SR, un premier point de conception P^* est déterminé. Puis, un nouveau point central est obtenu par interpolation linéaire entre l'ancien point central et P^* . Une seconde SR est ensuite générée autour du nouveau point central. Au total, cette approche requière $(4n+3)$ évaluations de la fonction d'état limite. Les auteurs proposent de réactualiser la SR une fois, toutefois plusieurs cycles de mise à jour des coefficients de la SR peuvent être nécessaires pour obtenir une plus grande précision.

Muzeau (Muzeau *et al.*, 1993) a proposé un algorithme de surface de réponse quadratique où des SR polynomiales sont construites dans l'espace gaussien. La caractéristique principale de cet algorithme réside dans le choix du PE qui est basé sur la constatation que la région de probabilité de défaillance maximale est approchée lorsque les valeurs des variables de résistance décroissent et que celles de sollicitation croissent.

Rajashekhar et Ellinwood (1993) ont proposé d'améliorer l'approche de Bucher et Bourgund, en particulier en itérant la construction de la SR jusqu'à une convergence satisfaisante sur la position des points de conception successifs. Des termes mixtes ont été également introduits dans l'expression de la SR quadratique retenue pour leur étude. Par conséquent, de meilleurs résultats en termes de précision ont été obtenus dans les exemples numériques, au détriment du temps de calcul malheureusement.

Enevoldsen (Enevoldsen *et al.*, 1994) a proposé un algorithme dans l'espace standardisé appelé ARERSA (*Adaptive Reliability Estimation Response Surface*

Algorithm). Cet algorithme utilise des surfaces de réponse polynomiales de degré deux avec termes mixtes et un plan d'expériences composite centré. La région de défaillance la plus probable est dans un premier temps déterminée par une phase de recherche globale. Puis une SR plus précise est construite au voisinage du point de conception par une phase de recherche locale. Ensuite, les méthodes FORM et SORM sont utilisées pour estimer la fiabilité. Une procédure de contrôle des points du PE est appliquée dans chaque phase, conduisant à un meilleur choix des points mais également à une réitération initiale des phases en cas de non-conformité aux critères choisis.

Devictor (Devictor *et al.*, 1997) a proposé un algorithme dit RSAED (*Response Surface with Adaptive Experimental Design*) qui utilise des surfaces de réponse dans l'espace standardisé. Cet algorithme tient en compte de l'influence de la transformation stochastique sur le PE. Une base de données est jointe pour stocker les calculs mécaniques déjà effectués. Cette base de données permet de réutiliser les points précédents afin de réduire le nombre de calculs mécaniques. Des indicateurs sont introduits pour tester la qualité du PE et de la SR. RSAED permet d'étudier la géométrie de la SR au voisinage du point de conception pour valider les résultats de FORM et SORM.

Partant des méthodes proposées dans (Wong, 1985 ; Bucher et Bourgund, 1990) et (Rajashekhara et Ellinwood, 1993), Kim et Na (1997) ont observé que les points de calage sont choisis autour d'un point particulier (par exemple la moyenne du vecteur aléatoire) sans considération sur l'orientation vers la vraie surface de défaillance. Ces auteurs ont proposé une MSR améliorée utilisant la technique du gradient projeté pour choisir les points de calage des itérations successives. Cette méthode permet d'assurer la proximité à la vraie surface de défaillance des points de calage. Ils ont eu recours, dans leur approche, à une SR linéaire qui ne reflète pas toujours exactement la vraie surface de défaillance.

Reprenant les principes de Kim et Na, Das et Zheng (2000) ont proposé une SR cumulative. Une première SR linéaire est formulée pour déterminer le point de conception. La technique du gradient projeté est alors utilisée pour générer les points de calage. Puis dans un deuxième calage, la SR linéaire est enrichie des termes quadratiques. Les points de calages définissant la surface linéaire sont réutilisés pour la surface quadratique. Les points complémentaires sont générés autour du point P^* de la surface linéaire. Des termes mixtes peuvent être ajoutés dans la SR si nécessaire.

Gayton (Gayton *et al.*, 2003) a proposé une MSR quadratique dite méthode CQ2RS (*Complete Quadratic Response Surface with ReSampling*). Cette méthode est basée sur une approche statistique qui consiste à considérer l'estimation des coordonnées du point de conception P^* comme une variable aléatoire, dont chaque réalisation résulte d'une nouvelle itération du PE. Un intervalle de confiance est affecté à la valeur moyenne de l'estimation. La largeur de cet intervalle est prise comme critère d'arrêt des itérations du PE. Le premier plan d'expérience est un plan

factoriel construit à partir d'une préréduction du domaine de recherche du point P^* . Grâce à cette démarche, le coût de calcul peut être réduit.

Comme Das et Zheng, Kaymaz et McMahon (2004) ont utilisé une SR linéaire pour la première itération et une surface quadratique sans termes mixtes pour les itérations suivantes. Les points de calage sont générés à partir du point central. Ils sont choisis dans la région où le point de conception se situe le plus probablement, en fonction de l'évaluation du signe des variables aléatoires. Les points de calage définissant la surface linéaire sont réutilisés pour la surface quadratique. Les coefficients de la SR sont déterminés par la méthode de régression pondérée. Un système particulier de pondération sur les valeurs de la fonction d'état limite est utilisé qui permet de pénaliser les points de calage éloignés de la vraie surface d'état limite et de donner plus d'importance aux points les plus proches de cette surface.

Récemment, Duprat et Sellier (2006) ont proposé une MSR quadratique adaptative, tenant compte, d'une itération à l'autre du plan d'expérience, de la position du point de conception P^* par rapport aux autres points. Tant que le point P^* est extérieur au plan d'expérience, celui-ci est recentré sur P^* , selon un maillage conditionné par la sensibilité de la SR aux variables portées par les différents axes. Sur ce maillage les points sont positionnés vers la zone de défaillance. Dès que le point P^* est intérieur au plan d'expérience, tous les points situés du côté de la défaillance sont conservés, tandis que les nouveaux points sont les symétriques des anciens points par rapport à P^* . A partir d'un premier plan d'expérience judicieusement choisi, cette méthode permet une convergence rapide vers le point P^* « exact ».

3. Principe de la méthode proposée

La méthode que nous proposons a pour point de départ la méthode Kaymaz et McMahon et a pour but d'augmenter la précision des résultats en minimisant le coût de calcul. Les caractéristiques principales de la MSR proposée résident dans le choix du PE, le choix de l'expression de la SR et la détermination des coefficients de cette surface. La SR proposée est construite dans l'espace des variables standardisées en deux temps, prenant tout d'abord une forme linéaire, puis une forme quadratique avec termes mixtes.

