

---

# Une méthode d'homogénéisation pour l'analyse modale d'un problème d'interaction fluide/structure

**Daniel Broc\*** — **Jean-François Sigrist\*\***

\* *Laboratoire d'Etude de Mécanique Sismique*  
CEA Saclay  
91191 Gif-sur-Yvette

\*\* *Service Technique et Scientifique*  
DCN propulsion  
44620 La Montagne  
jean-francois.sigrist@dcn.fr

---

*RÉSUMÉ. Le présent article propose une méthode d'homogénéisation appliquée à l'étude d'un problème couplé fluide/structure. La méthode est exposée sur un cas bidimensionnel pour lequel la formulation du problème couplé structure/fluide homogénéisé est rappelée. L'approche proposée conduit à modifier les opérateurs classiques d'interactions fluide/structure en formulation symétrique  $(\mathbf{u}, p, \varphi)$ . On démontre théoriquement la consistance de la méthode en faisant un bilan des masses modales des modes couplés et on propose un cas de validation élémentaire. La méthode ainsi développée sera utilisée pour l'analyse sismique d'un réacteur nucléaire avec modélisation de détails structurels internes au réacteur.*

*ABSTRACT. The present paper deals with an homogenization method applied to a coupled fluid-structure problem. The method is exposed in details on a 2D elementary case for which the coupled fluid-structure formulation is developed. The proposed method leads to the modification of usual fluid-structure coupling operators in symmetric formulation. Its physical consistency is then demonstrated with a calculation of the cumulated modal masses for the coupled eigenmodes and an elementary validation is performed. The method can be applied for the seismic analysis of a nuclear reactor.*

*MOTS-CLÉS : interaction fluide/structure, analyse modale, homogénéisation.*

*KEYWORDS: fluid-structure interaction, modal analysis, homogenization approach.*

---

## 1. Introduction

### 1.1. Contexte et objectif de l'étude

Le présent article expose une méthode d'homogénéisation proposée afin de permettre l'analyse sismique d'un réacteur nucléaire avec prise en compte de détails structurels internes au réacteur. La méthode est développée dans le cadre d'une collaboration scientifique entre CEA Saclay et DCN Propulsion autour de la problématique du dimensionnement au séisme d'un prototype à terre de réacteur de propulsion navale avec prise en compte des effets d'interactions fluide/structure. Des études précédentes ont été menées sur une géométrie axisymétrique du réacteur et ont permis de mettre en évidence l'importance des phénomènes d'interactions fluide/structure dans le cas industriel (Sigrist *et al.*, 2005b). Les études industrielles réalisées jusqu'à maintenant ne prenaient pas en compte les détails de géométrie interne du réacteur (Sigrist *et al.*, 2005a).

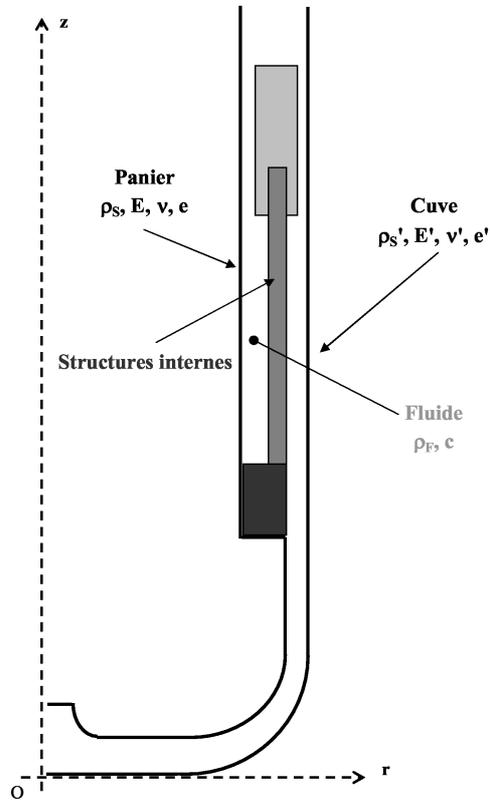
La figure 1 donne une représentation simplifiée de la géométrie du réacteur, constituée de l'enveloppe résistante (cuve), de structures internes et de la structure de support du cœur (panier).

