

---

# Modélisation de la loi de comportement hyperélastique transversalement isotrope des élastomères

**Fakhreddine Dammak\*** — **Amine Regaieg\***  
**Imen Kamoun Kallel\*\*** — **Abderrazak Dhieb\***

\* U2MP, Unité de mécanique, Modélisation et Production,  
Département de génie mécanique, ENIS, Sfax, 3038, Tunisie

\*\* U2MP, Unité de mécanique, Modélisation et Production  
Département de Technologie, IPEIS, Sfax, BP 805, 3018 Sfax Tunisie

---

*RÉSUMÉ. Ce papier présente une description détaillée de la mise en œuvre numérique du comportement hyperélastique incompressible isotrope et transversalement isotrope. L'approche est basée sur la théorie continue des composites renforcés de fibres. Comme extension de l'hyperélasticité isotrope, il est supposé que la fonction énergie peut être décomposée en une composante isotrope et une composante anisotrope. Les expressions des formes fermes des tenseurs d'élasticité en contraintes planes incompressibles sont données pour le cas isotrope et transversalement isotrope. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la performance de ces expressions.*

*ABSTRACT. This paper presents a detailed description of the computer implementation of a fully incompressible isotropic and transversely isotropic hyperelastic behavior. The approach is based on the fiber reinforced composites continuum theory. As an extension of the isotropic hyperelasticity, it is assumed that the strain energy function is decomposed into an isotropic and an anisotropic components. Closed form expressions for the elasticity tensors in incompressible plane stress are given for isotropic and transversely isotropic cases. Numerical examples are presented to illustrate the performance of these expressions.*

*MOTS-CLÉS : élastomères, hyperélasticité, isotropie, transversalement isotrope, éléments finis.*

*KEYWORDS: elastomer, hyperelasticity, isotropic, transversely isotropic, finite element.*

---

## 1. Introduction

Beaucoup de matériaux d'intérêt pratique présentent des propriétés anisotropes. Quand ces matériaux sont supposés être une matrice solide isotrope renforcée par une seule famille de fibres, ces matériaux sont connus transversalement isotrope. Cependant, s'il y a deux ou plus de familles de fibres orthogonales, ces matériaux sont dits orthotropiques. Les équations constitutives pour modéliser l'orthotropie ou l'isotropie transverse dans le cas des petites déformations sont bien établies.

Dans quelques cas d'application quand les matériaux anisotropes subissent de grandes déformations, le comportement élastique non linéaire doit être établi en termes d'une fonction énergie hyperélastique. Un premier exemple d'application est l'analyse des tissus biologiques, considérés comme des matériaux composites où les fibres du collagène sont renforcées dans une matrice solide (Weiss *et al.*, 1996). Un deuxième exemple est la modélisation du comportement de quelques matériaux poreux comme les roches (Cazacu, 2002). Un dernier exemple est la simulation du processus de mise en forme des matériaux thermoplastiques renforcés de fibres (Chevaugnon *et al.*, 2001).

Pour l'hyperélasticité isotrope, l'expression de la forme fermée de la matrice tangente en termes des elongations principales dans le cas de déformations planes, axisymétriques et tridimensionnelles est donnée par (Simo *et al.*, 1991 ; Miehe, 1994). Dans les travaux de (Gruttmann *et al.*, 1992 ; Holzapfel *et al.*, 1996), les auteurs présentent une formulation éléments finis pour la modélisation des membranes caoutchoutées isotropes incompressibles en utilisant l'hypothèse de contraintes planes en termes des elongations principales.

Dans le cas de l'hyperélasticité transversalement isotrope, la forme de la fonction énergie a été développée pour la première fois par (Spencer, 1984). Plusieurs auteurs ont utilisé cette approche avec succès. Par exemple, les travaux de (Kyriacou *et al.*, 1996 ; Bonet *et al.*, 1998) décrivent les équations constitutives pour l'hyperélasticité transversalement isotrope et fournissent les aspects numériques de leur formulation éléments finis. Dans les travaux de (Weiss *et al.*, 1996), ces auteurs proposent une mise en œuvre par éléments finis de l'hyperélasticité transversalement isotrope incompressible pour modéliser les ligaments et les tendons, puis (Lambert *et al.*, 2002), ont décrit des structures théoriques générales et ont proposé des expressions explicites du tenseur d'élasticité dans le cas de l'hyperélasticité orthotrope et transversalement isotrope.

Le comportement hyperélastique transversalement isotrope tridimensionnel a été aussi introduit par (Lürding *et al.*, 2001 ; Reese *et al.*, 2001) dans des formulations éléments finis solides de type coque permettant l'utilisation de lois de comportement tridimensionnel.

Le modèle hyperélastique sous la forme proposée par Spencer (1984) a été aussi utilisé dans la modélisation du comportement hyperélastoplastique anisotrope. Nous citons les travaux de (Ekh *et al.*, 2001), (Gasser *et al.*, 2002) et (Reese, 2003).

L'objectif de ce travail est de développer une mise en œuvre effective du comportement hyperélastique incompressible isotrope et transversalement isotrope en contraintes planes. Il est supposé que la fonction énergie est décomposée en une composante isotrope et une composante anisotrope. Le modèle constitutif est écrit en termes des invariants du tenseur droit de Cauchy-Green. Notre contribution est constituée par les expressions sous forme fermée dans le cas général de l'hyperélasticité transversalement isotrope incompressible en contraintes planes.

Dans le modèle constitutif nous n'utilisons aucune technique de renforcement de la contrainte d'incompressibilité tel que le Lagrangien augmenté ou la formulation de pénalisation. Ces méthodes de renforcement peuvent détruire le taux de convergence asymptotique quadratique. L'incompressibilité est satisfaite exactement.

## 2. Comportement hyperélastique transversalement isotrope

Considérons le mouvement de déformation défini par la fonction  $\varphi(\mathbf{X}, t) : B \times R \rightarrow R^3$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$  le gradient de déformation. Ici  $\mathbf{X} \in R^3$  désigne la position d'une particule dans la configuration de la référence.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}}, \quad J = \det(\mathbf{F}) \quad [1]$$

$J$  étant le jacobien de déformation. Le tenseur droit de Cauchy-Green, est défini par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad [2]$$

L'hyperélasticité implique l'existence d'une fonction énergie dépendante du tenseur  $\mathbf{C}$ . Pour le cas d'hyperélasticité isotropique, la fonction énergie est une fonction de  $\mathbf{C}$  définie par :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad [3]$$

où  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont les trois invariants de  $\mathbf{C}$  qui sont donnés par :

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2 \right], \quad I_3 = \det \mathbf{C} \quad [4]$$

De nombreux matériaux sont composés d'une matrice et d'une famille de fibres ou plus. On ne considère que les matériaux composites dont les fibres sont arrangées dans la matrice. Ces types de matériaux possèdent des propriétés directionnelles et

leur comportement est anisotrope. Dans le cas d'une seule famille de fibres, le comportement du matériau est dit transversalement isotrope.

