

---

# Etude numérique et semi-analytique de la nocivité de défauts dans les coques sphériques

**Abdelhadi El Hakimi\*** — **Saïd Hariri\*** — **Abdelouahed Laksimi\*\***  
**Philippe Le Grogne\*** — **Zitouni Azari\*\*\***

\* *Ecole des Mines de Douai*

*Département Technologie des Polymères et Composites et Ingénierie Mécanique  
941 rue Charles Bourseul, BP 10838, F-59508 Douai cedex*

*legrogne@ensm-douai.fr*

\*\* *Laboratoire Roberval, Centre de Recherche, GM*

*Université de Technologie de Compiègne, BP 20529, F-60205 Compiègne*

\*\*\* *Laboratoire de Fiabilité Mécanique, Université de Metz, ENIM*

*Ile du Saulcy, F-57045 Metz cedex 01*

---

*RÉSUMÉ. Dans ce travail, on s'intéresse à la nocivité des défauts rencontrés dans les équipements sous pression sphériques, dont le comportement en présence de fissures est encore peu connu. La méthode des éléments finis permet d'évaluer la nocivité d'un défaut en fonction de sa taille et des caractéristiques géométriques de la pièce, dans l'hypothèse d'un comportement élastique. Ensuite, grâce au principe de superposition, on peut développer le champ des contraintes au voisinage du défaut sous une forme polynomiale et tabuler ainsi les résultats en fonction d'un éventail de configurations, tout en couvrant la plupart des cas réels de chargement. Enfin, l'utilisation d'approches semi-analytiques de type A16 ou R6 permet d'obtenir de manière efficace une mesure approchée de la nocivité des défauts en plasticité.*

*ABSTRACT. The present study deals with the little well-known problem of the harmfulness of cracks involved in spherical pressure equipments. The stress intensity factor in the linear elastic domain and the  $J$  integral in the elastoplastic range are performed using the finite element method and compared to the results provided by the application of the semi-analytical A16 or R6 simplified criteria. Use is made of a polynomial decomposition of the stress field in the vicinity of the crack in order to cover all industrial loadings.*

*MOTS-CLÉS : facteur d'intensité de contrainte, intégrale  $J$ , A16/R6, sphères sous pression.*

*KEYWORDS: stress intensity factor,  $J$  integral, A16/R6, spherical shells under pressure.*

## 1. Introduction

Dans certaines installations industrielles ou domestiques, on rencontre fréquemment des structures sphériques creuses soumises à des chargements mécaniques de type pression. Ces sphères peuvent être le siège de fissures axisymétriques ou semi-elliptiques, internes ou externes. Se pose alors la question de la nocivité de ce type de défaut. Dans la littérature, si le problème du cylindre sous pression a déjà fait l'objet de nombreuses études, tant expérimentales que numériques, très peu de travaux concernant ce type de géométrie ont été effectués. Le problème a été abordé dans un premier temps au moyen de critères basés sur les facteurs d'intensité de contrainte, notamment  $K_I$ . Dans ses travaux, Folias (Rice *et al.*, 1972) a par exemple obtenu une solution approchée du facteur d'intensité de contrainte dans une coque sphérique avec une fissure semi-elliptique en utilisant les résultats d'un calcul par éléments finis dans le cas d'une plaque infinie avec une fissure semi-elliptique, et en multipliant le facteur  $K_I$  de la plaque par un coefficient qui tient compte de l'effet de la courbure de la coque. De leur côté, Wang *et al.* (2000) se sont basés sur les théories de Sih *et al.* (1977) et le modèle « line-spring » pour déterminer le facteur d'intensité de contrainte dans une coque sphérique avec une fissure semi-elliptique externe.

Dans ce travail, nous abordons par une approche numérique par éléments finis, éventuellement couplée à des méthodes semi-analytiques, le problème de la nocivité des défauts dans les coques sphériques dans les domaines élastique et élastoplastique. L'objectif est de définir des abaques de calcul pour les coques sphériques soumises à des chargements complexes. La réalisation d'un certain nombre de calculs en élasticité, en considérant tout un éventail de formes et de tailles de fissures et de caractéristiques géométriques de la sphère, fournit un ensemble de résultats concernant la nocivité des défauts généralisables à un chargement quelconque par le principe de superposition. L'utilisation des méthodes d'estimation simplifiée de l'intégrale  $J$  en plasticité, notamment les règles A16 et R6, validées au passage par un calcul élastoplastique par éléments finis, permet d'approcher efficacement la nocivité d'un défaut quelconque dans une coque sphérique pour l'ensemble des géométries et chargements considérés.

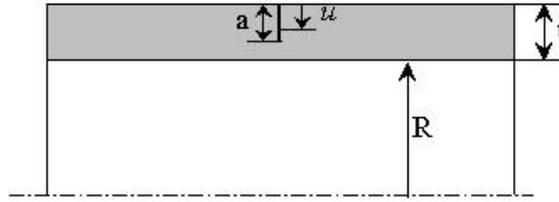
## 2. Calcul élastique : facteur d'intensité de contrainte

Dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire, le critère de nocivité d'un défaut dans une structure s'appuie classiquement sur la valeur des facteurs d'intensité de contrainte. Les contraintes appliquées à la frontière de la structure fissurée sont remplacées par les contraintes équivalentes sur les lèvres de la fissure, qui permettent de déterminer le degré de nocivité du défaut de manière localisée. Le principe de superposition nous permet ensuite de décomposer n'importe quel chargement complexe en une somme de chargements simples, en développant simplement le champ des contraintes au niveau de la fissure (McGowan *et al.*, 1979; Brighenti, 2000a; Joseph *et al.*, 1988). On choisit généralement une expression polynomiale des contraintes, sachant qu'un polynôme de degré trois suffit à représenter la plupart des cas de char-

gement réels (Chapuliot, 2000; Saffih, 2003; Saffih *et al.*, 2006). Nous opterons donc pour une distribution des contraintes sous la forme suivante :

$$\sigma\left(\frac{u}{t}\right) = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{u}{t} + \sigma_2 \left(\frac{u}{t}\right)^2 + \sigma_3 \left(\frac{u}{t}\right)^3 \quad [1]$$

où  $u$  représente la distance radiale d'un point dans la paroi de la structure à la surface où débouche le défaut (figure 1). Les composantes  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  correspondent respectivement à une distribution de contraintes constante, linéaire, quadratique et cubique dans l'épaisseur de la structure fissurée.



**Figure 1.** Distance  $u$  dans la structure fissurée

A chaque distribution élémentaire des contraintes, on associe un facteur d'intensité de contrainte donné par l'expression suivante :

$$K_I^n = \sigma_n \sqrt{\pi a} \left(\frac{a}{t}\right)^n i_n \quad [2]$$

avec  $i_n$  la fonction d'influence correspondante, l'entier  $n$  pouvant varier de manière générale de zéro à l'infini. L'intervalle  $0 \leq n \leq 3$  suffit cependant à décrire les cas de chargement réels les plus courants.