L'objet de la présente étude est de proposer une méthode permettant de prendre en compte la présence des structures internes sans en modéliser complètement les détails géométriques. Les structures internes étant réparties de façon périodique autour du panier et de la cuve, on propose d'utiliser une méthode d'homogénéisation<sup>1</sup> du fluide contenant des inclusions solides. Ce type de méthode a été développé par exemple dans le domaine nucléaire pour la modélisation de faisceaux de tubes d'échangeurs de chaleur, voir par exemple (Planchard *et al.*, 1983), ou pour la modélisation de cœurs de réacteurs (Broc *et al.*, 2003) ou de générateurs de vapeur (Cheval, 2001).

On expose dans cet article une application de ces méthodes au cas d'étude industriel. L'originalité de l'approche proposée réside dans le fait que la méthode ainsi développée permet l'analyse dynamique du problème d'interaction fluide/structure par des méthodes spectrales en formalisant un calcul des fréquences propres, des modes propres et des masses modales du système couplé. On s'attache en particulier à intégrer la description homogénéisée du fluide dans la formulation classique du problème couplé en  $(\mathbf{u}, p, \varphi)$  (Morand *et al.*, 1995) sans introduire d'inconnues supplémentaires pour le problème fluide, ce qui permet sa mise en œuvre de façon directe avec un code éléments finis. On démontre également la consistance physique de la méthode par un calcul de conservation de la masse en calculant de façon théorique le cumul des masses modales pour les modes propres du système couplé, ce point n'ayant pas été abordé de façon systématique dans les précédentes études citées.

---

1. Une approche mathématique détaillée du fondement de ce type de méthodes dans le cas de problèmes de couplage fluide/structure est proposée par exemple par (Conca *et al.*, 1994) et (Vanninathan, 1979).

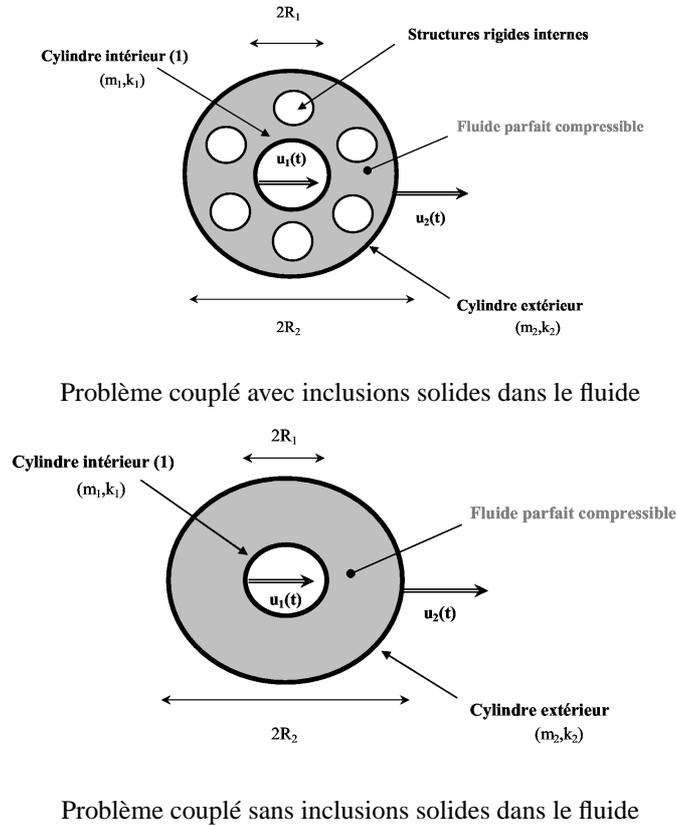


**Figure 1.** *Modèle simplifié d'un réacteur nucléaire avec structures internes*

### 1.2. Problème étudié

Le problème générique étudié dans cet article est représenté par la figure 2 et correspond à une tranche élémentaire du cas industriel. On considère le cas de deux cylindres concentriques avec inclusions solides périodiques dans l'espace annulaire<sup>2</sup>. La méthode proposée a pour but de mettre en œuvre un calcul couplé sur un système couplé fluide structure sans inclusion et ce de façon équivalente à une approche basée sur une modélisation du système avec inclusions fluide.