La direction d'une famille de fibres est définie par un champ de vecteur unitaire  $\mathbf{a}_0(\mathbf{X})$ . Après déformation, la direction des fibres peut être décrite par un champ de vecteur unitaire  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ . En général, les fibres vont subir un changement de longueur. L'élongation d'une fibre le long de sa direction, notée  $\lambda$ , est définie par le rapport entre la longueur d'un élément de la fibre dans la configuration déformée, et celle dans la configuration de référence :

$$\lambda \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{a}_0(\mathbf{X}), \quad \lambda^2 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0 \quad [5]$$

Puisque le sens de  $\mathbf{a}_0$  est immatériel, la fonction énergie est prise comme une fonction  $\mathbf{a}_0$ . D'où, en introduisant le produit tensoriel  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ , la fonction énergie peut être exprimée comme une fonction des deux tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{A}$ . Puisque  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{A}$  sont exprimés dans la configuration de référence, le principe d'indifférence matérielle de la fonction énergie est satisfait trivialement.

D'après l'équation [3], un matériau hyperélastique isotrope peut être exprimé par les trois premiers invariants de  $\mathbf{C}$ . Pour un matériau hyperélastique transversalement isotrope, d'autres scalaires supplémentaires, ou pseudo-invariants, de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{A}$  sont nécessaires pour décrire l'intégrité de base de ces tenseurs. Les équations suivantes donnent deux invariants scalaires additionnels dont peut dépendre la fonction énergie  $W$  dans le cas d'une famille de fibres (Holzapfel, 2000) :

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_0, \quad I_5 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{a}_0 \quad [6]$$

$I_4$  et  $I_5$  sont des pseudo-invariants qui caractérisent la famille de fibres. La fonction énergie dépend alors de cinq invariants :

$$W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad [7]$$

Comme extension de l'hyperélasticité isotrope, nous adoptons la décomposition suivante de la fonction énergie :

$$W = W_{iso}(I_1, I_2, I_3) + W_{aniso}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad [8]$$

où  $W_{iso}$  et  $W_{aniso}$  sont respectivement les parties isotrope et anisotrope de la fonction énergie. La fonction énergie libre  $W_{iso}$ , responsable du comportement isotrope du

matériau peut s'écrire en termes des invariants ou en termes des élongations principales. Dans le cas général, la fonction  $W_{aniso}$  représente la contribution de la famille de fibres et l'interaction entre celle-ci et la matrice. Cette forme de modèle de la fonction énergie libre encadre plusieurs autres modèles pour décrire le comportement transversalement isotrope des élastomères.

Pour la fonction  $W_{aniso}$ , plusieurs formes ont été proposées. L'énergie emmagasinée dans les fibres des tissus en biomécanique par exemple, est supposée être une fonction exponentielle (Gasser *et al.*, 2002).

$$W_{aniso} = A_1 \left( \exp \left[ A_2 (I_4 - 1)^2 \right] - 1 \right) \quad [9]$$

Cette énergie admet également une forme polynomiale dans le cadre du modèle de renforcement standard, défini par :

$$W_{aniso} = \frac{1}{2} A (I_4 - 1)^2 \quad [10]$$

Enfin, une autre forme est proposée par (Bonet *et al.*, 1998) pour étendre le modèle transversalement isotrope de St Venant des petites aux grandes déformations.

$$W_{aniso} = (\alpha + \beta \text{Log}(J) + \gamma (I_4 - 1))(I_4 - 1) - \frac{1}{2} \alpha (I_5 - 1) \quad [11]$$

### 3. Equations constitutives

D'après la décomposition de l'équation [8], le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff se décompose en deux parties sous la forme suivante :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{S}_{iso} + \mathbf{S}_{aniso} \quad [12]$$

où les tenseurs  $\mathbf{S}_{iso}$  et  $\mathbf{S}_{aniso}$  sont définis par :

$$\mathbf{S}_{iso} = 2 \frac{\partial W_{iso}}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{S}_{aniso} = 2 \frac{\partial W_{aniso}}{\partial \mathbf{C}} \quad [13]$$

Le module tangent se décompose également en deux parties :

$$\mathcal{C} = 2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{C}} = \mathcal{C}_{iso} + \mathcal{C}_{aniso} \quad [14]$$

avec  $\mathcal{C}_{iso}$  et  $\mathcal{C}_{aniso}$  sont donnés par :

$$\mathcal{C}_{iso} = 4 \frac{\partial^2 W_{iso}}{\partial \mathcal{C} \partial \mathcal{C}}, \quad \mathcal{C}_{aniso} = 4 \frac{\partial^2 W_{aniso}}{\partial \mathcal{C} \partial \mathcal{C}} \quad [15]$$

Le comportement hyperélastique des élastomères est incompressible dans le cas général. La contrainte d'incompressibilité en déformations planes, axisymétriques ou tridimensionnelles sera résolue par une modélisation éléments finis en utilisant des éléments mixtes performants comme les éléments mixtes en pression-dilatation ou les formulations enrichies (Miehe, 1994) avec éventuellement l'introduction d'une formulation lagrangienne augmentée (Simo *et al.*, 1991). Dans le cas de contraintes planes, le tenseur de contraintes  $\mathcal{S}$  et le module tangent  $\mathcal{C}$  se voient modifiés pour tenir compte de l'hypothèse de contraintes planes incompressibles.

### 3.1. Hyperélasticité isotrope

Les tenseurs de contraintes et de Cauchy-Green droit, dans le cas de contraintes planes, sont donnés par :

$$\mathcal{S}_{iso} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad [16]$$

Avec l'hypothèse d'incompressibilité le troisième invariant du tenseur de Cauchy-Green est égal à l'unité  $I_3 = J^2 = 1$ . En imposant la condition d'incompressibilité, on peut écrire :

$$C_{33} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \quad [17]$$

Ainsi, le tenseur de Cauchy-Green et son inverse seront :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{22}C_{33} & -C_{12}C_{33} & 0 \\ -C_{12}C_{33} & C_{11}C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1/C_{33} \end{bmatrix} \quad [18]$$

Les deux premiers invariants de ce tenseur seront exprimés par :

$$\begin{cases} I_1 = C_{11} + C_{22} + 1/(C_{11}C_{22} - C_{12}^2) \\ I_2 = \frac{1}{2} \left( I_1^2 - \left( C_{11}^2 + C_{22}^2 + 1/(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)^2 + 2C_{12}^2 \right) \right) \end{cases} \quad [19]$$

La dérivée de l'expression  $C_{33}$  [17] par rapport à  $\mathbf{C}$  est donnée par :

$$\frac{\partial C_{33}}{\partial \mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -C_{33} \mathbf{C}_{2 \times 2}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{2 \times 2}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{22}C_{33} & -C_{12}C_{33} \\ -C_{12}C_{33} & C_{11}C_{33} \end{bmatrix} \quad [20]$$

où  $\mathbf{C}_{2 \times 2}^{-1}$  est l'inverse du tenseur  $\mathbf{C}$  obtenu en ne tenant compte que des quatre termes non nuls dans le plan. Les dérivées des deux premiers invariants par rapport au tenseur  $\mathbf{C}_{2 \times 2}$  deviennent :

$$\begin{cases} \partial I_1 / \partial \mathbf{C}_{2 \times 2} = \mathbf{I}_{2 \times 2} - C_{33} \mathbf{C}_{2 \times 2}^{-1} \\ \partial I_2 / \partial \mathbf{C}_{2 \times 2} = I_1 \mathbf{I}_{2 \times 2} - \mathbf{C}_{2 \times 2} - C_{33} (I_1 - C_{33}) \mathbf{C}_{2 \times 2}^{-1} \end{cases} \quad [21]$$

où  $\mathbf{I}_{2 \times 2}$  et  $\mathbf{C}_{2 \times 2}$  sont des tenseurs plans. Dans la suite du développement, nous ne considérons que des tenseurs plans et les indices 2x2 sont éliminés pour simplifier les notations.