D'après le principe de superposition, le facteur d'intensité de contrainte correspondant à un chargement complexe est égal à la somme des contributions des différentes composantes de ce chargement, soit :

$$K_I^{tot} = \sum_{n=0}^3 K_I^n = \sum_{n=0}^3 \sigma_n \sqrt{\pi a} \left(\frac{a}{t}\right)^n i_n \quad [3]$$

### 3. Calcul élastoplastique : intégrale $J$

L'intégrale  $J$  est le paramètre de la mécanique de la rupture élastoplastique le plus utilisé pour caractériser l'initiation de la propagation et l'instabilité d'une fissure dans un matériau ductile. Rice *et al.* (1980) définissent l'intégrale  $J$  pour un matériau non linéaire comme la variation d'énergie potentielle lors de l'avancée de la fissure. Ils montrent que ce taux de restitution d'énergie non linéaire est en outre indépendant

du contour d'intégration suivi entourant la pointe de fissure et de la géométrie de la structure. Sa formulation, qui peut s'appliquer dans le cas tridimensionnel en considérant un contour dans le plan orthogonal au front de fissure au point considéré, est la suivante :

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - \vec{T} \cdot \frac{d\vec{U}}{dx} d\Gamma \right) \quad [4]$$

où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées d'un point courant  $M$  du contour d'intégration  $\Gamma$  définies par rapport au front de fissure,  $W$  est la densité d'énergie de déformation, et  $\vec{U}$  et  $\vec{T}$  sont respectivement les vecteurs déplacement et contrainte du point  $M$  du contour. Notons que l'utilisation de cette intégrale  $J$  en plasticité est rigoureusement limitée au cas de chargements radiaux monotones, du fait des irréversibilités spécifiques au comportement élastoplastique. Cependant, son principe reste raisonnablement applicable pour des chargements monotones quelconques, c'est-à-dire en l'absence de décharges.

Les méthodes dites simplifiées du calcul de l'intégrale  $J$  en plasticité permettent d'obtenir une approximation de  $J$  en se basant sur le calcul élastique des facteurs d'intensité de contrainte, sur la loi de comportement du matériau et sur un calcul de charge limite par analyse limite. Les méthodes les plus utilisées dans le domaine des équipements sous pression sont la règle R6 (Ainsworth, 1999) et la règle A16 (Drubay *et al.*, 2003).

Ces deux approches permettent de calculer l'intégrale  $J$  élastoplastique à partir de :

- la courbe de traction rationnelle du matériau ;
- la charge limite de la structure étudiée ;
- et une formule correctrice de l'intégrale  $J$  qui relie les valeurs élastique et élastoplastique.

Dans notre travail, l'évaluation de  $J$  est réalisée de la manière suivante par :

- la méthode R6 :

$$\begin{cases} J_e = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \\ L_r = \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_e} = \frac{P}{P_L} \\ K_{R6} = \frac{J_{R6}}{J_e} = \frac{E\varepsilon_{ref}}{L_r\sigma_e} + \frac{L_r^3\sigma_e}{2E\varepsilon_{ref}} \end{cases} \quad [5]$$

- la méthode A16 :

$$\begin{cases} J_e = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \\ L_r = \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_e} = \frac{P}{P_L} \\ K_{A16} = \frac{J_{A16}}{J_e} = \frac{E\varepsilon_{ref}}{L_r\sigma_e} + \frac{1}{2} \frac{L_r^2}{1+L_r^2} \end{cases} \quad [6]$$

où la déformation de référence  $\varepsilon_{ref}$  est déduite de la contrainte de référence  $\sigma_{ref}$ , pour le chargement  $P$  considéré, en utilisant la courbe de traction du matériau, et

où  $\sigma_e$  et  $P_L$  sont respectivement la contrainte limite élastique et la charge limite de la structure fissurée, et  $J_e$  est la valeur élastique de l'intégrale  $J$  dans les mêmes conditions de chargement, en déformations planes.

REMARQUE. – Le calcul de la pression limite  $P_L$  d'une sphère fissurée peut s'effectuer de manière analytique, soit en adaptant les solutions approchées connues pour les cylindres fissurés, soit en choisissant par exemple la contrainte limite élastique à un facteur près, de façon très empirique. Ces différentes solutions possibles d'évaluation de la charge limite donnent tous des résultats similaires à la solution numérique obtenue par la méthode des éléments finis et assurent l'efficacité de la démarche globale de calcul de l'intégrale  $J$  en plasticité proposée dans ce travail. Notre objectif n'étant pas ici de comparer précisément ces différentes méthodes, le calcul des pressions limites a été effectué numériquement dans les applications présentées par la suite.

L'organigramme de la figure 2 précise la démarche de calcul de l'intégrale  $J$  élastoplastique approchée par l'une ou l'autre des deux méthodes précédentes.

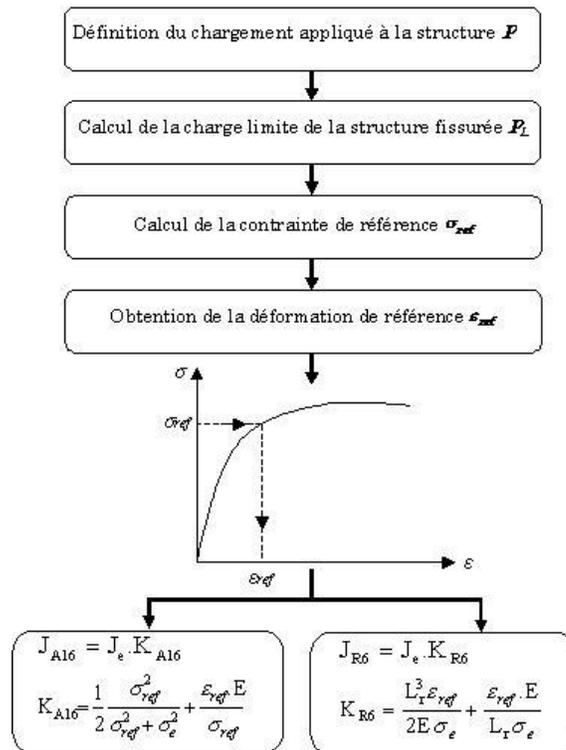
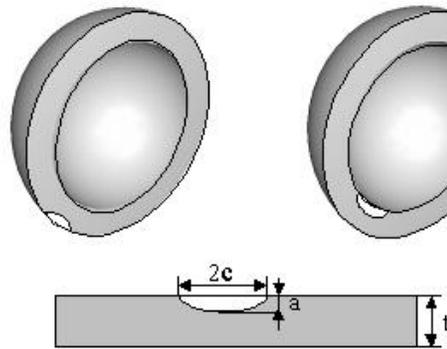


Figure 2. Utilisation des méthodes A16 et R6

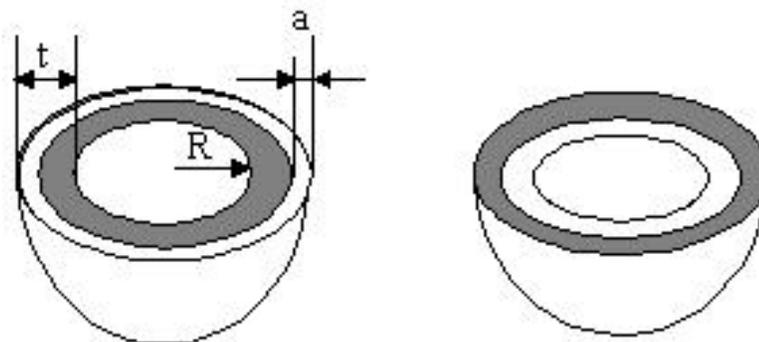
#### 4. Modélisation numérique

##### 4.1. Géométrie

Les intégrales  $J$ , ou encore les facteurs d'intensité de contrainte par l'intermédiaire des fonctions d'influence en élasticité, peuvent être déterminés numériquement par la méthode des éléments finis. Les structures étudiées sont de géométrie sphérique creuse et comportent des fissures axisymétriques ou semi-elliptiques débouchant en surface interne ou externe (figures 3 et 4). La géométrie est caractérisée par un paramètre adimensionnel  $t/R$  avec  $t$  l'épaisseur de la sphère et  $R$  son rayon interne. Les défauts semi-elliptiques sont caractérisés par les deux rapports  $a/t$  et  $a/c$  avec  $a$  la profondeur de la fissure et  $2c$  sa longueur.