3.1. Choix de la forme de la surface de réponse

Une forme polynomiale a été retenue dans notre étude. Il ne s'agit pas de la seule forme possible : les fonctions splines et les réseaux de neurones sont par exemple des formes utilisées. L'expérience montre que les SR polynomiales sont très efficaces en particulier lorsqu'un schéma constructif itératif est envisagé. Elles

présentent également l'avantage d'être d'une manipulation relativement aisée. Elles ont aussi été largement utilisées par de nombreux auteurs.

La forme de la SR est choisie de manière cumulative. Pour la première itération, on choisit une surface de réponse linéaire (SRL) :

$$\tilde{G}(\bar{U}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i U_i \quad [2]$$

Le nombre de coefficients à déterminer est de $(n+1)$. Pour les itérations suivantes, les termes quadratiques et les termes mixtes sont ajoutés (surface de réponse quadratique : SRQ) :

$$\tilde{G}(\bar{U}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i U_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} U_{ii}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} U_i U_j \quad [3]$$

Le nombre de coefficients à déterminer est de $(n+1)(n+2)/2$.

3.2. Choix du PE adaptatif

Du choix des points de calage dépend la qualité de l'approximation polynomiale de la SR. Le PE doit donc être constitué avec une attention particulière. La méthode que nous proposons ici s'inspire des travaux de (Bucher et Bourgund, 1990 ; Muzeau *et al.*, 1993 ; Duprat et Sellier, 2006). Ce choix est basé sur la constatation que la région de maximum de probabilité de défaillance est approchée lorsque les valeurs des variables de résistance diminuent par rapport à leur valeur moyenne et que celles des sollicitations augmentent.

Le PE est construit à partir du point central P_c (image des médianes des variables aléatoires dans l'espace standardisé). Les points de calage du PE sont générés en parcourant les axes. Sur chaque axe, on génère un seul point choisi du côté de la surface de défaillance. On génère ainsi $(n+1)$ points (voir la figure 1).

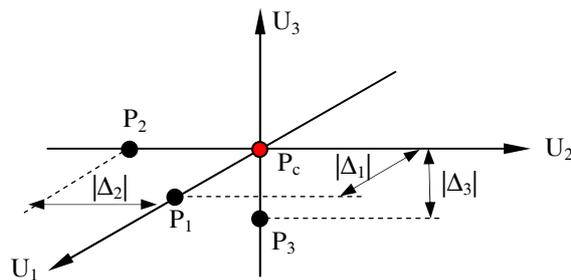


Figure 1. Construction du plan d'expérience

Pour le premier plan d'expérience destiné à caler les coefficients de la SRL, la distance algébrique Δ_i séparant les points P_i générés sur l'axe i est choisie arbitrairement égale à Δ_0 distance de base. Pour les plans suivants, Δ_i est définie à partir de la distance Δ_0 et en fonction des dérivées partielles de l'approximation $\tilde{G}(\bar{U})$ au point P_c :

$$\Delta_i = \Delta_0 \left(\frac{-1}{\|grad(\tilde{G}(\bar{U}))\|} \frac{\partial \tilde{G}(\bar{U})}{\partial U_i} \right) \quad [4]$$

Ce choix assure que les points de calage sont du côté de la surface de défaillance (par rapport au point central) et à une distance proportionnelle à la sensibilité locale du modèle par rapport à la variable considérée. En effet si la dérivée partielle de $\tilde{G}(\bar{U})$ par rapport à une variable est positive, alors la distance Δ_i est négative de façon à caler la SRQ dans une zone où la valeur de la fonction d'état limite est faible, voire négative. La distance de base Δ_0 peut être choisie dans l'intervalle $1 \leq \Delta_0 \leq 2,5$.

Le nombre de points du PE, permettant de déterminer les coefficients de la SR par la méthode de régression, doit être supérieur ou égal au nombre de coefficients. Dans le premier PE destiné au calage de la SRL, il suffit d'un point par axe et du point central. Tous ces points sont conservés pour construire la SRQ. Pour caler la SRQ, il faut au moins $(n+1)(n+2)/2$ points. Les points complémentaires sont alors $(n+1)(n+2)/2 - (n+1)$. Ces points sont générés à partir du nouveau point central P_M obtenu avec la SRL (voir le calcul des coordonnées du point P_M dans la section 3.4 suivante). D'abord $(n+1)$ points sont générés autour du point P_M . Ensuite, les points manquants sont générés à partir de ces derniers points en parcourant les axes dans l'ordre décroissant des valeurs absolues des composantes du gradient dans le but d'améliorer l'approximation de $\tilde{G}(\bar{U})$ selon les axes de plus forte sensibilité. Lorsque le nombre de points nécessaires est atteint, les coefficients de la SRQ peuvent être évalués. La figure 2 est un exemple de cette démarche pour le cas de trois variables aléatoires. On suppose ici :

$$\left| \frac{\partial \tilde{G}}{\partial U_1} \right| > \left| \frac{\partial \tilde{G}}{\partial U_2} \right| > \left| \frac{\partial \tilde{G}}{\partial U_3} \right| \quad [5]$$

On se place donc sur l'axe U_1 au point P_4 . Deux points sont générés en parcourant successivement les axes U_2 et U_3 à partir de P_4 et en sens et intensité donnés par [4]. Les points générés sont P_7 et P_8 sur la figure 2. La procédure est reconduite ensuite à partir du point P_5 , et ainsi de suite. On montre aisément que la procédure fournit toujours assez de points complémentaires dès que le nombre de variables aléatoires est supérieur ou égal à trois.