Si on adopte les désignations,  $(\partial W / \partial I_i = W_{,i})$ , on aura l'expression du tenseur des contraintes :

$$\mathbf{S}_{iso} = 2 \sum_{i=1}^2 W_{iso,i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} = \alpha_{iso}^1 \mathbf{I} + \alpha_{iso}^2 \mathbf{C} + \alpha_{iso}^3 \mathbf{C}^{-1} \quad [22]$$

où les fonctions  $(\alpha_{iso}^i)_{i=1,3}$  sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_{iso}^1 = 2(W_{iso,1} + I_1 W_{iso,2}), & \alpha_{iso}^2 = -2W_{iso,2} \\ \alpha_{iso}^3 = -C_{33} \alpha_{iso}^1 - C_{33}^2 \alpha_{iso}^2 \end{cases} \quad [23]$$

L'hypothèse de contraintes planes peut être facilement vérifiée avec les relations [22] et [23]. Le module tangent isotrope est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{iso} = & \delta_{iso}^1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \delta_{iso}^2 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{I}) + \delta_{iso}^3 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I}) \\ & + \delta_{iso}^4 \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} + \delta_{iso}^5 (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}) \\ & + \delta_{iso}^6 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \delta_{iso}^7 I_{C^{-1}} + \delta_{iso}^8 I \end{aligned} \quad [24]$$

où nous avons utilisé les notations suivantes :

$$\left( I_{C^{-1}} \right)_{ijkl} = \frac{1}{2} (C^{-1}_{ik} C^{-1}_{jl} + C^{-1}_{il} C^{-1}_{jk}), \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad [25]$$

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad [26]$$

Les fonctions  $(\delta_{iso}^i)_{i=1,8}$  sont données par les expressions suivantes (l'indice iso est éliminé des termes  $\delta_{iso}^i$  et  $W_{iso}$  pour simplification) :

$$\begin{cases} \delta^1 = 4(W_{,11} + 2I_1 W_{,12} + W_{,2} + I_1^2 W_{,22}), & \delta^2 = -4(W_{,12} + I_1 W_{,22}) \\ \delta^3 = -4C_{33} (W_{,11} + I_1 W_{,12} + W_{,2} + (I_1 - C_{33})(W_{,12} + I_1 W_{,22})) \\ \delta^4 = 4W_{,22}, & \delta^5 = 4C_{33} (W_{,12} + (I_1 - C_{33})W_{,22}) \\ \delta^6 = -2\alpha_3 + 4C_{33}^2 (W_{,11} + 2(I_1 - C_{33})W_{,12} + (I_1 - C_{33})^2 W_{,22}) \\ \delta^7 = -2\alpha_3, & \delta^8 = 2\alpha_2 = -4W_{,2} \end{cases} \quad [27]$$

Nous remarquons que dans le cas de contraintes planes le tenseur de contraintes et le module tangent isotrope sont modifiés, par rapport au cas tridimensionnel (Holzapfel, 2000). Le tenseur d'élasticité [24] représente la forme explicite générale dans le cas de l'hypothèse de contraintes planes incompressibles en termes des invariants.

### 3.2. Hyperélasticité transversalement isotrope

L'énergie libre anisotrope selon l'équation [8], en imposant la condition d'incompressibilité, s'écrit sous la forme :

$$W_{aniso} = W_{aniso}(I_1, I_2, I_4, I_5) \quad [28]$$

La partie anisotrope du tenseur de contraintes est alors :

$$\mathbf{S}_{aniso} = 2 \sum_{i=1,2,4,5} \frac{\partial W_{aniso}(I_1, I_2, I_4, I_5)}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \quad [29]$$

Les invariants  $(I_4, I_5)$  (équation [6]), sont indépendants du terme  $C_{33}$  puisque la direction des fibres  $\mathbf{a}_0$  est dans le plan tangent. D'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_0)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \\ \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{a}_0)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 \end{cases} \quad [30]$$

Ces deux expressions de l'équation [30] sont générales et valables aussi bien pour le cas plan ou tridimensionnel. Le tenseur de contraintes anisotropes s'écrit alors :

$$\mathbf{S}_{aniso} = \alpha_{aniso}^1 \mathbf{I} + \alpha_{aniso}^2 \mathbf{C} + \alpha_{aniso}^3 \mathbf{C}^{-1} + \alpha_{aniso}^4 \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} + \alpha_{aniso}^5 \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} \quad [31]$$

Les fonctions  $(\alpha_{aniso}^i)_{i=1,3}$  sont données par l'équation [23] en remplaçant  $W_{iso}$  par  $W_{aniso}$ . Les termes  $\alpha_{aniso}^4$  et  $\alpha_{aniso}^5$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$\alpha_{aniso}^4 = 2W_{aniso,4}, \quad \alpha_{aniso}^5 = 2W_{aniso,5} \quad [32]$$

Le module tangent anisotrope est alors :

$$\mathcal{C}_{aniso} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{aniso}}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathcal{C}_{aniso} = \mathcal{C}_{aniso}^1 + \mathcal{C}_{aniso}^2 \quad [33]$$