**Figure 3.** Sphère avec une fissure semi-elliptique interne ou externe



**Figure 4.** Sphère avec une fissure axisymétrique interne ou externe

Pour les fissures semi-elliptiques, nous avons considéré les rapports géométriques suivants :

$$\begin{cases} t/R = 1/2; & 1/10; & 1/80 \\ a/c = 1/2; & 1/4; & 1/8 \\ a/t = 0.2; & 0.4; & 0.6; & 0.8 \end{cases}$$

Dans le cas de fissures axisymétriques, les rapports retenus sont :

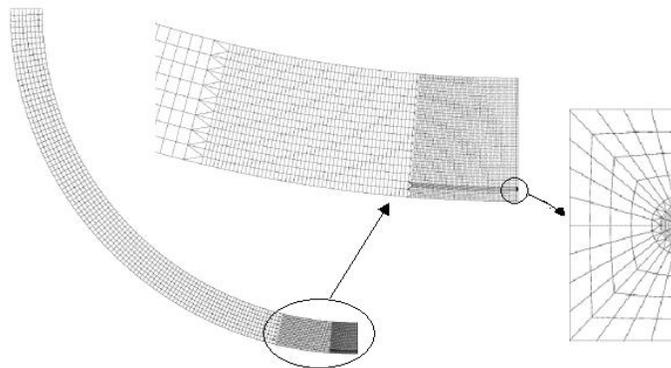
$$\begin{cases} t/R = 1/2; & 1/10; & 1/80 \\ a/t = 0.2; & 0.4; & 0.5; & 0.6; & 0.7; & 0.75 \end{cases}$$

Cela fait un total de 72 cas de figure avec une fissure semi-elliptique et 36 cas de figure avec une fissure axisymétrique.

#### 4.2. Maillage

Le maillage, ainsi que les calculs, sont réalisés à l'aide du code Castem (CASTEM, 2006).

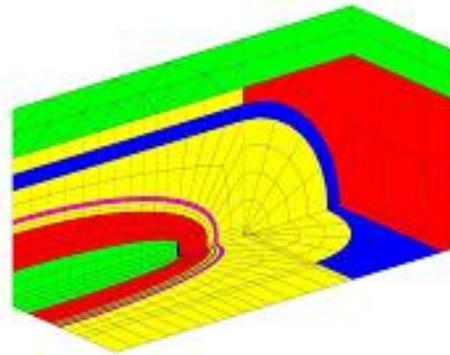
Les sphères présentant une fissure axisymétrique ne sont modélisées que sur un plan méridien, en raison de l'axisymétrie de la géométrie et du chargement.



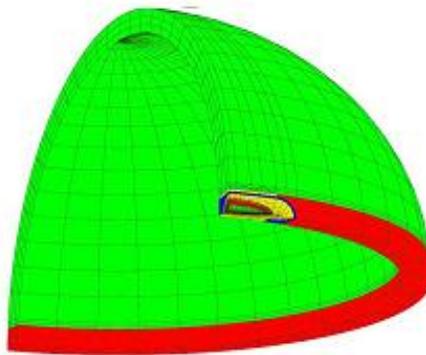
**Figure 5.** Maillage d'une sphère avec une fissure axisymétrique

Les sphères comportant une fissure semi-elliptique sont modélisées par un maillage tridimensionnel. Le maillage du voisinage de la fissure est réalisé au moyen d'un « bloc-fissure » spécifique (figure 6). Le principe de construction de ce bloc-fissure repose sur l'extrusion du maillage 2D d'une fissure plane le long du front de fissure, qui est une courbe de forme semi-elliptique. Cette opération permet de générer un volume de référence complété ensuite par des volumes externes, qui permettent de faire la jonction avec le reste de la structure, jusqu'à l'obtention d'un bloc compact parallélépipédique. Ce bloc-fissure est enfin enroulé suivant la courbure de la sphère et

prolongé par deux révolutions adéquates pour obtenir le maillage complet d'un quart de sphère (figure 7). Un descriptif plus détaillé de la création du bloc-fissure est présenté dans (Saffih, 2003) pour plus d'informations.



**Figure 6.** *Bloc-fissure*



**Figure 7.** *Maillage d'une sphère avec une fissure semi-elliptique*

On choisit dans tous les cas des éléments quadratiques. Le maillage au voisinage du front de fissure est particulièrement raffiné (il est à noter que le bloc-fissure concentre à lui seul l'essentiel des éléments du maillage de la structure) de façon à assurer une modélisation locale satisfaisante au niveau de la singularité où les contraintes et leur gradient sont particulièrement élevés. Le bloc-fissure développé a été en particulier calibré et validé (dans les gammes de taille de fissure décrites auparavant) sur des calculs de cylindres pour lesquels on dispose de solutions numériques de référence dans la littérature.

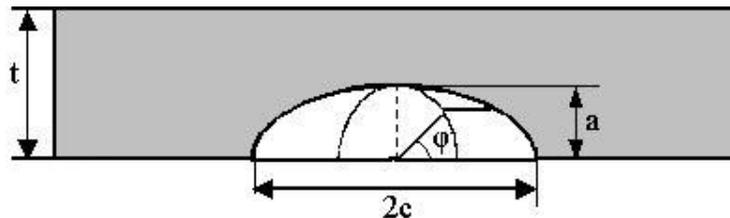
### 4.3. Chargement

Le chargement est imposé directement sous la forme d'une pression sur les lèvres de la fissure, avec des distributions de contraintes constante, linéaire, quadratique ou cubique. Ce procédé de mise en charge permet de déterminer les facteurs d'intensité de contrainte représentant un chargement global arbitraire appliqué sur la sphère, d'après le principe de superposition en élasticité linéaire.

### 4.4. Validation

Avant de présenter l'ensemble des résultats dans la section suivante, une validation de notre modèle numérique s'impose. On compare donc, en élasticité et pour une distribution de contraintes constante, nos résultats avec ceux de Brighenti (2000b), qui eux-mêmes s'avèrent en très bon accord avec les résultats antérieurs de Joseph *et al.* (1995), sur deux sphères de géométrie identique et comprenant des fissures de taille distincte. Deux valeurs du rapport  $a/t$ , influençant le plus les résultats, ont été considérées.

Pour étudier l'évolution du facteur d'intensité de contrainte le long du front de fissure semi-elliptique, on définit un angle  $\phi$  permettant de repérer la position d'un point comme indiqué sur la figure 8. Cet angle vaut  $0^\circ$  en surface et  $90^\circ$  en fond de fissure.



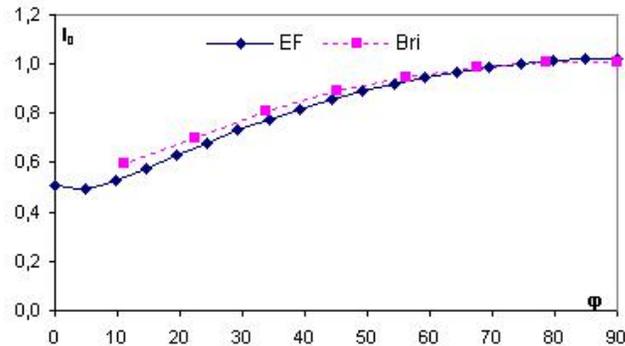
**Figure 8.** Définition de l'angle  $\phi$

Les figures 9 et 10 montrent un accord satisfaisant entre nos résultats numériques et ceux de nos prédécesseurs.

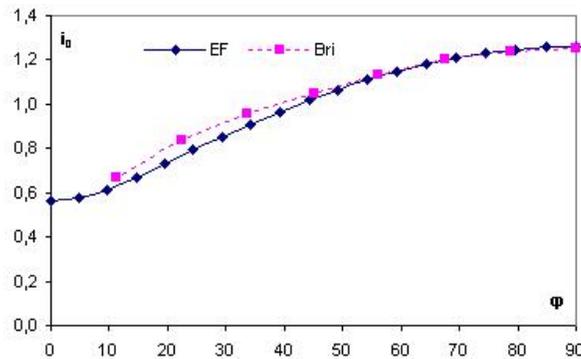
## 5. Résultats

### 5.1. Élasticité

Les résultats obtenus dans le cadre de l'élasticité linéaire sont les facteurs d'intensité de contrainte, ou plus précisément les fonctions d'influence correspondant aux distributions élémentaires de contraintes sur les lèvres de la fissure.