2. Ce modèle correspond au cas de (Fritz, 1972) avec inclusion solide et constitue un modèle simple des phénomènes de couplage entre deux structures cylindriques couplées par un fluide.



**Figure 2.** *Problème couplé fluide/structure avec et sans inclusions solides dans le fluide*

## 2. Principe de la méthode d'homogénéisation

### 2.1. Hypothèses générales

Le cadre général d'étude est relatif à la description de phénomènes de couplage fluide/structure pour l'ensemble panier/cuve d'un réacteur nucléaire. L'importance relative des différents effets peut être quantifiée à partir de l'évaluation de nombres adimensionnels construits à partir des caractéristiques physiques et géométriques du problème couplé (DeLangre, 2001) :

- le nombre de masse  $\mathcal{M} = \frac{\rho_S}{\rho_F}$  quantifie l'importance des effets inertiels ;
- le nombre de compressibilité  $\mathcal{C} = \frac{1}{c} \times \sqrt{\frac{E}{\rho_S}}$  permet d'évaluer l'influence des effets de compressibilité du fluide ;
- le nombre de Stokes  $\mathcal{S} = \frac{\lambda^2 \tau}{\nu}$  mesure l'importance des phénomènes dissipatifs dus à la viscosité du fluide ;
- le nombre de Froude dynamique  $\mathcal{F} = \sqrt{\frac{E}{\rho_S g \eta}}$  permet de mesurer l'importance des phénomènes de ballonnement (dans le cas de problèmes avec surface libre).

$\rho_S$  et  $\rho_F$  sont les masses volumiques de la structure et du fluide,  $E$  est le module d'Young de la structure,  $\lambda$  et  $\eta$  sont les dimensions caractérisant respectivement le confinement et l'élanement de la géométrie des structures,  $\tau$  est une durée caractéristique de l'excitation appliquée aux structures (séisme pour les prototypes à terre, choc pour les matériels embarqués),  $c$  est la vitesse des ondes sonores dans le fluide,  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

Les phénomènes concernés sont d'autant plus importants que le nombre sans dimension qui les caractérise est proche de l'unité. Le tableau 1 donne les ordres de grandeur de ces nombres sans dimension dans le cas de structures nucléaires de propulsion navale.

Nombre	Ordre de grandeur
$\mathcal{M}$	$10^0 - 10^1$
$\mathcal{F}$	$10^4 - 10^5$
$\mathcal{C}$	$10^0 - 10^1$
$\mathcal{S}$	$10^5 - 10^6$

**Tableau 1.** *Ordre de grandeur de nombres adimensionnels caractéristiques de l'interaction fluide/structure pour les structures nucléaires de propulsion navale*

Les effets de couplage fluide/structure à prendre en compte sont les effets inertiels, et dans une moindre mesure les effets de compressibilité du fluide. Les effets dissipatifs ou les effets de ballonnement (dans le cas de capacités avec surface libre) sont d'une importance moindre pour les applications industrielles concernées par la présente étude, qui a donc pour objet de décrire les effets d'*interaction fluide/structure*, c'est-à-dire l'étude des vibrations d'une structure au contact d'un fluide initialement au repos (Axisa, 2001).