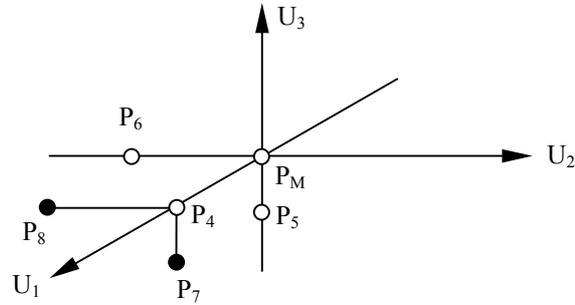


Figure 2. Construction du plan d'expérience : points complémentaires

3.3. Détermination des coefficients de la surface de réponse

Dans les MSR classiques, les coefficients de la SR sont déterminés par la méthode de moindres carrés (Saporta, 1990). Le vecteur des coefficients est alors obtenu par résolution du système linéaire [6] :

$$\bar{a} = (M_U^T M_U)^{-1} M_U^T \bar{y} \quad [6]$$

où \bar{a} est un vecteur dont les composantes sont les coefficients de la SR, M_U est une matrice concernant tous les points du PE dont chaque ligne est constituée des monômes issus des coordonnées d'un point du PE $\{1, U_1, \dots, U_n\}$, dans le cas d'une SRL et $\{1, U_1, \dots, U_n, U_1^2, \dots, U_n^2, \dots, U_i U_j\}$ avec $i, j = \{1, \dots, n\}$ et $i \neq j$ dans le cas d'une SRQ, M_U^T est la matrice transposée de la matrice M_U et \bar{y} est le vecteur des valeurs de la fonction d'état limite aux différents points du PE. Cette méthode donne des poids égaux aux points utilisés pour caler les coefficients du polynôme formé. Une meilleure SR peut néanmoins être obtenue en affectant des poids plus grands aux points les plus proches de la surface de défaillance. C'est pourquoi, Kaymaz et McMahon ont introduit l'utilisation de la méthode de régression pondérée pour déterminer les coefficients de la SR qui sont alors obtenus par [7]:

$$\bar{a} = (M_U^T W M_U)^{-1} M_U^T W \bar{y} \quad [7]$$

W est la matrice diagonale des poids. Les poids sont pondérés sur les valeurs de la fonction d'état limite. Ces auteurs proposent de déterminer les poids en fonction de la valeur de la fonction d'état limite par l'expression suivante :

$$w_{Gk} = \exp \left[- \frac{G(\bar{u}_k) - y_{\min}}{y_{\min}} \right] \quad [8]$$

où y_{\min} est la valeur minimale des valeurs de la fonction d'état limite $G(\bar{u}_k)$ aux points du PE. Les points éloignés de la surface d'état limite sont alors pénalisés. La SR ainsi formée peut se trouver à une très bonne proximité de la surface de défaillance. Néanmoins, cette méthode peut conduire à des erreurs numériques si un point du PE se trouve très proche de la surface de défaillance, pour lequel $y_{\min} \approx 0$, conduisant alors à un système linéaire mal conditionné. C'est pourquoi dans ce travail, nous proposons d'utiliser simultanément deux systèmes de pondération parallèles : l'un sur les valeurs de la fonction d'état limite et l'autre sur la distance entre le point de conception P^* (approché à partir de la SRL ou SRQ précédente si l'on se place dans un contexte de recalage d'amélioration itérative de la qualité de la SRQ) et les points du PE.

Le système de pondération des valeurs de la fonction d'état limite a toujours pour but de pénaliser des points éloignés de la surface de défaillance. Ce système a le même objectif que celui proposé par Kaymaz et McMahon mais la forme de la fonction diffère légèrement pour éviter le risque de mauvais conditionnement mentionné précédemment, y_{\min} est pour cela remplacée par $G(\bar{u}_0)$, il vient :

$$w_{Gk} = \exp \left[-\frac{G(\bar{u}_k) - y_{\min}}{G(\bar{u}_0)} \right] \quad [9]$$

où $G(\bar{u}_0)$ est la valeur de la fonction d'état limite à l'origine de l'espace standardisé.

Le second système de pondération que nous proposons d'utiliser ici prend en compte les distances des points du PE par rapport au point P^* . Il a pour but de pénaliser des points éloignés du précédent point de conception P^* estimé :

$$w_{dk} = \exp \left(-\frac{d_k^2}{2} \right) \quad [10]$$

où d_k est la distance entre le point P^* et un point P_k du PE.

Finalement, les facteurs de pondération pour la matrice W dans l'équation [7] sont :

$$w_{Tk} = w_{Gk} \times w_{dk} \quad [11]$$

3.4. Organigramme général de la méthode proposée

1) Construction du premier plan d'expérience (PE) :

Les points de calage sont générés à partir du point initial \bar{u}_0 (origine de repère standard), voir la section 3.2. On génère ainsi $(n+1)$ points à la distance $+\Delta_0$ si la

variable aléatoire est défavorable (variable de type sollicitation) et $-\Delta_0$ si elle est favorable (variable de type résistance) par rapport à la fonction d'état limite.

Le choix du rôle d'une variable (résistance ou sollicitation) est effectué à partir de son influence sur le modèle physique. Dans le cas où il est difficile de savoir le rôle d'une variable, on peut recourir à une analyse de sensibilité, telle que celle proposée dans (Gayton *et al.*, 2003).

2) Calcul des réponses de la fonction d'état limite pour chaque point du PE :

$$y_k = G(\bar{u}_k), k = \{1, \dots, n+1\} \quad [12]$$

3) Calcul des pondérations sur les valeurs de la fonction d'état limite d'après [9].

4) Calcul de la SRL (coefficient de la fonction [2]) avec l'expression [7].

5) Calcul d'une première approximation de l'indice de fiabilité β et du point de conception P^* (coordonnées \bar{u}_D).

6) Construction du PE complémentaire à partir du nouveau point central P_M (coordonnées \bar{u}_M) :

$$\bar{u}_M = \bar{u}_0 + (\bar{u}_D - \bar{u}_0) \frac{G(\bar{u}_0)}{G(\bar{u}_0) - G(\bar{u}_D)} \quad [13]$$

où $G(\bar{u}_D)$ est la valeur de la fonction d'état limite au point de conception P^* .

Tous les points de l'ancien PE sont conservés dans le nouveau PE. Le point P^* est ajouté dans le nouveau PE si P^* n'est pas très éloigné de P_M , c'est-à-dire si $\|P^*P_M\| \leq \Delta_0$ (condition notée Co par la suite). Les points complémentaires pour construire la SRQ sont générés comme indiqué en section 3.2. Le nombre total de points du PE est $(n+1)(n+2)/2$.

7) Calcul des réponses de la fonction d'état limite aux nouveaux points du PE :

$$y_k = G(\bar{u}_k), k = \{n+2, \dots, (n+1)(n+2)/2\} \quad [14]$$

8) Calcul des poids sur les valeurs de la fonction d'état limite selon [9] et sur les distances entre P^* et les points du PE selon [10]. La pondération sur le premier point P^* n'est toutefois applicable que si la condition Co est remplie. Sinon, il est probable que la première estimation de P^* soit trop grossière. Dans ce cas, on utilise le point P_M .