**Figure 9.** Evolution de la fonction d'influence  $i_0$  avec l'angle  $\phi$  au front d'une fissure semi-elliptique externe ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/5$  ;  $a/t = 0.2$ )



**Figure 10.** Evolution de la fonction d'influence  $i_0$  avec l'angle  $\phi$  au front d'une fissure semi-elliptique externe ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/5$  ;  $a/t = 0.4$ )

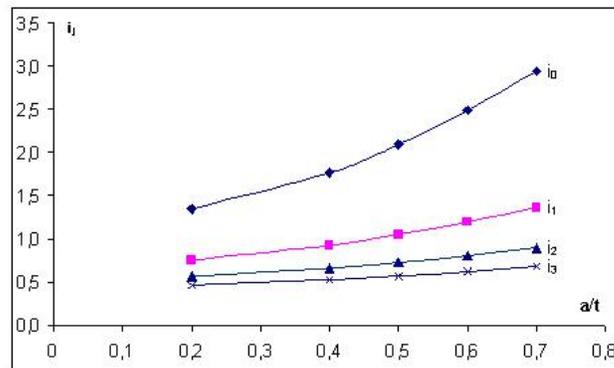
L'objectif est de tabuler tout un ensemble de valeurs de ces fonctions d'influence de manière à pouvoir déduire par la suite le facteur d'intensité de contrainte en élasticité par simple superposition et sans calcul élément fini, pour une large gamme de caractéristiques géométriques de la fissure (axisymétrique ou semi-elliptique, interne ou externe) et de la sphère, dans n'importe quel cas de chargement.

Au passage, nous avons illustré l'évolution de ces coefficients d'influence, en fonction des paramètres géométriques retenus, pour quelques cas caractéristiques.

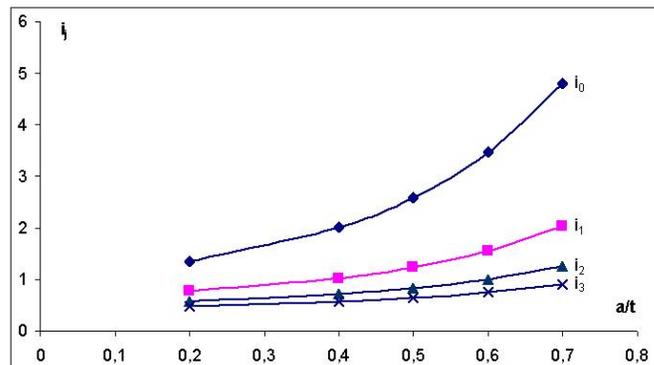
Les courbes ci-après représentent donc les coefficients d'influence dans les cas de chargements constant, linéaire, quadratique et cubique, appliqués aux lèvres de la fissure.

### 5.1.1. Fissures axisymétriques

Dans tous les cas traités de sphères contenant une fissure axisymétrique, on constate une augmentation des paramètres  $i_n$  ( $n$  allant de 0 à 3) lorsque le rapport  $a/t$  augmente ou lorsque le rapport  $t/R$  diminue. Pour l'ensemble des types de chargement considérés, le degré de nocivité d'une fissure axisymétrique augmente donc naturellement avec sa profondeur. De plus, les sphères les plus minces représentent les cas les plus défavorables, tous paramètres étant fixés par ailleurs. Enfin, on peut noter que la contribution du chargement constant  $i_0$ , dans un cas de chargement complexe, est proportionnellement plus importante que les autres. Deux séries de courbes pour deux géométries de sphère différentes sont proposées.



**Figure 11.** Evolution des fonctions d'influence  $i_n$  ( $n$  allant de 0 à 3) avec le rapport  $a/t$  pour une fissure axisymétrique externe ( $t/R = 1/2$ )



**Figure 12.** Evolution des fonctions d'influence  $i_n$  ( $n$  allant de 0 à 3) avec le rapport  $a/t$  pour une fissure axisymétrique externe ( $t/R = 1/10$ )

L'ensemble des résultats est décrit dans les tableaux 1 et 2, respectivement pour une fissure externe et interne.

$t/R$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	0.2	1.3446	0.75514	0.56442	0.46532
1/2	0.4	1.7643	0.92771	0.66067	0.52852
1/2	0.5	2.0909	1.0493	0.72725	0.57169
1/2	0.6	2.4881	1.1952	0.8064	0.62263
1/2	0.7	2.9402	1.3616	0.89678	0.68086
1/2	0.75	3.1753	1.4507	0.94614	0.71313
1/10	0.2	1.3484	0.76898	0.57242	0.47071
1/10	0.4	2.0065	1.0208	0.71261	0.56262
1/10	0.5	2.5872	1.2361	0.83008	0.63852
1/10	0.6	3.463	1.5545	1.0014	0.7485
1/10	0.7	4.8054	2.0341	1.2561	0.90924
1/10	0.75	5.7106	2.3543	1.4248	1.0154
1/80	0.2	1.3598	0.7736	0.57516	0.47255
1/80	0.4	2.0932	1.054	0.7317	0.57512
1/80	0.5	2.7871	1.3111	0.87127	0.66612
1/80	0.6	3.9425	1.7306	1.0967	0.80926
1/80	0.7	6.0827	2.4929	1.5006	1.0643
1/80	0.75	7.9204	3.139	1.8393	1.2765

**Tableau 1.** Facteurs d'influence pour une fissure axisymétrique externe en fonction des paramètres géométriques de la sphère et de la fissure

### 5.1.2. Fissures semi-elliptiques

Dans le cas de fissures semi-elliptiques, les valeurs des paramètres  $i_n$  dépendent en plus de la position du point considéré sur le front de fissure. Toutes ces valeurs sont maximales au point le plus profond qui correspond à un angle de  $90^\circ$  et minimales en surface à la position  $0^\circ$ .

#### Remarques

(i) Ce résultat est dû au fait que le rapport  $a/c$  est inférieur à 1 (la fissure est toujours plus large que profonde) pour l'ensemble des configurations envisagées. De manière générale, les fissures semi-elliptiques tendent vers une forme circulaire « équilibrée ».

(ii) Le lissage des courbes présentées, nécessaire du fait de la présence de deux types de nœuds dans les éléments quadratiques sur le front de fissure, vient parfois décaler artificiellement ces extrema aux nœuds contigus (figure 14).

$t/R$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	0.2	1.2821	0.74345	0.55812	0.46131
1/2	0.4	1.7456	0.9215	0.65756	0.52665
1/2	0.5	2.0797	1.0465	0.72619	0.57123
1/2	0.6	2.4883	1.198	0.80896	0.62475
1/2	0.7	2.9636	1.3761	0.90672	0.68818
1/2	0.75	3.2188	1.4748	0.96205	0.72461
1/10	0.2	1.3435	0.76731	0.57155	0.47017
1/10	0.4	2.0095	1.022	0.71332	0.56309
1/10	0.5	2.5936	1.2385	0.83137	0.63935
1/10	0.6	3.471	1.5574	1.003	0.74906
1/10	0.7	4.8118	2.0368	1.2576	0.91028
1/10	0.75	5.7146	2.3566	1.4263	1.0164
1/80	0.2	1.3592	0.77343	0.57499	0.47244
1/80	0.4	2.094	1.0543	0.73129	0.57486
1/80	0.5	2.7887	1.3117	0.87158	0.66544
1/80	0.6	3.9449	1.7314	1.0972	0.80954
1/80	0.7	6.0859	2.494	1.5011	1.0647
1/80	0.75	7.9239	3.1402	1.8399	1.2769

**Tableau 2.** Facteurs d'influence pour une fissure axisymétrique interne en fonction des paramètres géométriques de la sphère et de la fissure

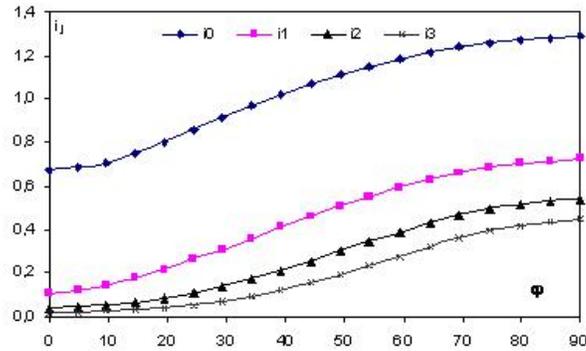
(iii) Au niveau de la surface libre, du fait de la très forte dépendance des résultats envers le maillage, le lissage est effectué sans tenir compte des valeurs obtenues au nœud correspondant à la position  $0^\circ$ .