L'application envisagée de la méthode est relative au dimensionnement sismique de l'ensemble panier/cuve d'un réacteur nucléaire ; conformément aux pratiques définies par les réglementations en vigueur dans le domaine nucléaire (ASME, 2004), l'analyse sismique est conduite en supposant que le fluide est *au repos*<sup>3</sup>. Il s'agira de décrire les fluctuations de pression, de vitesse et de masse volumique (notés respectivement  $p$ ,  $\mathbf{v} = (v_i)$  et  $\rho$ ) autour d'un état d'équilibre statique, caractérisé par les grandeurs  $p_o, \mathbf{v}_o, \rho_o$ . Les équations de comportement du fluide sont obtenues par linéarisation des équations de Navier-Stokes autour de l'état de référence, et s'écrivent :

– conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad [1]$$

– conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_o \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad [2]$$

– loi d'état

$$p = \rho c^2 \quad [3]$$

avec  $c$  la célérité des ondes sonores dans le milieu fluide, donnée par :

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{(p_o, \rho_o)}} \quad [4]$$

La condition de couplage du fluide avec une paroi mobile animée d'un mouvement  $\mathbf{u}$  s'écrit par ailleurs :

$$v_i n_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} n_i \quad [5]$$

Le principe de la méthode d'homogénéisation est de proposer une description à l'échelle globale du fluide, en utilisant une loi de comportement modifiée pour prendre en compte la présence des inclusions solides réparties de façon périodique. La loi de comportement à l'échelle globale est obtenue à partir d'un calcul réalisé à l'échelle locale, c'est-à-dire à l'échelle d'une cellule (voir figure 3). On note  $\Omega_T$  le volume de la cellule élémentaire,  $\Omega_S$  le volume occupé par une inclusion solide,  $\Omega_F$  le volume occupé par le fluide, de sorte que  $\Omega_T = \Omega_S \cup \Omega_F$ .

Les inconnues du problème fluide  $\mathbf{v}, p$  sont écrites sous forme d'un développement asymptotique :

$$p_\epsilon = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k p^k(X, x) \quad \mathbf{v}_\epsilon = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \mathbf{v}^k(X, x) \quad [6]$$

3. Une extension de la méthode avec prise en compte des effets d'écoulement longitudinal ou axial peut néanmoins être envisagée pour d'autres applications.



D'autre part, l'équation de conservation de la masse homogénéisée s'écrit en tenant compte de la relation d'état du fluide (Hammami, 1991) :

$$p^o = -\rho_o c^2 \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}^o + \frac{|\Omega_S|}{|\Omega_T|} \dot{\mathbf{u}}) \quad [9]$$

où  $\bar{\mathbf{v}}^o$  est la vitesse moyenne du fluide sur  $\Omega_F$ .

On note  $p$  le champ de pression homogénéisé, c'est-à-dire  $p = p^o$ .  $\mathbf{u}_F$  est le champ de déplacement dans le domaine fluide  $\Omega_F$  : à l'échelle de la cellule  $\dot{\mathbf{u}}_F$  s'identifie à  $\dot{\mathbf{v}}^o$ . L'inclusion solide est supposée rigide, son déplacement est noté  $\mathbf{u}_S$  et s'identifie à  $\mathbf{u}^o$ . On désigne maintenant la masse volumique du fluide à l'état de référence par  $\rho_F$  afin de faire la distinction avec la masse volumique de la structure, notée  $\rho_S$ .

En intégrant la relation [7] au niveau de la cellule élémentaire  $\Omega_T$ , on écrit au niveau global, c'est-à-dire pour le fluide homogénéisé, la relation :

$$\rho_F \ddot{\mathbf{U}}_F = -(1 - J) \nabla p + J \rho \ddot{\mathbf{u}}_S \quad [10]$$

où on a défini le champ de déplacement fluide moyen  $\mathbf{U}_F$  comme (Broc *et al.*, 2003) :

$$\mathbf{U}_F = \frac{|\Omega_S|}{|\Omega_T|} \mathbf{u}_S + \frac{1}{|\Omega_T|} \int_{\Omega_F} \mathbf{u}_F d\Omega_F \quad [11]$$

$J \in [0, 1]$  est le *coefficient de confinement*, qui caractérise l'encombrement du fluide par les inclusions solides :

– lorsqu'il n'y a pas d'inclusions solides dans le fluide ( $\Omega_S = \emptyset$ ), on pose  $J = 0$ . Le champ de déplacement global  $\mathbf{U}_F$  s'identifie au champ de déplacement local du fluide  $\mathbf{u}_F$  et la relation [10] s'écrit alors  $\rho_F \ddot{\mathbf{u}}_F = -\nabla p$ , qui est l'équation d'état classique du problème fluide linéarisé (Gibert, 1986) ;

– lorsque l'inclusion solide occupe tout le domaine fluide ( $\Omega_F = \emptyset$ ), on pose  $J = 1$ . Le champ de déplacement global  $\mathbf{U}_F$  s'identifie au champ de déplacement des inclusions  $\mathbf{u}_S$  et la relation [10] s'écrit  $\ddot{\mathbf{U}}_F = \ddot{\mathbf{u}}_S$ .