Le tenseur  $\mathcal{C}_{aniso}^1$  a la même forme que le tenseur  $\mathcal{C}_{iso}$  de l'équation [24] en remplaçant les  $(\delta_{iso}^i)_{i=1,8}$  par  $(\delta_{aniso}^i)_{i=1,8}$  fonctions de  $W_{aniso}$ . Le tenseur  $\mathcal{C}_{aniso}^2$  est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{aniso}^2 = & \delta_9 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{I}) \\ & + \delta_{10} (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) + \delta_{11} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C}) \\ & + \delta_{12} (\mathbf{I} \otimes \partial I_5 / \partial \mathbf{C} + \partial I_5 / \partial \mathbf{C} \otimes \mathbf{I}) + \delta_{13} (\mathbf{C} \otimes \partial I_5 / \partial \mathbf{C} + \partial I_5 / \partial \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}) \\ & + \delta_{14} (\partial I_5 / \partial \mathbf{C} \otimes \partial I_5 / \partial \mathbf{C}) + \delta_{15} (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \partial I_5 / \partial \mathbf{C} + \partial I_5 / \partial \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \\ & + \delta_{16} (\partial I_5 / \partial \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \partial I_5 / \partial \mathbf{C}) \\ & + \delta_{17} (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) + \delta_{18} (\partial^2 I_5 / \partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}) \end{aligned} \quad [34]$$

avec  $(\delta_i)_{i=9,18}$  sont :

$$\begin{cases} \delta_9 = 4(W_{,14} + I_1 W_{,24}), & \delta_{10} = 4W_{,44}, & \delta_{11} = -4W_{,24} \\ \delta_{12} = 4(I_1 W_{,25} + W_{,15}), & \delta_{13} = -4W_{,25}, & \delta_{14} = 4W_{,55} \\ \delta_{15} = 4W_{,45}, & \delta_{16} = 4W_{,34}, & \delta_{17} = 4I_3 W_{,34}, & \delta_{18} = 4W_{,5} \end{cases} \quad [35]$$

et le terme  $\partial^2 I_5 / \partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}$  est donné dans le cas tridimensionnel sous la forme matricielle

$$[I_{5,cc}] = \begin{bmatrix} 2a_1^2 & 0 & 0 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & 0 \\ 0 & 2a_2^2 & 0 & a_1 a_2 & 0 & a_2 a_3 \\ 0 & 0 & 2a_3^2 & 0 & a_1 a_3 & a_2 a_3 \\ a_1 a_2 & a_1 a_2 & 0 & \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) & \frac{1}{2} a_2 a_3 & \frac{1}{2} a_1 a_3 \\ a_1 a_3 & 0 & a_1 a_3 & \frac{1}{2} a_2 a_3 & \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2) & \frac{1}{2} a_1 a_2 \\ 0 & a_2 a_3 & a_2 a_3 & \frac{1}{2} a_1 a_3 & \frac{1}{2} a_1 a_2 & \frac{1}{2}(a_2^2 + a_3^2) \end{bmatrix} \quad [36]$$

où les  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont les composantes du vecteur unitaire de la direction des fibres dans la configuration initiale. Dans le cas plan ( $a_3 = 0$ ), nous obtenons la forme réduite en contraintes planes suivante :

$$[I_{5,CC}] = \begin{bmatrix} 2a_1^2 & 0 & a_1a_2 \\ 0 & 2a_2^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_1a_2 & \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) \end{bmatrix} \quad [37]$$

Ceci complète le développement du tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  et du module tangent matériel  $\mathbf{C}$  dans le cas de contraintes planes hyperélastique incompressible isotrope et transversalement isotrope.

#### 4. Formulation éléments finis

La formulation éléments finis est basée sur l'élément membrane quadrilatéral à quatre nœuds. Nous utilisons un modèle déplacement avec une description matérielle. Le principe des travaux virtuels dans la configuration déformée est :

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = G_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - G_{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0, \quad G_{int} = \int_{V_0} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} h dV_0 \quad [38]$$

avec  $G_{int}$  et  $G_{ext}$  sont respectivement les travaux virtuels des efforts intérieurs et extérieurs et  $\delta \mathbf{E} = [\delta E_{11} \quad \delta E_{22} \quad \delta E_{33}]$  est le vecteur des déformations virtuelles de membrane de Green-Lagrange. La procédure de linéarisation donne l'expression suivante pour la partie interne

$$DG_{int} \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{V_0} \delta \mathbf{E} \mathbf{C} \Delta \mathbf{E} h dV + \int_{V_0} \Delta \delta \mathbf{E} \mathbf{S} h dV \quad [39]$$

ce qui permet de construire la matrice tangente. Une discussion plus détaillée de la présente formulation ainsi que la contribution des efforts de pression normale sont données dans (Gruttmann *et al.*, 1992). Le développement de l'élément est présenté en Annexe I. La méthode de résolution de Newton-Raphson est utilisée pour la résolution du problème non linéaire.

#### 5. Résultats numériques

Dans le but de démontrer la performance du modèle constitutif décrivant le comportement anisotrope des élastomères, nous étudions quatre exemples. Dans tous les tests proposés, la modélisation par éléments finis est basée sur l'élément quadrilatéral à quatre nœuds. Nous avons utilisé la fonction énergie libre isotrope du Mooney-Rivlin incompressible qui s'écrit sous la forme suivante :

$$W_{iso} = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad [40]$$

### 5.1. Epreuve S<sub>ENT</sub> sollicitée en contraintes planes

Dans cet exemple, l'étude sera concentrée sur une éprouvette de type S<sub>ENT</sub> à entaille latérale et schématisée sur la figure 1a. Le matériau est le polybutadiène hyperélastique isotrope caractérisé par (Aît Houcine, 1996) avec le modèle de Mooney Rivlin dont les constantes sont :  $C_1 = 0.0156 \text{ MPa}$  et  $C_2 = 0.00967 \text{ MPa}$ .

Les résultats expérimentaux, avec différentes longueurs d'entaille (a), sont tirés des travaux de (Aît Houcine, 1996). Les éprouvettes S<sub>ENT</sub> utilisées ont les dimensions suivantes : hauteur  $h = 200 \text{ mm}$ , largeur  $w = 40 \text{ mm}$  et épaisseur  $e = 4,5 \text{ mm}$  (figure 1a). Les résultats numériques ont été effectués en variant la longueur de l'entaille latérale. L'utilisation d'une plaque de faible épaisseur permet de traiter le problème de contraintes planes. La modélisation est effectuée en prenant en compte la symétrie géométrique de l'éprouvette S<sub>ENT</sub>. En effet, dans les analyses de simulation, seule la moitié de l'éprouvette est prise en compte. Un exemple de maillage est donné sur la figure 1b. Le choix du maillage a été effectué d'une manière à augmenter la densité des éléments au voisinage du fond d'entaille. Nous présentons sur la figure 2 la déformée de l'éprouvette soumise à un chargement de 7N. Les courbes numériques et expérimentales de l'effort appliqué en fonction du déplacement sont représentées sur la figure 3 avec trois valeurs différentes du rapport  $a/w = 0,3 ; 0,5 ; 0,7$ .