Les remarques précédentes concernant les fissures axisymétriques sont toujours valables dans le cas de fissures semi-elliptiques. Les deux séries de courbes suivantes affichent de plus le caractère globalement plus nocif d'une fissure externe face à une fissure interne, tous paramètres étant confondus par ailleurs.

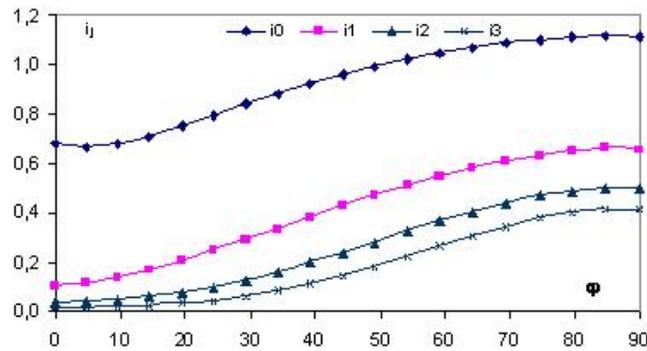
L'ensemble des résultats est décrit dans les tableaux 3, 4, 5 et 6, respectivement pour une fissure externe et interne, en considérant successivement le fond de la fissure et la surface libre.

## 5.2. Plasticité

Dans cette section, on s'intéresse au cas particulier mais non restrictif d'une sphère sous pression interne. Dans un premier temps, on applique la méthodologie envisagée en évaluant l'intégrale  $J$  élastoplastique de manière semi-analytique par les méthodes R6 et A16 qui s'appuient sur les valeurs d'intégrale  $J$  correspondantes en élasticité et donc sur les valeurs tabulées de la section précédente.



**Figure 13.** Evolution des fonctions d'influence  $i_n$  ( $n$  allant de 0 à 3) avec l'angle  $\phi$  au front d'une fissure semi-elliptique externe ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/4$  ;  $a/t = 0.4$ )



**Figure 14.** Evolution des fonctions d'influence  $i_n$  ( $n$  allant de 0 à 3) avec l'angle  $\phi$  au front d'une fissure semi-elliptique interne ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/4$  ;  $a/t = 0.4$ )

A des fins de validation de ces méthodes approchées, l'intégrale  $J$  élastoplastique est calculée directement par éléments finis et les résultats obtenus sont comparés dans différents cas de figure.

Les résultats de la section précédente en termes de coefficients d'influence ne dépendent naturellement pas du matériau. Dans le cas élastoplastique, il est nécessaire de préciser sa nature dont vont dépendre les résultats. Le matériau utilisé dans les applications suivantes est un acier 316L de module d'Young  $E = 200000 \text{ MPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . La limite élastique vaut  $\sigma_e = 217 \text{ MPa}$  et l'écrouissage est cinématique linéaire de module  $H = 40000 \text{ MPa}$ .

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.83850847	0.57120543	0.43315326	0.366360212
1/2	1/2	0.4	0.892767681	0.576452266	0.448881282	0.379379468
1/2	1/2	0.6	0.911002568	0.607458858	0.466526153	0.39150102
1/2	1/2	0.8	1.075778891	0.647063359	0.494564517	0.41166266
1/2	1/4	0.2	1.031118967	0.62522417	0.479659029	0.401270837
1/2	1/4	0.4	1.185065261	0.681272597	0.51036169	0.421560399
1/2	1/4	0.6	1.426670765	0.766473047	0.555320369	0.450020884
1/2	1/4	0.8	1.634223667	0.850794048	0.60416282	0.483172268
1/2	1/8	0.2	1.10488031	0.659174277	0.512978828	0.42900142
1/2	1/8	0.4	1.409102165	0.770311085	0.561748612	0.456478436
1/2	1/8	0.6	1.912599578	0.947689443	0.654733306	0.514708845
1/2	1/8	0.8	2.497954184	1.165815431	0.77412936	0.592051161
1/10	1/2	0.2	0.889810707	0.569640867	0.436899226	0.368580336
1/10	1/2	0.4	0.982395344	0.59487827	0.458053897	0.384809804
1/10	1/2	0.6	1.102302137	0.637728382	0.481330484	0.400156773
1/10	1/2	0.8	1.226688301	0.70040624	0.523733381	0.43273831
1/10	1/4	0.2	1.073067404	0.64029699	0.487586859	0.406196658
1/10	1/4	0.4	1.289945706	0.725801917	0.539138178	0.44387802
1/10	1/4	0.6	1.607780414	0.82977532	0.588015547	0.4700899
1/10	1/4	0.8	2.014805122	0.985767833	0.674836625	0.526907406
1/10	1/8	0.2	1.231939465	0.707985017	0.540088555	0.446658094
1/10	1/8	0.4	1.540089421	0.825949878	0.594869984	0.479134039
1/10	1/8	0.6	1.961316166	1.015239294	0.693280064	0.539182406
1/10	1/8	0.8	2.67223722	1.276138391	0.851986378	0.650458096
1/80	1/2	0.2	0.92850847	0.57120543	0.44175951	0.371288399
1/80	1/2	0.4	1.048810406	0.615779384	0.467768226	0.390145824
1/80	1/2	0.6	1.233988448	0.678598245	0.500238058	0.410562924
1/80	1/2	0.8	1.497538344	0.774073785	0.551606119	0.443502302
1/80	1/4	0.2	1.125594085	0.659078663	0.497452444	0.412321169
1/80	1/4	0.4	1.373785471	0.749012999	0.546025289	0.443751021
1/80	1/4	0.6	1.607780414	0.889418536	0.620018534	0.490284351
1/80	1/4	0.8	2.406970355	1.12407189	0.746713805	0.571121544
1/80	1/8	0.2	1.182498672	0.688872037	0.529386942	0.439629886
1/80	1/8	0.4	1.527244166	0.81604309	0.587253987	0.473117004
1/80	1/8	0.6	2.080437665	1.015239294	0.693280064	0.540212092
1/80	1/8	0.8	2.847464402	1.304969569	0.852672678	0.643478849

**Tableau 3.** Facteurs d'influence en fond de fissure pour une fissure semi-elliptique externe en fonction des paramètres géométriques de la sphère et de la fissure

On présente pour commencer les méthodologies R6 et A16 sur deux exemples précis. On illustre ensuite l'ensemble des résultats obtenus par différentes courbes spécifiques qui permettent au passage de mieux valider les méthodes approchées.