9) Détermination des coefficients de la SRQ selon [7].

10) Calcul de l'indice de fiabilité β et du point de conception P^* .

11) Vérification du critère de convergence sur deux valeurs de β et sur deux points P^* successifs :

$$\begin{cases} |\beta_m - \beta_{(m-1)}| \leq \varepsilon_\beta \\ \|P_m^* P_{(m-1)}^*\| \leq \varepsilon_p \end{cases} \quad [15]$$

où ε_β et ε_p sont les précisions choisies par l'utilisateur et m le numéro de l'itération.

Le critère de proximité entre deux points de conception successifs permet de s'assurer que les deux dernières surfaces de réponse traduisent convenablement le comportement de la fonction d'état limite exacte au voisinage de la défaillance. Si ce critère est vérifié, le calcul s'arrête. Sinon, on conserve tous les points du PE précédent et on ajoute le dernier point P^* pour le nouveau PE et le calcul se répète sur les étapes 8 à 11 jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait.

En général, pour éviter le mauvais conditionnement du système linéaire [7], on utilise en régression plus de points que le nombre de coefficients inconnus. Dans la méthode proposée, on souhaite limiter volontairement le nombre de points du PE afin de réduire autant que possible le nombre de calculs de la fonction d'état limite. Ainsi, lors de la première itération, il est nécessaire de veiller au bon conditionnement de la matrice d'information ($M_U^T W M_U$) du système linéaire [7], ce qui constitue une contrainte supplémentaire lors du choix des premiers points du PE. En cas de mauvais conditionnement, un plan de départ différent doit être proposé.

La qualité de la SR peut être estimée par l'analyse de la variance (Box et Draper, 1987 ; Benoit *et al.*, 1994). Dans cet article, nous utilisons une mesure globale de la corrélation entre les réponses du modèle et les calculs, qui est définie par :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (\tilde{G}(\bar{u}_k) - y_k)^2}{\sum_{k=1}^N (\underline{y} - y_k)^2} \quad [16]$$

où $\tilde{G}(\bar{u}_k)$ est la valeur calculée de la réponse par la SR, y_k la réponse du modèle, \underline{y} la moyenne des réponses du modèle et N le nombre de points dans le PE.

Plus la valeur de R^2 est proche de 1, plus la qualité de SR est bonne. Si sa valeur est inférieure à 0,9, la qualité de SR doit être améliorée, sinon on peut considérer qu'elle est une approximation satisfaisante du modèle.

Cet algorithme a été programmé dans le logiciel Castem 2000 (<http://www-cast3m.cea.fr>).

4. Comparaison de la méthode proposée avec les méthodes antérieures

La comparaison est établie avec les travaux des auteurs précédemment cités, ainsi qu'avec ceux d'autres auteurs retenus pour l'efficacité des méthodes de surface de réponse qu'ils présentent, et/ou la justesse de l'indice de fiabilité obtenu sur des exemples communs de validation. Les critères de comparaison entre les différentes méthodes sont, lorsqu'ils sont disponibles, la valeur de l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind, les coordonnées du point de conception P^* , la valeur de la fonction d'état limite au point P^* $G(\bar{u}^*)$ qui vaut zéro si P^* se trouve exactement sur la surface de défaillance et le nombre de calculs de la fonction d'état limite N_e (indicateur du temps de calcul associé à la méthode). L'ensemble des critères n'est pas toujours disponible selon les références considérées. La méthode que nous proposons est appelée par la suite la méthode SRDP (Surface de Réponse à Double Pondération). Dans chaque exemple, la valeur de la statistique R^2 est déterminée pour la dernière itération de la SR de la méthode SRDP.

4.1. Exemple 1

Une fonction d'état limite non linéaire est considérée :

$$G = 7 + U_1 + U_2 + U_3 - U_2^2 + U_3^2 - U_1U_2 + U_1U_3 \quad [17]$$

dans laquelle toutes les variables aléatoires ont une distribution normale standard. Les résultats sont présentés dans le tableau 1. Les résultats de référence sont donnés dans (Das et Zheng, 2000). La valeur de G au point moyen est 7,00. Cinq itérations de construction du PE sont nécessaires pour la méthode présentée dans (Das et Zheng, 2000). On peut observer que la méthode SRDP fournit une valeur de l'indice de fiabilité assez proche de celle obtenue par la méthode de Monte-Carlo et par (Das et Zheng, 2000). La valeur de la fonction d'état limite au point de conception P^* obtenu par la SRDP est 0,132, ce qui signifie que ce dernier se trouve très proche de la surface de défaillance.

Référence/Méthode	β	U_1^*	U_2^*	U_3^*	$G(\bar{u}^*)$	N_e
Monte-Carlo	2,038	indis.	indis.	indis.	indis.	1 000 000
Das et Zheng						
– sans terme mixte	1,871	indis.	indis.	indis.	indis.	indis.
– avec terme mixte	1,919	indis.	indis.	indis.	indis.	indis.
SRDP ($R^2=1$)	1,907	-0,913	-1,667	-0,1584	0,132	14

Tableau 1. Résultat de l'exemple 1

Référence/ Méthode	$\tilde{G}(\bar{U})$
Das et Zheng	$7,000 + 1,000U_1 + 1,000U_2 + 0,999U_3 + 1,049 \times 10^{-5}U_1^2$ $-0,999U_2^2 + 0,999U_3^2 - 0,999U_1U_2 + 0,999U_1U_3$
SRDP	$7,000 + 1,000U_1 + 1,000U_2 + 1,000U_3 + 4,36 \times 10^{-13}U_1^2$ $-1,000U_2^2 + 1,000U_3^2 - 1,000U_1U_2 + 1,000U_1U_3 - 2,32 \times 10^{-11}U_2U_3$

Tableau 2. Coefficients de la surface de réponse - Exemple 1

Les expressions de la SR $\tilde{G}(\bar{U})$ obtenue par (Das et Zheng, 2000) et par la SRDP sont portées dans le tableau 2. On constate la bonne proximité de la SRDP avec la vraie fonction d'état limite. Le nombre de calculs de la fonction d'état limite n'est pas précisé dans (Das et Zheng, 2000). Cependant, ce nombre atteint 14 après seulement 2 itérations alors que 5 itérations sont nécessaires. Cela conduit à un nombre total supérieur à celui requis par la méthode SRDP.