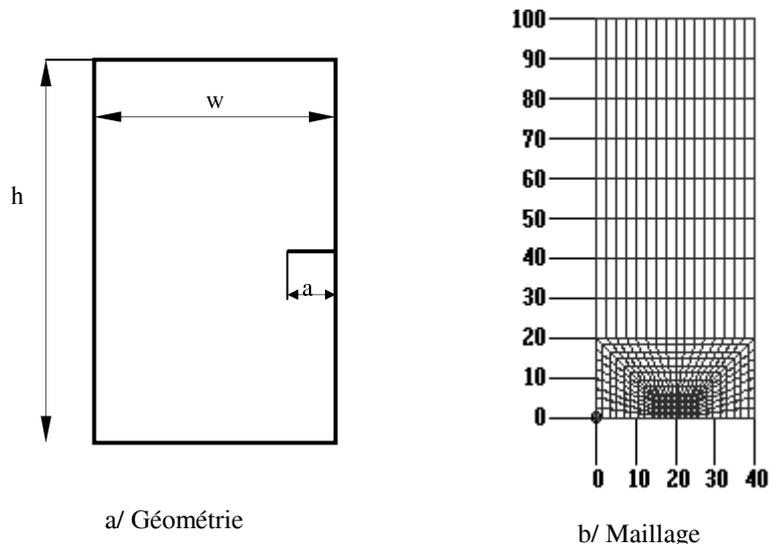
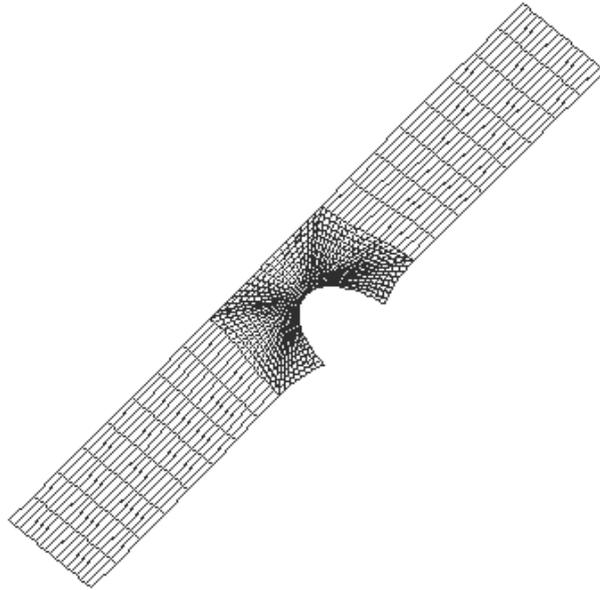
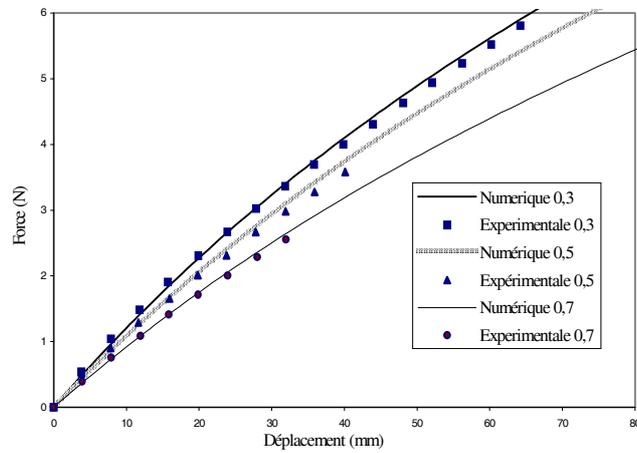


Figure 1. Epreuve S<sub>ENT</sub> sollicitée en contraintes planes



**Figure 2.** Déformée réelle de l'éprouvette SENT,  $a/w = 0.5$ ,  $F = 7N$

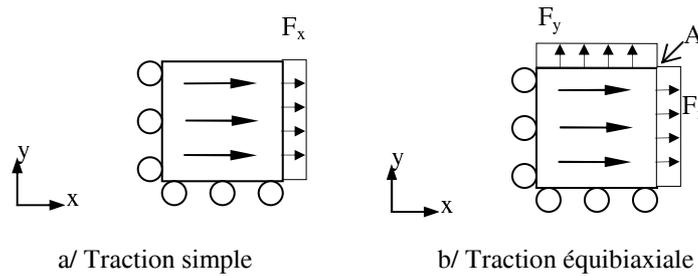


**Figure 3.** Courbes charges-déplacements

Nous observons que le modèle Mooney-Rivlin avec les paramètres choisis, décrit bien le comportement du polybutadiène considéré.

### 5.2. Déformation homogène d'une éprouvette transversalement isotrope

Ce test concerne l'étude d'une plaque transversalement isotrope en déformation homogène. La plaque est renforcée par une famille de fibres de direction  $x$  sous un chargement de traction uniaxiale ou équibiaxiale (figure 4).



**Figure 4.** Conditions aux limites et chargement d'une plaque en traction

Les deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  de la fonction énergie libre isotrope de Mooney Rivlin de l'équation [40] sont :

$$C_1 = 0.01 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad C_2 = 0.01 \text{ MPa}$$

Pour définir complètement le comportement transversalement isotrope, une fonction présentant la partie anisotrope de l'énergie de déformation doit être choisie. Une fonction exponentielle est proposée dans (Gasser *et al.*, 2002).

$$W_{\text{aniso}} = A_1 \left( \exp \left[ A_2 (I_4 - 1)^2 \right] - 1 \right) \quad [41]$$

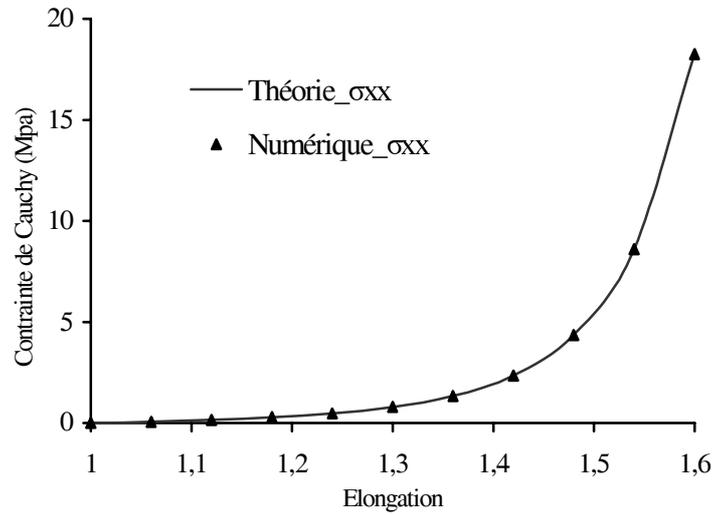
avec  $A_1 = 0.1 \text{ MPa}$  et  $A_2 = 1.0 \text{ MPa}$ .

La plaque mince de dimensions ( $1 \times 1 \times 10^{-3} \text{ mm}^3$ ) est considérée en contraintes planes. Les résultats de la simulation numérique, obtenus par un control en déplacement, sont comparés aux résultats analytiques donnés en Annexe II.

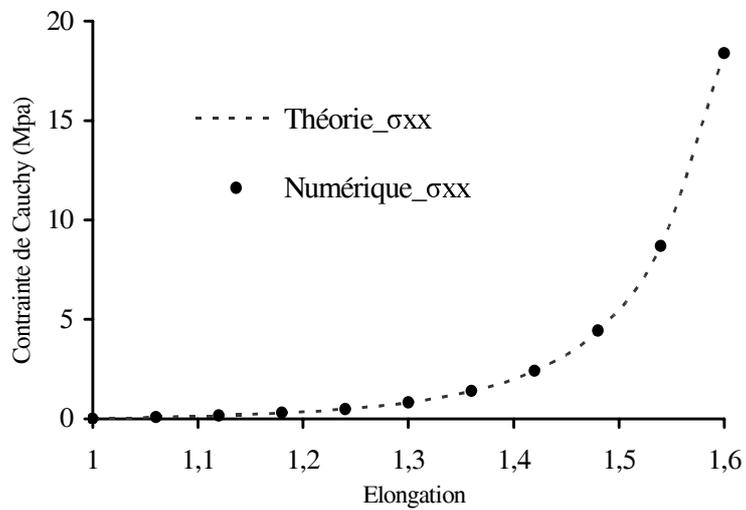
Sur les figures 5, 6a et 6b sont présentées les courbes contraintes-élongations numériques et analytiques dans les cas respectifs uniaxiale et équibiaxiale.