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.722124412	0.130158549	0.047181329	0.023908284
1/2	1/2	0.4	0.783889634	0.149171675	0.05721167	0.030076604
1/2	1/2	0.6	0.837204242	0.182991214	0.068563706	0.037041993
1/2	1/2	0.8	0.908600544	0.226970382	0.091264963	0.0492422
1/2	1/4	0.2	0.589594404	0.082460249	0.025856388	0.011990103
1/2	1/4	0.4	0.662469793	0.086756086	0.029874948	0.014700436
1/2	1/4	0.6	0.844395845	0.104138741	0.033805478	0.015819117
1/2	1/4	0.8	0.892189042	0.094925819	0.026691035	0.010592434
1/2	1/8	0.2	0.433687682	0.040278201	0.009459618	0.003658663
1/2	1/8	0.4	0.442117884	0.036815368	0.006357747	0.001390601
1/2	1/8	0.6	0.460637289	0.064173871	0.021055816	0.003715216
1/2	1/8	0.8	0.486475811	0.009250068	0.011880312	0.009937937
1/10	1/2	0.2	0.71664144	0.12324948	0.045479685	0.023016521
1/10	1/2	0.4	0.799168972	0.148075958	0.057458043	0.030476521
1/10	1/2	0.6	0.951183901	0.192557088	0.074828589	0.040983417
1/10	1/2	0.8	1.017303437	0.248281003	0.104110973	0.056566571
1/10	1/4	0.2	0.585449959	0.083032684	0.026576219	0.012569979
1/10	1/4	0.4	0.669980454	0.101689682	0.038835841	0.020415593
1/10	1/4	0.6	0.844395845	0.160985332	0.063343701	0.033860239
1/10	1/4	0.8	1.006078741	0.221708123	0.090343018	0.048638291
1/10	1/8	0.2	0.44229859	0.044800797	0.012051012	0.005316509
1/10	1/8	0.4	0.501818719	0.060097087	0.018663151	0.008973848
1/10	1/8	0.6	0.552698166	0.064173871	0.021055816	0.009948329
1/10	1/8	0.8	0.592958072	0.067556356	0.019821777	0.008039263
1/80	1/2	0.2	0.722124412	0.130158549	0.043097082	0.02160439
1/80	1/2	0.4	0.761162075	0.136371008	0.051799497	0.027145511
1/80	1/2	0.6	0.889382347	0.173754767	0.066155917	0.035914606
1/80	1/2	0.8	1.057339537	0.218603941	0.089006556	0.047663879
1/80	1/4	0.2	0.592640167	0.079232998	0.024767858	0.011515486
1/80	1/4	0.4	0.676157867	0.098214101	0.036847451	0.019281229
1/80	1/4	0.6	0.842506432	0.161510488	0.063934778	0.034311416
1/80	1/4	0.8	1.10163018	0.239689907	0.098693186	0.053245318
1/80	1/8	0.2	0.437328348	0.044061233	0.011933087	0.005346027
1/80	1/8	0.4	0.526174555	0.070495584	0.024485167	0.012704252
1/80	1/8	0.6	0.666660849	0.105821407	0.042763092	0.023285526
1/80	1/8	0.8	0.715882077	0.177206362	0.074685135	0.040802381

**Tableau 4.** Facteurs d'influence en surface pour une fissure semi-elliptique externe en fonction des paramètres géométriques de la sphère et de la fissure

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.724270248	0.491427762	0.396491496	0.341105315
1/2	1/2	0.4	0.745063626	0.508671637	0.411965933	0.355458069
1/2	1/2	0.6	0.79660094	0.53267681	0.427138052	0.366592293
1/2	1/2	0.8	0.957895469	0.61771571	0.482979834	0.407154642
1/2	1/4	0.2	0.887245545	0.64029699	0.446806862	0.379136241
1/2	1/4	0.4	0.922395273	0.585310135	0.458602618	0.388417861
1/2	1/4	0.6	1.047205362	0.639830709	0.491466084	0.411220617
1/2	1/4	0.8	1.358835438	0.788509778	0.58483291	0.477021542
1/2	1/8	0.2	0.985313999	0.613131367	0.486944027	0.411670711
1/2	1/8	0.4	1.068913538	0.648477823	0.497121715	0.415697667
1/2	1/8	0.6	1.265752891	0.732676613	0.547150074	0.449978388
1/2	1/8	0.8	1.684875634	0.929417737	0.669889955	0.536497664
1/10	1/2	0.2	0.8413814	0.539863717	0.425142327	0.360841628
1/10	1/2	0.4	0.881675033	0.559005463	0.458053897	0.384809804
1/10	1/2	0.6	0.940424947	0.592749789	0.454509568	0.384085961
1/10	1/2	0.8	1.003983957	0.625056099	0.483911779	0.406609078
1/10	1/4	0.2	1.002232428	0.614722535	0.474073341	0.397758604
1/10	1/4	0.4	1.100275498	0.651457306	0.494905175	0.412039264
1/10	1/4	0.6	1.25752369	0.712674967	0.52818935	0.433648423
1/10	1/4	0.8	1.422949805	0.789464193	0.577358848	0.468894523
1/10	1/8	0.2	1.039719176	0.613131367	0.499810547	0.420605778
1/10	1/8	0.4	1.222624915	0.703085186	0.526182859	0.415697667
1/10	1/8	0.6	1.516763324	0.81113423	0.584708841	0.471853655
1/10	1/8	0.8	1.847464402	0.930496957	0.652672678	0.543478849
1/80	1/2	0.2	0.858361966	0.547629511	0.430055266	0.364391016
1/80	1/2	0.4	0.886326936	0.562010584	0.441428686	0.374801439
1/80	1/2	0.6	0.945351998	0.454509568	0.455664021	0.384982444
1/80	1/2	0.8	1.226688301	0.70040624	0.523733381	0.43273831
1/80	1/4	0.2	1.073067404	0.64029699	0.487586859	0.406196658
1/80	1/4	0.4	1.109995889	0.654177887	0.495876624	0.412352053
1/80	1/4	0.6	1.265531933	0.713213283	0.528712304	0.434018667
1/80	1/4	0.8	1.493095616	0.885767833	0.674836625	0.526907406
1/80	1/8	0.2	1.14885979	0.6841697	0.529386942	0.439629886
1/80	1/8	0.4	1.527244166	0.81604309	0.587253987	0.473117004
1/80	1/8	0.6	1.70106858	0.94427723	0.703135196	0.583779746
1/80	1/8	0.8	1.851159887	0.95445264	0.770177051	0.630526173

**Tableau 5.** Facteurs d'influence en fond de fissure pour une fissure semi-elliptique interne en fonction des paramètres géométriques de la sphère et de la fissure

### 5.2.1. Fissure semi-elliptique interne

On considère tout d'abord le cas d'une sphère comportant une fissure semi-elliptique interne avec les dimensions suivantes :  $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/4$  ;  $a/t =$