4.2. Exemple 2

Cet exemple a d'abord été analysé par (Kim et Na, 1997) et puis par (Kaymaz et McMahon, 2004 ; Elegbede, 2005 ; Duprat et Sellier, 2006). La fonction d'état limite est définie par :

$$G = \exp[0,4(U_1 + 2) + 6,2] - \exp[0,3U_2 + 5] - 200 \quad [18]$$

Toutes les variables aléatoires ont une distribution normale standard.

Les résultats sont donnés dans le tableau 3. La valeur de G au point moyen est 748,2. Les résultats obtenus par tirages de Monte Carlo adaptatifs sont donnés dans (Kaymaz et McMahon, 2004). On constate que les valeurs de l'indice de fiabilité sont très proches les unes des autres pour toutes les méthodes. De même, les valeurs de G au point P* sont très voisines de zéro et traduisent la proximité de ce point avec la surface de défaillance, sauf dans le cas de la méthode proposée par (Kaymaz et McMahon, 2004). Par rapport à cette méthode, qui apparaît comme la moins coûteuse, la méthode SRDP est bien plus précise, sans pour autant que le nombre d'appels au calcul de G n'augmente significativement.

La dernière SR obtenue par la méthode SRDP pour estimer l'indice de fiabilité β_{HL} a pour expression :

$$\tilde{G}(\bar{U}) = 725,18 + 371,09U_1 - 36,288U_2 + 40,529U_1^2 - 10,347U_2^2 + 0,21912U_1U_2 \quad [19]$$

Comme illustré sur la figure 3, cette SR se confond presque exactement avec la vraie surface de défaillance, en particulier au voisinage du point de conception P^* .

Référence/Méthode	β	U_1^*	U_2^*	$G(\bar{u}^*)$	N_e
Adaptive Monte Carlo Simulation ¹	2,710	-2,531	0,969	$-2,515 \times 10^{-2}$	indis.
Kim et Na	2,691	indis.	indis.	indis.	indis.
Kaymaz et McMahon	2,687	-2,558	0,820	4,371	8
Elegbede	2,710	-2,548	0,923	$-5,224 \times 10^{-3}$	69300
Duprat et Sellier	2,710	-2,538	0,951	$-7,035 \times 10^{-2}$	21
SRDP ($R^2 = 0,9988$)	2,709	-2,574	0,846	$4,602 \times 10^{-1}$	15

Tableau 3. Résultats de l'exemple 2

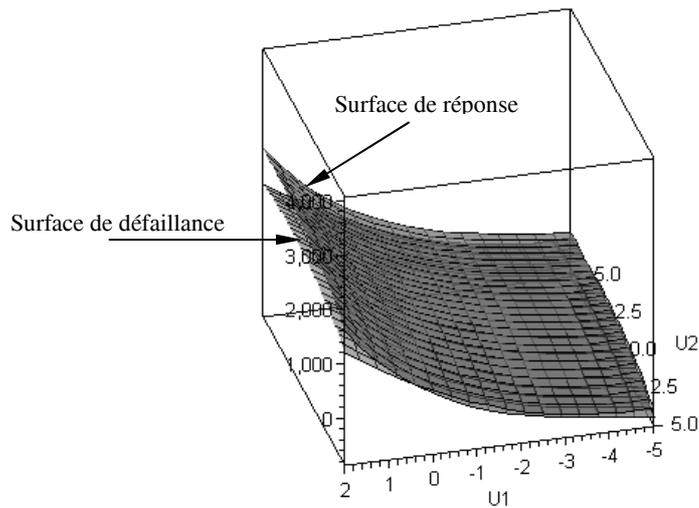


Figure 3. Surface de défaillance et surface de réponse - Exemple 2

1. Cette méthode est une implémentation spécifique de la méthode de tirage d'importance dans le logiciel COMREL.

4.3. Exemple 3

Cet exemple proposé par (Wu *et al.*, 1987) est issu d'un problème de répartition de contraintes dans un assemblage soumis à de grandes températures et des phénomènes de fatigue. La fonction d'état limite est fortement non linéaire :

$$G(\bar{X}) = X_1 - 10^4 \left[\frac{X_2 (X_4 X_5)^{1,71}}{X_3} + \frac{(1 - X_2)(X_4 X_5)^{1,188}}{X_6} \right] \quad [20]$$

Les caractéristiques des six variables aléatoires sont données dans le tableau 4. Les résultats sont présentés dans le tableau 5 et le tableau 6. Les résultats de référence sont donnés dans (Devictor, 1996). La valeur de la fonction d'état limite au point moyen est 0,724. Les valeurs de l'indice β obtenues par les méthodes comparées sont très similaires. La SRDP est la méthode la plus efficace en termes de nombre d'appels au calcul de la fonction d'état limite.

Variable	Distribution	Moyenne	Ecart-type
X ₁	Lognormale	1,0440	0,31320
X ₂	Normale	0,7000	0,07000
X ₃	Lognormale	0,2391	0,09564
X ₄	Lognormale	1,0110	0,15165
X ₅	Gumbel Max	0,0005	0,00008
X ₆	Lognormale	1,8020	0,72080

Tableau 4. Caractéristique des variables aléatoires de l'exemple 3

Référence/Méthode	β	$G(\bar{u}^*)$	N _e
SORM	2,339	indis.	84
Wu <i>et al.</i>	2,338	indis.	indis.
Devictor	2,385	3,3x10 ⁻⁴	233
SRDP (R ² = 0,9999)	2,387	3,8x10 ⁻⁴	32

Tableau 5. Résultats de l'exemple 3

Référence/Méthode	U ₁ [*]	U ₂ [*]	U ₃ [*]	U ₄ [*]	U ₅ [*]	U ₆ [*]
Devictor	-1,249	-0,655	-0,283	0,831	1,010	-1,382
SRDP	-1,267	-0,653	-0,311	0,894	0,922	-1,386

Tableau 6. Résultats de l'exemple 3 - Coordonnées du point P*

4.4. Exemple 4

Cet exemple, analysé par (Gayton *et al.*, 2003), concerne la résistance au voilement d'un cylindre nervuré sous pression externe. La fonction d'état limite prend l'expression suivante :

$$G = p_n(e, L_s, h_w, e_w, w_f, e_f, E) - p_0 \quad [21]$$

où $p_0 = 7038675$ Pa est la pression hydrostatique externe et p_n est la pression élastique de voilement.