Les situations précédentes sont deux cas limites de confinement nul et total. Dans le cas d'un confinement quelconque, on a  $J \in ]0, 1[$ .

On peut montrer que, compte tenu de l'hypothèse de périodicité de  $\Pi_i$  et de symétrie de la cellule élémentaire,  $J$  se calcule à partir de  $\Pi_i$  selon la relation (Hammami, 1991) :

$$J = 1 - \frac{1}{|\Omega_T|} \int_{\Omega_F} \left(1 - \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i}\right) d\Omega_F \quad [12]$$

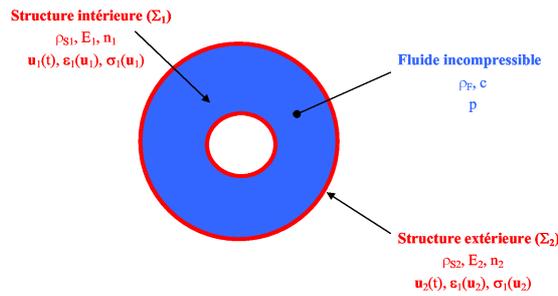
Enfin, en tenant compte de la définition de  $\mathbf{U}_F$ , on écrit l'équation [9] sous la forme :

$$p = -\rho_F c^2 \nabla \cdot \mathbf{U}_F \quad [13]$$

[10] et [13] sont les équations de base du problème fluide homogénéisé.

## 2.2. Formulation variationnelle du problème couplé structure/fluide homogénéisé

A partir de cette modélisation du problème fluide au niveau de la cellule, on peut maintenant formuler le problème couplé structure/fluide homogénéisé. On se place dans la situation décrite schématiquement par la figure 4 qui correspond au cas bi-dimensionnel étudié.  $\Omega$  est le domaine fluide homogénéisé, de frontière  $\partial\Omega$ , réunion des éléments  $\partial\Omega_o$  (pression imposée nulle),  $\partial\Omega_\pi$  (gradient de pression imposé nul) et  $\Gamma$  (interface avec la structure). Sur  $\partial\Omega$ , la normale extérieure au domaine fluide est notée  $\mathbf{n}$ . Le champ de pression dans le domaine fluide est noté  $p$ . Le fluide est couplé à deux structures occupant les domaines  $\Sigma_k$ , ( $k = 1, 2$ ), de frontière  $\partial\Sigma_k$ , réunion des éléments  $\partial\Sigma_{k_o}$  (déplacement imposé nul),  $\partial\Sigma_{k_\sigma}$  (effort imposé nul) et  $\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k$  (interface avec le fluide). Sur  $\partial\Sigma_k$ , la normale extérieure au domaine structure est notée  $\mathbf{n}_k$ . Les champs de déplacement dans chaque structure sont notés  $\mathbf{u}_k$ ,  $k = 1, 2$ . On distingue dans la suite les masses volumiques fluide et structure par les indices  $F$  et  $S$ .



**Figure 4.** Structures élastiques couplées par un fluide homogénéisé

Les équations locales et la formulation variationnelle correspondante pour le problème couplé sont les suivantes.