Les figures 5 et 6a et 6b montrent un bon accord entre les résultats numériques obtenus par la formulation proposée et la solution analytique. Une convergence asymptotique quadratique est observée dans tous les tests. Un exemple de

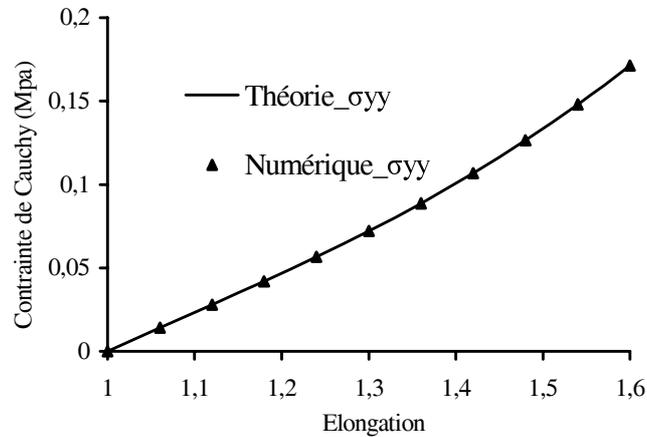
convergence est illustré au tableau 1 lorsque toute la charge est appliquée en un seul pas donnant une élongation de 60 % en uniaxiale.



**Figure 5.** Résultats numérique et analytique de la plaque en traction uniaxiale



**Figure 6a.** Résultats numérique et analytique de la plaque en traction équilibaxiale



**Figure 6b.** Résultats numérique et analytique de la plaque en traction équi-biaxiale

Itérations	Norme sur l'énergie
1	0.100 E+1
2	3.765 E-3
3	1.169 E-4
4	1.084 E-6
5	9.199 E-14

**Tableau 1.** Convergence en un seul pas (60 %)

### 5.3. Problème de Cook avec des fibres orientées

Cet exemple consiste en une poutre inclinée soumise à une charge en son extrémité libre (figure 7). Un comportement hyperélastique transversalement isotrope est supposé avec les propriétés matérielles suivantes : les deux constantes de la partie isotrope sont :  $C_1 = 0.01 \text{ MPa}$  et  $C_2 = 0.01 \text{ MPa}$  et les deux constantes de la partie anisotrope [39] sont :  $A_1 = 0.1 \text{ MPa}$  et  $A_2 = 1.0 \text{ MPa}$ .

Le chargement est augmenté avec des incréments de  $\Delta F = 0.01 \text{ N}$  jusqu'à la valeur finale, choisie égale à  $0.1 \text{ N}$ . La configuration déformée réelle en fin du chargement est montrée sur la figure 8 avec un maillage de  $20 \times 20$ .

La figure 9 présente le déplacement vertical du sommet libre supérieur en fonction de l'angle d'inclinaison des fibres. Nous remarquons que la structure est plus rigide quand les fibres sont orientées selon la structure (entre  $30^\circ$  et  $45^\circ$ ) et plus flexible lorsque la direction des fibres est le long de l'axe  $Y$  parallèle à la direction du chargement ( $90^\circ$ ).

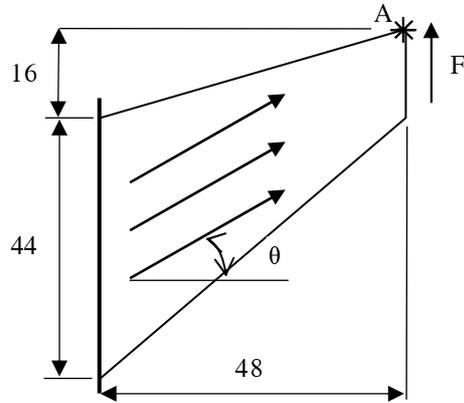


Figure 7. Problème de Cook

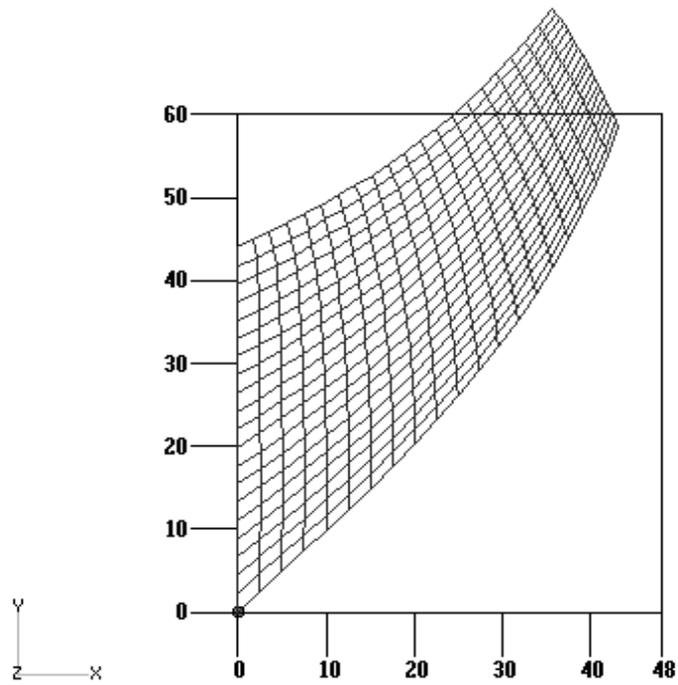
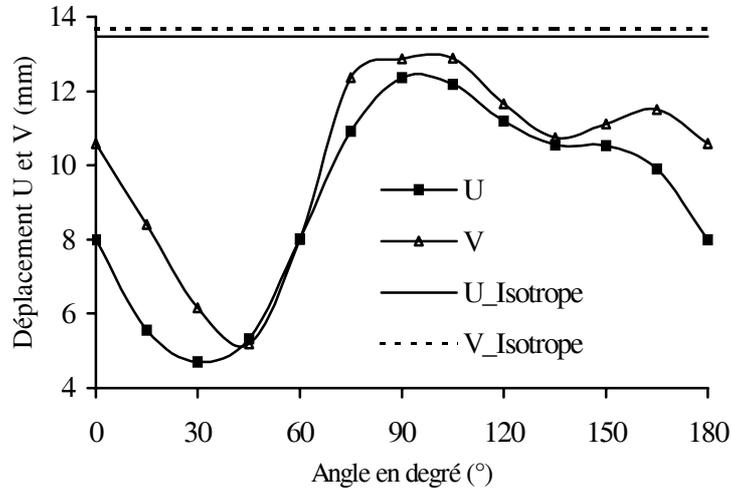