$$p_n = \frac{Ee}{R \left[n^2 - 1 + 0,5 \left(\frac{\pi R}{L_c} \right)^2 \right] \left[n^2 \left(\frac{L_c}{\pi R} \right)^2 + 1 \right]} + \frac{n^2 - 1}{R^3 L_s} EI_c$$

avec :

$$I_c = \frac{e^3 L_e}{3} + I_s + A_s \left(\frac{e}{2} + R - R_s \right)^2 - A_c X_c^2$$

$$L_e = R \frac{1,56 \sqrt{\frac{e}{R}}}{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{n^4}{2} \left(\frac{e}{R} \right)^2} + \frac{n^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{e}{R} \right)}}$$

$$I_s = \frac{e_w h_w^3}{12} + e_w h_w \left(R - \frac{e + h_w}{2} - R_s \right)^2 + \frac{w_f e_f^3}{12} \left(R - h_w - \frac{e_f + e}{2} - R_s \right)^2$$

$$A_s = e_w h_w + w_f e_f$$

$$A_c = A_s + e L_e$$

$$X_c = \frac{1}{A_c} \left(\frac{e^2}{2} L_e + A_s \left[\frac{e}{2} + R - R_s \right] \right)$$

$$R_s = \frac{1}{A_s} \left[h_w e_w \left(R - \frac{e + h_w}{2} \right) + w_f e_f \left(R - h_w - \frac{e_f + e}{2} \right) \right]$$

$$n = 2; L_c = 15m; R = 2,488m$$

Les caractéristiques des variables aléatoires sont représentées dans le tableau 7. Les résultats sont donnés dans le tableau 8 et le tableau 9. La valeur de la fonction d'état limite au point moyen est 479545 Pa. Les résultats de référence sont donnés dans (Gayton *et al.*, 2003). Les résultats obtenus par les deux méthodes comparées

sont similaires. La proximité du point P^* à la surface de défaillance est satisfaisante dans les deux méthodes. Mais le point P^* obtenu par la méthode SRDP peut être plus proche de la surface de défaillance que celui obtenu dans (Gayton *et al.*, 2003) en comparant la valeur de la fonction d'état limite au point P^* . La méthode SRDP est légèrement moins coûteuse puisqu'un nombre plus faible de calculs de la fonction d'état limite est requis.

Variable	Distribution	Moyenne	Ecart type
E	Normale	2×10^{11}	4×10^9
e	Normale	24	0,72
L_S	Normale	600	18
h_w	Normale	156	4,68
e_w	Normale	10	0,3
w_f	Normale	119,7	3,59
e_f	Normale	24	0,72

Tableau 7. Caractéristique des variables aléatoires de l'exemple 3

Référence/Méthode	β	$G(\bar{u}^*)$	N_e
SORM	1,217	indis.	indis.
Gayton	1,211	-1071	38
SRDP ($R^2 = 1$)	1,208	3,64	37

Tableau 8. Résultats de l'exemple 4

Référence/ Méthode	U_1^*	U_2^*	U_3^*	U_4^*	U_5^*	U_6^*	U_7^*
FORM	-0,450	-0,488	0,428	-0,814	-0,032	-0,283	-0,338
Gayton	-0,449	-0,488	0,432	-0,807	-0,032	-0,284	-0,325
SRDP	-0,448	-0,485	0,427	-0,804	-0,032	-0,282	-0,337

Tableau 9. Résultats de l'exemple 4 - Coordonnées du point P^*

4.5. Exemple 5

La méthode proposée est appliquée à un portique de 2 travées et 6 étages, comme l'indique la figure 4. Le critère de défaillance concernant l'état limite de service du portique correspond au dépassement du déplacement horizontal au sommet du

portique Δx par rapport à un seuil de 11 cm. Ce critère est formulé comme une fonction d'état limite implicite :

$$G = 11,0 - \Delta x \quad [22]$$

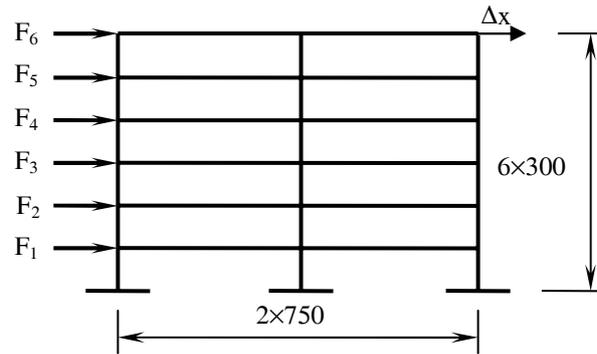


Figure 4. Portique de l'exemple 5 (unités : cm)

Les caractéristiques des variables aléatoires sont données dans le tableau 10. Les résultats sont fournis dans le tableau 11. Les coordonnées du point P^* obtenues par la SRDP sont présentées dans le tableau 12. Les résultats de référence sont donnés dans (Kim et Na, 1997). La valeur de la fonction d'état limite au point moyen est 3,57 cm. En comparant cette valeur avec la valeur de G au point P^* obtenu par SRDP, on peut dire que P^* se trouve bien sur la surface de défaillance. La SRDP demande 3 itérations qui correspondent à 67 estimations de la fonction d'état limite. Cet exemple montre que la SRDP fonctionne bien et donne de résultats satisfaisants pour des problèmes de fiabilité des structures où les fonctions d'état limite sont implicites.

Variable	Distribution	Moyenne	Ecart type
E de poteau	Lognormale	200 000 (kg/cm ²)	20 000
I de poteau	Lognormale	100 000 (cm ⁴)	10 000
E de poutre	Lognormale	200 000 (kg/cm ²)	20 000
I de poutre	Lognormale	150 000 (cm ⁴)	15 000
F ₁	Normale	2 500 (kg)	625
F ₂	Normale	2 800 (kg)	700
F ₃	Normale	2 900 (kg)	725
F ₄	Normale	3 000 (kg)	750
F ₅	Normale	3 100 (kg)	775
F ₆	Normale	3 200 (kg)	800

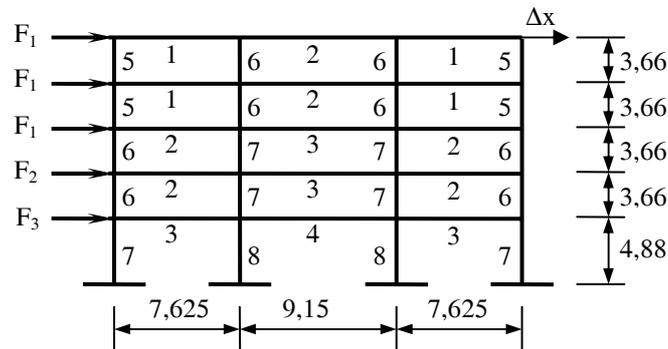
Tableau 10. Caractéristique des variables aléatoires de l'exemple 5