$t/R$	$a/c$	$a/t$	$i_0$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1/2	1/2	0.2	0.661832674	0.126175573	0.046388341	0.023813964
1/2	1/2	0.4	0.712933733	0.127698275	0.049038882	0.026020704
1/2	1/2	0.6	0.765048883	0.14636286	0.055895398	0.031005966
1/2	1/2	0.8	0.859175131	0.182075805	0.077654831	0.043894578
1/2	1/4	0.2	0.621315086	0.083032684	0.032605505	0.015964637
1/2	1/4	0.4	0.666427165	0.099637967	0.038140827	0.020186521
1/2	1/4	0.6	0.740635369	0.137157464	0.0544032	0.029555552
1/2	1/4	0.8	0.841085046	0.176562223	0.074707629	0.041888338
1/2	1/8	0.2	0.500159127	0.05831519	0.017008391	0.007703305
1/2	1/8	0.4	0.538343693	0.071869702	0.023937485	0.011977606
1/2	1/8	0.6	0.589782553	0.081117041	0.030451088	0.01596124
1/2	1/8	0.8	0.658763288	0.102351387	0.040148189	0.021270718
1/10	1/2	0.2	0.697059749	0.124995093	0.045225468	0.022935182
1/10	1/2	0.4	0.759905418	0.137645402	0.057458043	0.030476521
1/10	1/2	0.6	0.855105954	0.152935761	0.062777143	0.034157542
1/10	1/2	0.8	0.925462445	0.180775153	0.071145679	0.037699782
1/10	1/4	0.2	0.585449959	0.083032684	0.026576219	0.012569979
1/10	1/4	0.4	0.676595319	0.099129103	0.037298131	0.019521218
1/10	1/4	0.6	0.794490805	0.147453493	0.057555301	0.030722593
1/10	1/4	0.8	0.959597755	0.221708123	0.090343018	0.048638291
1/10	1/8	0.2	0.46806069	0.0447651	0.012051012	0.005316509
1/10	1/8	0.4	0.501818719	0.060097087	0.018663151	0.008973848
1/10	1/8	0.6	0.610783421	0.087042744	0.033392608	0.017729321
1/10	1/8	0.8	0.592958072	0.067556356	0.019821777	0.008039263
1/80	1/2	0.2	0.680161977	0.118404043	0.041743001	0.020783771
1/80	1/2	0.4	0.727254976	0.125227533	0.046254035	0.023829651
1/80	1/2	0.6	0.816147082	0.062777143	0.055162908	0.029505564
1/80	1/2	0.8	0.971715119	0.29564242	0.118389308	0.060446379
1/80	1/4	0.2	0.563193797	0.075939203	0.023049441	0.010454531
1/80	1/4	0.4	0.636541293	0.085198085	0.03036758	0.015411992
1/80	1/4	0.6	0.746061901	0.130207097	0.048789623	0.025465571
1/80	1/4	0.8	0.900508401	0.176562173	0.068319517	0.036098859
1/80	1/8	0.2	0.426821879	0.05831519	0.010111175	0.004259393
1/80	1/8	0.4	0.487225123	0.057982131	0.018404913	0.011977606
1/80	1/8	0.6	0.576362521	0.077689175	0.029386395	0.015570203
1/80	1/8	0.8	0.716510503	0.317189689	0.09691392	0.055130116

**Tableau 6.** Facteurs d'influence en surface pour une fissure semi-elliptique interne en fonction des paramètres géométriques de la sphère et de la fissure

0.4. Le chargement donné étant une pression interne, il correspond à une répartition uniforme de contraintes sur les lèvres de la fissure. En élasticité, la valeur de la fonc-

tion  $i_0$  pour la géométrie retenue est extraite du tableau correspondant (on se place au point le plus critique en fond de fissure) et on en déduit le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  par l'équation [2] et l'intégrale  $J$  élastique qui en découle classiquement. Ensuite, à partir de la charge appliquée et du chargement limite, on calcule aisément les grandeurs nécessaires à la correction de l'intégrale  $J$  en plasticité par les méthodes R6 ou A16, entre autres, la contrainte et la déformation de référence. L'utilisation des relations [5] et [6] mène à l'évaluation des intégrales  $J$  recherchées. Dans le tableau 7, on précise l'ensemble des valeurs intermédiaires permettant le calcul de l'intégrale  $J$  élastoplastique par l'une ou l'autre des méthodes semi-analytiques approchées. L'intégrale  $J$  obtenue directement par un calcul élément fini en plasticité est indiquée à des fins de comparaison.

$i_0$	$K_I$	$J_e$	$P$	$P_L$
1.109995889	1542.133282	10.82069651	160	201.81
	$\sigma_{ref}$	$\varepsilon_{ref}$	$L_r$	
	172.0430108	0.000860215	0.792824934	
$K_{R6}$	$J_{R6}$	$K_{A16}$	$J_{A16}$	$J_{EF}$
1.314285688	<b>14.22148657</b>	1.192982446	<b>12.908901</b>	<b>12.174252</b>

**Tableau 7.** Résultats du calcul élastoplastique en fond de fissure pour une fissure semi-elliptique interne ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/4$  ;  $a/t = 0.4$ )

### 5.2.2. Fissure axisymétrique externe

On choisit comme second exemple d'application le cas d'une fissure axisymétrique externe avec les mêmes dimensions :  $t/R = 1/10$  ;  $a/t = 0.4$ . La démarche de calcul est exactement similaire au cas précédent et mène aux résultats du tableau 8.

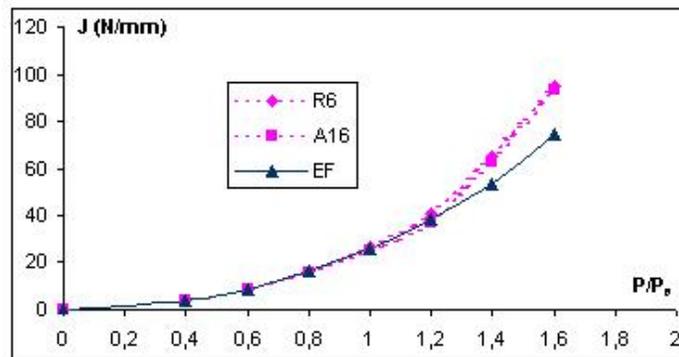
$i_0$	$K_I$	$J_e$	$P$	$P_L$
2.0095	2791.827304	35.46406362	160	177.94
	$\sigma_{ref}$	$\varepsilon_{ref}$	$L_r$	
	195.1219512	0.00097561	0.899179499	
$K_{R6}$	$J_{R6}$	$K_{A16}$	$J_{A16}$	$J_{EF}$
1.404261885	<b>49.80083285</b>	1.36034	<b>48.24318431</b>	<b>44.290585</b>

**Tableau 8.** Résultats du calcul élastoplastique pour une fissure axisymétrique externe ( $t/R = 1/10$  ;  $a/t = 0.4$ )

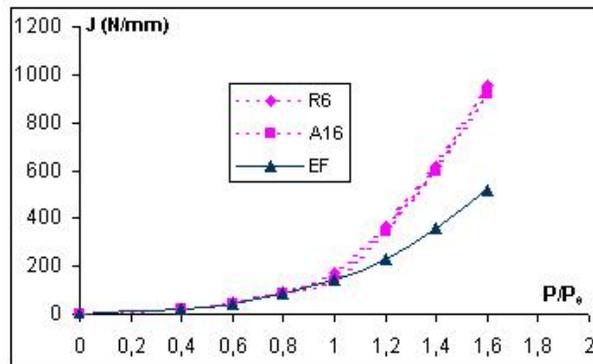
Cette démarche a été appliquée (à la fois pour les méthodes R6 et A16) sur tout un ensemble de cas dont on a retenu quelques exemples qu'on présente sous forme de courbes dans la section suivante. A des fins de validation, des calculs directs par éléments finis en élastoplasticité ont été effectués sur la plupart des cas envisagés.

5.2.3. Validation des méthodes et analyse des résultats

Un premier ensemble de courbes (figures 15 et 16) montre la variation de l'intégrale  $J$  en fond de fissure en fonction du chargement appliqué (adimensionnalisé par la pression de plastification de la coque mince équivalente sans défaut) pour différentes géométries de fissure.