Figure 8. Déformée réelle pour angle =  $90^\circ$



**Figure 9.** Déplacement  $U$  et  $V$  au point  $A$  en fonction de la direction des fibres

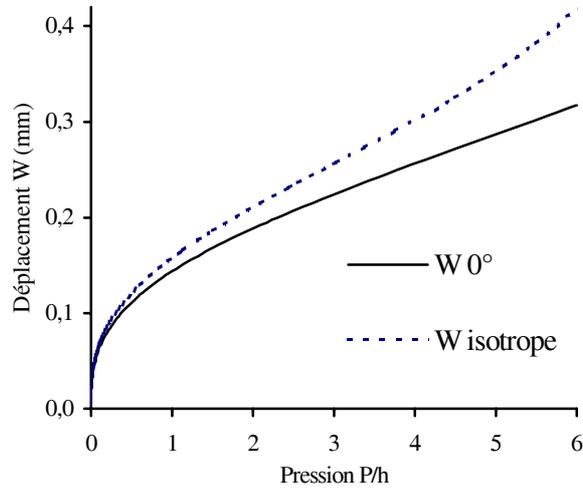
#### 5.4. Gonflement d'une membrane

Ce test a été étudié dans (Kyriacou *et al.*, 1996 ; Chevaugon *et al.*, 2000). Il consiste en une membrane carrée de côté  $L = 1$  mm et d'épaisseur  $h = 10^{-3}$  mm soumise à une pression normale de valeur maximale de  $P = 6h$ . Un comportement hyperélastique transversalement isotrope est supposé avec les propriétés matérielles suivantes : les deux constantes de la partie isotrope sont :  $C_1 = 1.0$  MPa et  $C_2 = 0.0$  MPa et la partie anisotrope est de la forme :

$$W_{aniso} = \frac{1}{2}(I_4 - 1)^2 \quad [42]$$

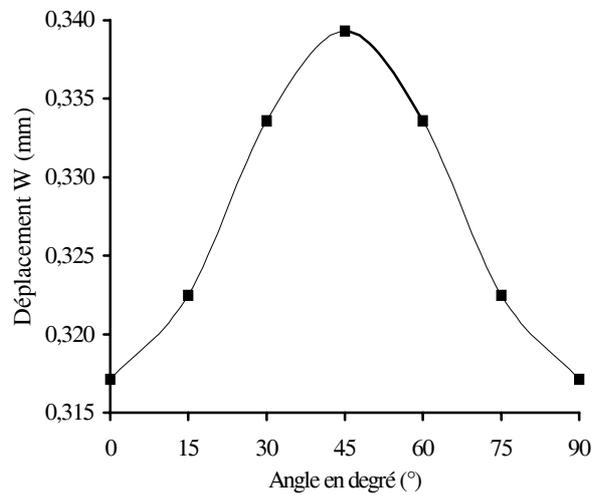
Dans (Kyriacou *et al.*, 1996 ; Chevaugon *et al.*, 2000) les auteurs ont utilisé une fonction anisotrope de la forme  $W_{aniso} = I_4$  qui ne respecte pas la configuration initiale libre de contraintes. Pour le démarrage de la résolution, une perturbation géométrique est donnée à la membrane de valeur maximale  $0,5h$  au centre de la membrane.

Sur la figure 10 nous avons représenté les courbes charge-déplacement au centre de la membrane dans le cas isotrope et pour une orientation de la fibre de  $0^\circ$  par rapport à l'axe  $\mathbf{X}$  dans le cas transversalement isotrope.



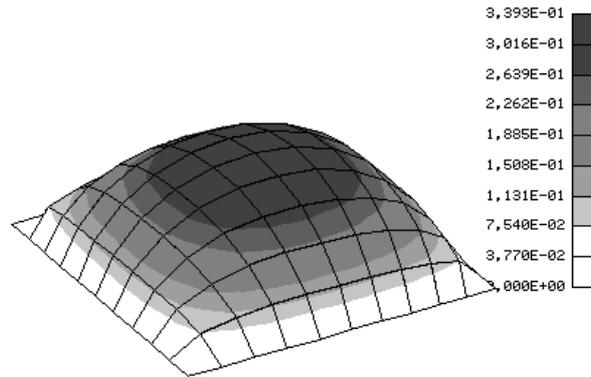
**Figure 10.** Courbe pression-déplacement  $W$  au centre de la membrane

Sur la figure 11 est présentée la flèche maximale, au centre de la membrane, en fonction de l'angle d'orientation de la fibre. Comme cela a été remarqué dans (Kyriacou *et al.*, 1996 ; Chevaugéon *et al.*, 2000), l'allure de la flèche en fonction de l'angle d'orientation de la fibre est sinusoïdale.



**Figure 11.** Déplacement maximal  $W$  en fonction de la direction des fibres

La figure 12 présente un exemple de déformée réelle de la membrane, après application de toute la pression, pour une orientation de la fibre de  $45^\circ$ .



**Figure 12.** *Déplacement transversal sur la déformée réelle pour un angle de  $45^\circ$*

## 6. Conclusions

Dans ce travail, nous avons présenté un modèle constitutif pour les matériaux hyperélastique isotrope et transversalement isotrope dans le cas de contraintes planes incompressibles. Ce modèle constitutif est basé sur une décomposition de la fonction énergie en une composante isotrope et une composante anisotrope. Les dérivations originales du tenseur d'élasticité de la classe de matériaux ont été présentées. Les performances de la formulation décrite et l'exactitude des résultats numériques ont été démontrées avec quelques exemples représentatifs.

Le modèle exposé peut être étendu en utilisant pour la composante isotrope de la fonction énergie des expressions en termes des élongations principales tels que les modèles hyperélastiques d'Ogden. Nous remarquons aussi que la formulation et la mise en œuvre numérique discutées dans ce papier peuvent être étendues facilement pour la simulation des coques minces hyperélastiques incompressibles transversalement isotropes.

## 7. Bibliographie

- Aït Houcine N., Approche globale de la mécanique de la rupture appliquée aux élastomères, Thesis, de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, France, 1996.
- Bonet J., Burton A. J., "A Simple Orthotropic, Transversely Isotropic Hyperelastic Constitutive Equation for Large Strain Computations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 162, 1998, p. 151-164.