Référence/Méthode	β	$G(\bar{u}^*)$	N_e
Monte-Carlo	2,203	indis.	200 000
Kim et Na	2,201	indis.	indis.
SRDP ($R^2 = 1$)	2,261	$-2,72 \times 10^{-3}$	67

Tableau 11. Résultats de l'exemple 5

Méthode	U_1^*	U_2^*	U_3^*	U_4^*	U_5^*
SRDP	-0,598	-0,585	-0,979	-0,980	0,088

Méthode	U_6^*	U_7^*	U_8^*	U_9^*	U_{10}^*
SRDP	0,259	0,445	0,646	0,853	1,038

Tableau 12. Résultats de l'exemple 5 - Coordonnées du point P^* **4.6. Exemple 6****Figure 5.** Portique de l'exemple 6 (unités : m)

Afin de démontrer l'efficacité de la méthode proposée à des problèmes complexes avec des fonctions d'état limite fortement non linéaires, l'exemple suivant traite de cas d'un portique à 3 travées et 5 étages. Ce portique a été analysé par Liu et Der Kiureghian (1986) et Bucher et Bourgund (1990). Cette structure est schématisée sur la figure 5. Elle est caractérisée par 21 variables de base.

Les données structurales et leurs propriétés statistiques sont présentées dans le tableau 13 et le tableau 14.

Type d'élément	Module d'élasticité	Moment d'inertie	Section
1	E ₁	I ₅	A ₅
2	E ₁	I ₆	A ₆
3	E ₁	I ₇	A ₇
4	E ₁	I ₈	A ₈
5	E ₂	I ₁	A ₁
6	E ₂	I ₂	A ₂
7	E ₂	I ₃	A ₃
8	E ₂	I ₄	A ₄

Tableau 13. Propriété des éléments du portique pour l'exemple 6

Variable	Loi de distribution	Unit	Valeur moyenne	Ecart type
F ₁	Gumbel max	KN	133,454	40,04
F ₂	Gumbel max	KN	88,97	35,59
F ₃	Gumbel max	KN	71,175	28,47
E ₁	Normale	KN/m ²	2,173752×10 ⁷	1,9152×10 ⁶
E ₂	Normale	KN/m ²	2,379636×10 ⁷	1,9152×10 ⁶
I ₁	Normale	m ⁴	0,813443×10 ⁻²	1,08344×10 ⁻³
I ₂	Normale	m ⁴	1,150936×10 ⁻²	1,298048×10 ⁻³
I ₃	Normale	m ⁴	2,137452×10 ⁻²	2,59609×10 ⁻³
I ₄	Normale	m ⁴	2,596095×10 ⁻²	3,028778×10 ⁻³
I ₅	Normale	m ⁴	1,081076×10 ⁻²	2,596095×10 ⁻³
I ₆	Normale	m ⁴	1,410545×10 ⁻²	3,46146×10 ⁻³
I ₇	Normale	m ⁴	2,327853×10 ⁻²	5,624873×10 ⁻³
I ₈	Normale	m ⁴	2,596095×10 ⁻²	6,490238×10 ⁻³
A ₁	Normale	m ²	0,312564	0,055815
A ₂	Normale	m ²	0,3721	0,07442
A ₃	Normale	m ²	0,50606	0,093025
A ₄	Normale	m ²	0,55815	0,11163
A ₅	Normale	m ²	0,253028	0,093025
A ₆	Normale	m ²	0,29116825	0,10232275
A ₇	Normale	m ²	0,37303	0,1209325
A ₈	Normale	m ²	0,4186	0,195375

Tableau 14. Données statistiques des variables aléatoires pour l'exemple 6

Quelques variables sont supposées être corrélées. Toutes les charges sont corrélées entre elles par un coefficient de corrélation $\rho = 0,95$. Toutes les propriétés géométriques sont corrélées par $\rho_{A,A_j} = \rho_{I,I_j} = \rho_{A,I_j} = 0,13$. Les deux modules d'élasticité sont corrélés par $\rho = 0,9$. Les autres variables sont supposées être non corrélées. La transformation de l'espace physique à l'espace standard s'appuie sur la méthode de (Nataf, 1962 ; Ditlevsen et Madsen, 1996). Le critère de défaillance concernant l'état limite de service du portique est le dépassement du déplacement horizontal au sommet du portique Δx par rapport à un seuil de 0,061m. La fonction d'état limite est alors implicitement définie par :

$$G = 0,061 - \Delta x \quad [23]$$

Les résultats sont présentés dans le tableau 15. Les coordonnées du point P* obtenues par la SRDP sont présentées dans le tableau 16. L'indice β obtenu par SRDP est proche de celui obtenu par la MSR de Bucher et Bourgund. La valeur de la fonction d'état limite au point P* obtenue par la SRDP est de $-6,76 \times 10^{-5}$ (m). En comparant avec la valeur de fonction d'état limite au point moyen, $4,1 \times 10^{-2}$ (m), on peut dire que le point P* trouvé se situe sur la surface de défaillance. La MSR de Bucher et Bourgund a recours à une surface quadratique sans termes mixtes mise à jour seulement une fois. Cette méthode demande donc moins d'appels à la fonction d'état limite que la SRDP qui utilise une surface quadratique avec termes mixtes dont la mise à jour s'effectue jusqu'à la convergence. Dans ce cas la SRDP demande 7 itérations correspondant à 259 calculs de la fonction d'état limite. Ce dernier exemple permet de constater que la méthode proposée fonctionne et reste précise pour un problème à grand nombre de variables aléatoires corrélées. Toutefois, on peut également noter que le nombre d'appels à la fonction d'état limite est relativement important. On peut donc considérer que ce type de problème permet de cerner la frontière du domaine d'emploi optimal de notre méthode, à savoir les problèmes à grand nombre de variables aléatoires.