### Problème fluide

En prenant la divergence de l'équation homogénéisée [10], en combinant avec une dérivation en temps de l'équation [13] et compte tenu du fait que le mouvement des inclusions solides est à divergence nulle, on déduit l'équation locale du fluide homogénéisé :

$$\frac{\ddot{p}}{c^2} - (1 - J)\Delta p = 0 \quad [14]$$

Les conditions aux limites associées (pression imposée nulle et gradient de pression imposé nul) sont :

$$p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_o \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\pi \quad [15]$$

et la condition de couplage est exprimée comme :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_F \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \quad [16]$$

ou de façon équivalente :

$$\mathbf{U}_F \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \quad [17]$$

Soit  $\delta p$  un champ de pression virtuelle, en multipliant l'équation locale [14] par  $\delta p$ , en intégrant sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  et en utilisant les formules d'intégration par parties, on obtient la formulation variationnelle du problème fluide :

$$\int_{\Omega} \ddot{p} \delta p \, d\Omega + \int_{\Omega} (1-J)p \delta p \, d\Omega = \int_{\Gamma} (1-J) \nabla p \cdot \mathbf{n} \delta p \, d\Gamma$$

Le calcul du terme intégral sur  $\Gamma$  est réalisé en tenant compte de la relation

$$(1-J) \nabla p = \rho_F J \ddot{\mathbf{u}}_S - \rho_F \ddot{\mathbf{U}}_F$$

de la condition de couplage [17], et de l'hypothèse que les inclusions sont solidaires du mouvement de la structure  $\Sigma_1$ , ce qui implique  $\ddot{\mathbf{u}}_S = \ddot{\mathbf{u}}_1$  sur  $\Gamma_1$ .

La formulation variationnelle du problème fluide s'écrit alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \ddot{p} \delta p \, d\Omega + \int_{\Omega} (1-J) \nabla p \nabla \delta p \, d\Omega = \\ & - \int_{\Gamma_1} \rho_F (1-J) \ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n} \delta p \, d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \ddot{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n} \delta p \, d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_2} \rho_F J \ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n} \delta p \, d\Gamma_2 \quad [18] \end{aligned}$$

#### Problème structure

Le problème structure est décrit par les équations de l'élasticité linéaire pour chaque système  $\Sigma_k$ , dont l'inconnue est le champ de déplacement  $\mathbf{u}_k$ . L'équation locale est pour chaque structure  $\Sigma_k$  :

$$\rho_S^k \ddot{u}_i^k - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u}_k)}{\partial x_j} = 0 \text{ dans } \Sigma_k \quad [19]$$

assortie des conditions aux limites (déplacement imposé nul et effort imposé nul) :

$$u_i^k = 0 \text{ sur } \partial \Sigma_{k0} \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u}_k) n_j^k = 0 \text{ sur } \partial \Sigma_{k\sigma} \quad [20]$$

La condition de couplage avec le problème fluide est la suivante :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}_k) n_j^k = p n_i \text{ sur } \Gamma_k \quad [21]$$

A ces équations dynamiques, on ajoute un terme d'effort dû à l'action du fluide sur les inclusions solides. Les inclusions étant solidaires de la structure intérieure, cet

effort est exercé sur  $\Sigma_1$  et est représenté par une densité d'effort  $d\mathbf{f}$  sur  $\Omega$  donnée par (voir annexe A) :

$$d\mathbf{f} = \left( -J\nabla p + \rho_F I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} \ddot{\mathbf{u}}_S \right) d\Omega \quad [22]$$

avec  $I$  et  $J$  reliés par :

$$J = \frac{|\Omega_S|}{|\Omega_T|} + I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} \quad [23]$$

Le travail virtuel de ces efforts dans un champ de déplacement virtuel  $\delta\mathbf{u}_1$  de la structure  $\Sigma_1$  est alors :

$$\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u}_1 = \left( \int_{\Omega} d\mathbf{f} \right) \cdot \delta\mathbf{u}_1 = \int_{\Omega} \left( -J\nabla p \delta\mathbf{u}_1 - \rho_F I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} \ddot{\mathbf{u}}_S \cdot \mathbf{u}_1 \right) d\Omega$$