- Cazacu O., "A new hyperelastic model for transversely isotropic solids", *Mathematik und Physik ZAMP*, vol. 53, 2002, p. 901-911.
- Chevaugon N., Verron E., Peseux B., « Construction d'une loi de Comportement Isotrope Transverse pour la simulation du Thermoformage de Thermoplastiques Charges de Fibres », *XV<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique*, France, 2001, p. 259-264.
- Chevaugon N., Verron E., Peseux B., "Finite element analysis of nonlinear transversely isotropic hyperelastic membranes for thermoforging applications", *European Congress in Computation Methods in Applied Science and Engineering, ECCOMAS 2000*, Barcelona, September 2000.
- Ekh M., Runesson K., "Modeling and numerical issues in hyperelasto-plasticity with anisotropy", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, 2001, p. 9461-9478.
- Gasser T.C., Holzapfel G.A., "A rate-independent elastoplastic constitutive model for fiber-reinforced composites at finite strains: continuum basis, algorithmic formulation and finite element implementation", *Computational Mechanics*, 2002.
- Gruttmann F., Taylor R. L., "Theory and Finite Element Formulation of Rubberlike Membrane Shells Using Principal Stretches", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, 1992, p. 1111-1126.
- Holzapfel G. A., *Non linear solid mechanics*, Wiley, 2000.
- Holzapfel G. A., Eberlein R., Wriggers P., Weizsäcker H. W., "Large strain analysis of soft biological membranes: Formulation and finite element analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 132, 1996, p. 45-61.
- Kyriacou S. K., Schwab C., Humphrey J. D., "Finite Element Analysis of Nonlinear Orthotropic Hyperelastic Membranes", *Comput. Mech.*, vol. 18, 1996, p. 269-278.
- Libert G., Taylor M., "On the constitutive modeling of biological soft connective tissues, A general theoretical framework and explicit forms of the tensors of elasticity for strongly anisotropic continuum fiber-reinforced composites at finite strain", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, 2002, p. 2343-2358.
- Lürding D., Basar Y., Hanskötter U., "Application of transversely isotropic materials to multi-layer shell elements undergoing finite rotations and large strains", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, 2001, p. 9493-9503.
- Marvalova B., Urban R., "Identification of orthotropic hyperelastic material properties of cord-rubber cylindrical air-spring, Experimental Stress Analysis", *39 International Conference*, Czech Republic, 2001.
- Miehe C., "Aspect of the Formulation and Finite Element Implementation of Large Strain Isotropic Elasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, vol. 37, 1994, p. 1981-2004.
- Reese S., "Meso-macro modelling of fibre-reinforced rubber-like composites exhibiting large elastoplastic deformation", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, 2003, p. 951-980.
- Reese S., Raible T., Wriggers P., "Finite element modelling of orthotropic material behaviour in pneumatic membranes", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, 2001, p. 9525-9544.

- Simo J. C., Taylor R. L., “Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches: Continuum basis and numerical algorithms”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 85, 1991, p. 273-310.
- Spencer A. J. M., “Constitutive Theory for Strongly Anisotropic Solids”, A. J. M. Spencer (Ed.), *Continuum Theory of the Mechanics of Fiber-Reinforced Composites, CISM Courses and Lectures n° 282, International Center for Mechanical Sciences, Springer-Verlag, Wien*, 1984, p. 1-32.
- Walton J. R., Wilber J. P., “Sufficient condition for strong ellipticity for a class of anisotropic materials”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 38, 2003, p. 441-455.
- Weiss J. A., Maker B. N., Govindjee S., “Finite Element Implementation of Incompressible, Transversely Isotropic Hyperelasticity”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 135, 1996, p. 107-128.

**Annexe I. Élément membrane : modèle déplacement et description matérielle**

*Boucle sur les points d'intégration :*

- Fonctions d'interpolation et dérivées paramétriques :

$$N^I, \text{Grad}_\xi N^I$$

- Jacobien, son déterminant et son inverse :

$$J = \det(\mathbf{J}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{J}^{-T}$$

- Gradient matériel des fonctions d'interpolation

$$\text{Grad}_x N^I = \mathbf{j} \text{Grad}_\xi N^I$$

- Gradient de déformation :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \sum_{I=1}^{nnode} \mathbf{u}_I \otimes \text{Grad}_x N^I$$

- Contrainte et loi de comportement :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{S}_{iso} + \mathbf{S}_{aniso}$$

$$\mathbf{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}_{iso} + \mathbf{C}_{aniso}$$

- Résidu et matrice tangente matérielle et géométrique

$$\mathbf{G}_m^I = \int_V \mathbf{B}^{IT} \mathbf{S} dV$$

$$\mathbf{K}_m^{IJ} = \int_V \mathbf{B}^{IT} \mathbf{C} \mathbf{B}^J dV, \quad \mathbf{K}_g^{IJ} = \text{diag} \left( \int_V N_{,i}^I S_{ij} N_{,j}^J dV \right)$$

*Fin de la boucle*

**Annexe II. Solution analytique d'une plaque mince incompressible transversalement isotrope sous chargement dans les directions principales**

Les tenseurs de contraintes de Piola-Kirchhoff et de Cauchy dans le cas d'une plaque mince transversalement isotrope sont donnés par les relation suivantes :

$$\mathbf{S} = \alpha^1 \mathbf{I} + \alpha^2 \mathbf{C} + \alpha^3 \mathbf{C}^{-1} + \alpha^4 \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + \alpha^5 (\mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha^1 \mathbf{b} + \alpha^2 \mathbf{b}^2 + \alpha^3 \mathbf{I} + I_4 \alpha^4 \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + I_4 \alpha^5 (\mathbf{a} \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mathbf{a})$$

$\mathbf{C}$  étant le tenseur de Cauchy-Green droit,  $\mathbf{b}$  étant le tenseur de Cauchy-Green gauche,  $\mathbf{a}_0$  étant la direction de la famille de fibres dans la configuration initiale,  $\mathbf{a}$  étant la famille de fibres dans la configuration déformée et les termes  $\alpha^i$  sont :

$$\begin{cases} \alpha^1 = 2(W_{,1} + I_1 W_{,2}), & \alpha^2 = -2W_{,2} \\ \alpha^3 = -C_{33} \alpha^1 - C_{33}^2 \alpha^2 \\ \alpha^4 = 2W_{,4}, & \alpha^5 = 2W_{,5} \end{cases}$$

Dans le cas d'un chargement dans les directions principales du plan (x-y), le tenseur  $\mathbf{b}$  est de la forme :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad b_{11} b_{22} b_{33} = 1$$

alors les composants du tenseur des contraintes de Cauchy sont :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \alpha^1 (b_{11} - b_{33}) + \alpha^2 (b_{11}^2 - b_{33}^2) + 2I_4 a_1^2 (W_{,4} + 2b_{11} W_{,5}) \\ \sigma_{22} = \alpha^1 (b_{22} - b_{33}) + \alpha^2 (b_{22}^2 - b_{33}^2) + 2I_4 a_2^2 (W_{,4} + 2b_{22} W_{,5}) \\ \sigma_{12} = 2I_4 a_1 a_2 (W_{,4} + (b_{11} + b_{22}) W_{,5}) \end{cases}$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{a}$  :

**i/ Cas d'une traction uniaxiale selon l'axe x**

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$$

**ii/ Cas d'un chargement proportionnel**

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k^2\lambda^4} \end{bmatrix}$$

où  $k$  est le coefficient de proportionnalité de chargement dans les directions  $x$  et  $y$ .  
Le cas équibiaxiale correspond à  $k=1$ .