**Figure 15.** Evolution de l'intégrale  $J$  en fonction de la charge appliquée pour une fissure semi-elliptique externe ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/4$  ;  $a/t = 0.4$ )

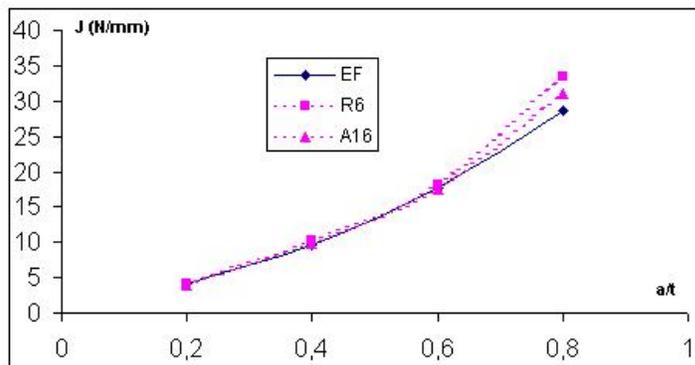


**Figure 16.** Evolution de l'intégrale  $J$  en fonction de la charge appliquée pour une fissure semi-elliptique externe ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/4$  ;  $a/t = 0.8$ )

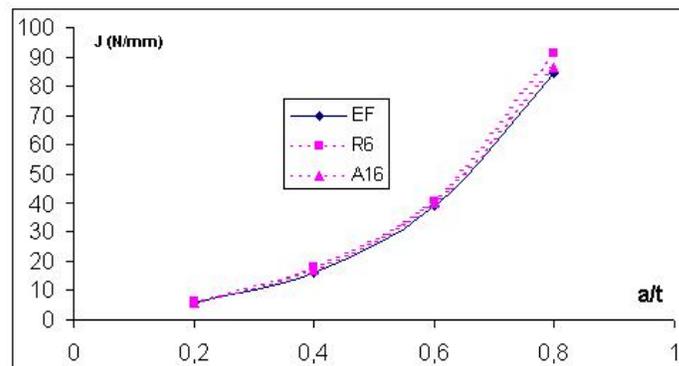
Dans chaque cas, les trois courbes obtenues par les méthodes purement numériques et semi-analytiques sont très proches les unes des autres, et on remarque particulièrement que les valeurs de  $J$  obtenues à partir des méthodes R6 et A16 sont toujours supérieures à celles obtenues par éléments finis. Même si les écarts deviennent plus importants lorsque le chargement devient très grand, les méthodes simplifiées présentent l'avantage de donner des résultats toujours conservatifs. Ceci démontre bien

la qualité de ces méthodes qui fournissent rapidement des solutions avec un très bon ordre de grandeur dans le sens de la sécurité.

A l'inverse, pour un chargement important (pour lequel la plasticité joue effectivement un rôle non négligeable), on peut tracer l'évolution de l'intégrale  $J$  en fonction du rapport géométrique  $a/t$ , c'est-à-dire de la profondeur relative de la fissure dans l'épaisseur de la sphère.



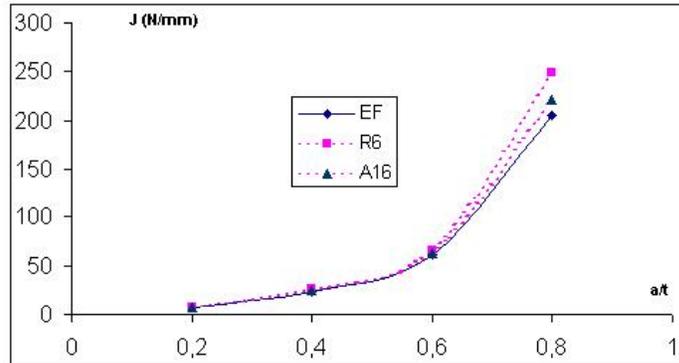
**Figure 17.** Evolution de l'intégrale  $J$  en fonction du rapport  $a/t$  pour une fissure semi-elliptique externe ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/2$  ;  $P/P_e = 0.8$ )



**Figure 18.** Evolution de l'intégrale  $J$  en fonction du rapport  $a/t$  pour une fissure semi-elliptique externe ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/4$  ;  $P/P_e = 0.8$ )

D'après les figures 17, 18 et 19, on montre d'une manière générale que la nocivité d'une fissure augmente avec sa profondeur.

Ces courbes constituent seulement un échantillon de l'ensemble des résultats obtenus qui couvrent toutes les gammes de taille de fissure et de géométrie de sphère.



**Figure 19.** Evolution de l'intégrale  $J$  en fonction du rapport  $a/t$  pour une fissure semi-elliptique externe ( $t/R = 1/10$  ;  $a/c = 1/8$  ;  $P/P_e = 0.8$ )

On a principalement montré sur les exemples retenus la bonne adéquation entre les résultats purement numériques et les solutions issues des méthodes simplifiées, ce qui entérine l'utilisation de la méthodologie décrite au sein de ce travail.

## 6. Conclusion

Cette étude a porté sur la nocivité des défauts dans les coques sphériques. On a retenu deux types de fissures, axisymétriques et semi-elliptiques, pour rendre compte de l'ensemble des défauts rencontrés en pratique. En élasticité, l'obtention des facteurs d'intensité de contrainte, en utilisant les fonctions d'influence de distributions polynomiales de contraintes locales au front de fissure, permet de traiter le cas d'un chargement complexe, par le principe de superposition. Les calculs ont été effectués par la méthode des éléments finis et les résultats résumés sous forme de tableaux (tableaux 1 à 6) recensant l'ensemble des configurations envisagées (pour une large gamme de paramètres géométriques et les chargements principaux). En plasticité, pour l'exemple d'une sphère sous pression interne, on a évalué l'intégrale  $J$  à partir de sa valeur en élasticité moyennant une correction analytique adéquate, en faisant intervenir la notion de pression limite. Les méthodes semi-analytiques R6 et A16, consistant en ce type d'approximation, ont été validées sur quelques exemples par comparaison avec les solutions purement numériques obtenues par un calcul direct par éléments finis en plasticité. Les nombreux résultats obtenus, tant en élasticité qu'en plasticité, permettent de mesurer au passage l'influence des caractéristiques géométriques de la fissure et de la coque sur le degré de nocivité d'un défaut donné. La méthodologie préconisée (et validée), consistant en l'utilisation des tableaux de valeurs élastiques et des méthodes de correction plastique semi-analytiques, constitue ainsi une aide appréciable, de par son efficacité, dans le suivi en service des structures sphériques sous pression fissurées.

## 7. Bibliographie

- Ainsworth R. A., R6 : assessment of the integrity of structures containing defects, Technical Report n° R/H/R6 - Revision 3, British Energy Generation Ltd, 1999.
- Brighenti R., « Axially-cracked pipes under pulsating internal pressure », *International Journal of Fatigue*, vol. 22, p. 559-567, 2000a.
- Brighenti R., « Surface cracks in shells under different hoop stress distributions », *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 77, n° 9, p. 503-509, 2000b.
- CASTEM, *Site internet*, <http://www-cast3m.cea.fr>, 2006.
- Chapuliot S., Formulaire de  $K_I$  pour les tubes avec un défaut de surface semi-elliptique longitudinal ou circonférentiel, interne ou externe, Rapport de recherche n° R-5900, CEA, 2000.
- Drubay B., Marie S., Chapuliot S., Lacire M. H., Michel B., Deschanels H., « A16 : guide for defect assessment at elevated temperature », *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 80, n° 7-8, p. 499-516, 2003.
- Joseph P. F., Erdogan F., « A surface crack in shells under mixed-mode loading conditions », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55, p. 795-804, 1988.
- Joseph P. F., Erdogan F., « Surface cracks in toroidal shells », *Nuclear Engineering and Design*, vol. 158, p. 263-276, 1995.
- McGowan J. J., Raymund M., « Stress intensity factor solutions for internal longitudinal semi-elliptical surface flaws in a cylinder under arbitrary loadings », *American Society for Testing and Materials*, n° 677, p. 365-380, 1979.
- Rice J. R., Levy N., « The part-through surface cracks in elastic plates », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, p. 185-194, 1972.
- Rice J. R., Rosengren G. F., « A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, p. 379-386, 1980.
- Saffih A., Etude de la nocivité des fissures dans un cylindre comportant une transition d'épaisseur : comparaison avec un cylindre droit, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, Ecole des Mines de Douai, 2003.
- Saffih A., Hariri S., « Numerical study of elliptical cracks in cylinders with a thickness transition », *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 83, n° 1, p. 35-41, 2006.
- Sih G. C., Hagendorf H. C., « On cracks in shells with shear deformation », *Mechanics of Fracture*, vol. 3, p. 201-229, 1977.
- Wang B., Hu N., « Study of a spherical shell with a surface crack by the line-spring model », *Engineering Structures*, vol. 22, n° 8, p. 1006-1012, 2000.