Référence/Méthode	β	$G(\bar{u}^*)$	Ne
Bucher et Bourgund	3,29	indis.	87
SRDP ($R^2 = 0,9999$)	3,22	$-6,76 \times 10^{-5}$	259

Tableau 15. Résultats de l'exemple 6

Méthode	U_1^*	U_2^*	U_3^*	U_4^*	U_5^*	U_6^*	U_7^*
SRDP	2,916	0,117	0,030	-0,773	-0,134	-0,253	-0,325

Méthode	U_8^*	U_9^*	U_{10}^*	U_{11}^*	U_{12}^*	U_{13}^*	U_{14}^*
SRDP	-0,310	-0,281	-0,326	-0,598	-0,574	-0,210	-0,001

Méthode	U_{15}^*	U_{16}^*	U_{17}^*	U_{18}^*	U_{19}^*	U_{20}^*	U_{21}^*
SRDP	-0,008	-0,020	-0,006	-0,001	-0,005	-0,004	-0,011

Tableau 16. Résultats de l'exemple 6 - Coordonnées du point P*

5. Conclusion

Dans cette étude, une amélioration de la méthode des surfaces de réponse a été proposée. Les surfaces de réponse sont choisies de manière cumulative. Pour la première itération, une surface linéaire est choisie et une surface quadratique avec termes mixtes est choisie pour les itérations suivantes. Les points de calage sont choisis en fonction des dérivées partielles de la SR par rapport aux variables aléatoires ce qui assure que les points choisis sont du côté de la surface de défaillance. Les coefficients de la SR sont déterminés par la technique de régression pondérée. Deux systèmes de pondération sont utilisés pour pénaliser les points de calage éloignés de la vraie surface de défaillance et donner plus d'importance aux points les plus proches de la zone de défaillance la plus probable. Grâce à cette technique, la méthode que nous proposons permet de minimiser le coût de calcul en assurant la précision des résultats, comme le montre la statistique R^2 , satisfaisante pour tous les cas testés. Les résultats en termes de β_{HL} obtenus sur les exemples souvent référencés dans la littérature montrent bien l'efficacité de cette méthode.

Remerciements

Le CEA est remercié pour la mise à disposition du logiciel Cast3m dans sa version développement éducation et recherche.

6. Bibliographie

- Atkinson A.C., Donev A.N., *Optimal experimental designs*, Oxford University Press Inc., 1992.
- Benoist D., Tourbier Y. et Germain-Tourbier S., *Plans d'expériences : construction et analyse*, Lavoisier Tech & Doc, 1994.

- Box G.E.P. et Draper N.R., "Empirical model building and response surface", J. Wiley Series, *Probability and Mathematical statistics*, 1987.
- Bucher C.G. et Bourgund U., "A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems", *Structural Safety*, 7, 1990, p. 57-66.
- Das P. K. et Zheng Y., "Cumulative formation of response surface and its use in reliability analysis", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2002, 15, p. 309-315.
- Devictor N., Fiabilité et mécanique : méthodes FORM/SORM et couplages avec des codes d'éléments finis par des surfaces de réponse adaptatives, Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal - Clermont II, France, 1996.
- Devictor N., Marques M. et Lemaire M., « Utilisation des surfaces de réponse dans le calcul de la fiabilité des composants mécaniques ». *Revue Française de Mécanique*, n° 1997-1, p. 43-51.
- Ditlevsen O. et Madsen H.O., *Structural Reliability Methods*, John Wiley & Sons, 1996.
- Draper N.R. et Smith H., *Applied regression analysis*, J. Wiley & Sons, 1981.
- Droesbeke J., Fine J., Saporta G., *Plans d'expériences, application à l'entreprise*, éd. Technip, 1994.
- Duprat F. et Sellier A., "Probabilistic approach to corrosion risk due to carbonation via an adaptive response surface method", *Probabilistic Engineering Mechanics*, in press 2006.
- Elegbede C., "Structural reliability assessment based on particles swarm optimization", *Structural Safety*, 2005, p. 171-86.
- Enevoldsen I., Faber M.H., Sorensen J.D., *Adaptive response surface technique in reliability estimation*. *Structural Safety*, Schuëller, Shinozuka & Yao (eds), 1994, p. 1257-1264.
- Faravelli L., "Response surface approach for reliability analysis", *J Eng Mech*, ASCE 1989, vol. 115, n° 12, p. 2763-81.
- Gayton N., Bourinet J. M., Lemaire M., "CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis", *Structural Safety*, 25, 2003, p. 99-121.
- Hasofer A. M. et Lind N. C., An exact and invariant second moment code format, *J Eng Mech*, vol. 100, 1974, p. 111-121.
- Kaymaz I. et McMahon C. A., "A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 20, p. 1-7.
- Kim Sang-Hyo et Na Seong-Won, "Response surface method using vector projected sampling points", *Structural Safety*, vol. 19, n° 1, 1997, p. 3-19.
- Lemaire M., "Finite element and reliability: combined methods by response surface", G.N. Frantziskonis, editor, *PROBAMAT-21st Century: Probabilities and Materials. Test, Models and Applications for the 21st Century*, vol. NATO ASI series 3.
- Liu P. L. et Der Kiureghian A., Optimisation algorithms for structural reliability analysis, Report No. UCB/SESM-86/09, University of California, Berkeley, 1986.
- Melchers R. E., *Structural Reliability, Analysis and Prediction*, J. Wiley and Sons, Chichester, 1999.

- Muzeau J. P., Lemaire M., El-Tawil K., « Méthodes fiabilistes des surfaces de réponse quadratiques et évaluation des règlements ». *Constructions Métalliques*, n° 3, 1993, p. 41-52.
- Nataf A., « Détermination des distributions dont les marges sont données », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 225, 1962, p. 42-43.
- Rackwitz R., Fiessler B., "Structural reliability under combined random load sequences", *Computers & Structures*, vol. 9, 1978, p. 489-494.
- Rajashkar Malur R., Ellingwood Bruce R., "A new look at the response approach for reliability analysis", *Structural Safety*, 12, 1993, p. 205-220.
- Rubinstein R. Y., *Simulations and Monte-Carlo Method*, Wiley Series in Probability and Mathematical, J. Wiley & Sons, 1981.
- Saporta G., *Probabilités, analyse des données et statistique*, Editions Technip, 1990.
- Sudret B., Der Kiureghian A., *Stochastic Finite Elements Methods and Reliability*, State of the art report, University of California, Berkeley, USA, 2000.
- Wong F. S., "Slope reliability and response surface method", *J. of Geotechnical Engineering*, ASCE, 1985, 111, p. 32-53.
- Wu Y. T., Wirsching P. H., "New algorithms for reliability estimation", *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113, n° 9, 1987, p. 1319-1336.