Après intégration par partie du terme en  $\nabla p$ , et compte tenu du fait que les inclusions sont solidaires de la structure intérieure ( $\ddot{\mathbf{u}}_S = \mathbf{u}_1$ ), on peut écrire le travail virtuel de l'effort  $\mathbf{f}$  comme :

$$\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u}_1 = - \int_{\Omega} \rho_F I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} d\Omega \ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \delta\mathbf{u}_1 - \int_{\Gamma_1} Jp \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u}_1 d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} Jp \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u}_1 d\Gamma_2 \quad [24]$$

La formulation variationnelle du problème structure est alors obtenue en multipliant les équations locales [19] par des champs de déplacement virtuels  $\delta\mathbf{u}_k$ , en intégrant par partie et en tenant compte des conditions aux limites [20], des conditions de couplage et du travail virtuel des efforts fluide sur les inclusions [24] :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_k} \rho_S \ddot{\mathbf{u}}_k \cdot \delta\mathbf{u}_k d\Sigma_k + \int_{\Sigma} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}_k) \varepsilon_{i,j}(\delta\mathbf{u}_k) d\Sigma_k &= \int_{\Gamma_1} (1-J)p \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u}_1 d\Gamma_1 \\ + \int_{\Gamma_2} p \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u}_2 d\Gamma_2 - \tilde{m}_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \delta\mathbf{u}_1 - \int_{\Gamma_2} Jp \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u}_1 d\Gamma_2 & \quad [25] \end{aligned}$$

$$\text{avec } \tilde{m}_1 = \int_{\Omega} \rho_F I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} d\Omega.$$

### 2.3. Discrétisation éléments finis

La discrétisation des formulations variationnelles [18] et [25] est conduite au moyen d'une méthode éléments finis. On définit ainsi les différents opérateurs :

– opérateur de masse et de raideur structure :

$$\int_{\Sigma_k} \rho_S^k \ddot{\mathbf{u}}_k \cdot \delta \mathbf{u}_k d\Sigma_k \Rightarrow \delta \mathbf{U}_k^T \mathbf{M}_S^k \ddot{\mathbf{U}}_k \quad \int_{\Sigma_k} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}_k) \varepsilon_{i,j}(\delta \mathbf{u}_k) d\Sigma_k \Rightarrow \delta \mathbf{U}_k^T \mathbf{K}_S^k \mathbf{U}_k$$

– opérateur de masse et de raideur fluide :

$$\int_{\Omega} \nabla p \nabla \delta p d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{P}^T \mathbf{K}_F \mathbf{P} \quad \int_{\Omega} \ddot{p} \delta p d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{P}^T \mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{P}}$$

– opérateur d'interaction fluide/structure :

$$\int_{\Gamma_k} p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_k d\Gamma_k \Rightarrow \delta \mathbf{U}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{P}$$

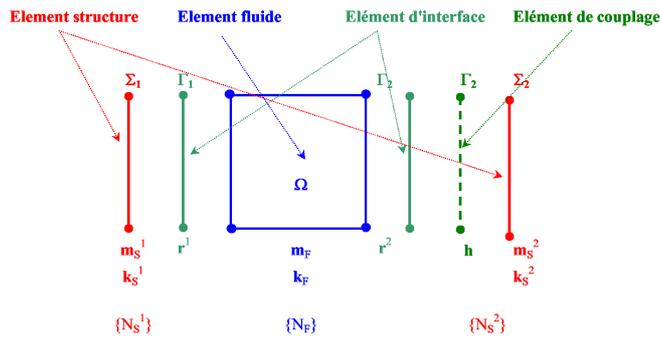
– opérateur de couplage :

$$\int_{\Gamma_2} p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_1 d\Gamma_2 \Rightarrow \delta \mathbf{U}_1^T \mathbf{H} \mathbf{P}$$

– opérateur de masse ajoutée :

$$\int_{\Omega} \rho_F I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} d\Omega \ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \delta \mathbf{u}_1 \Rightarrow \delta \mathbf{U}_1^T \tilde{\mathbf{M}}_1 \ddot{\mathbf{U}}_1$$

La discrétisation du problème utilise des éléments finis structure permettant le calcul des opérateurs  $\mathbf{K}_S^k$  et  $\mathbf{M}_S^k$ , des éléments finis fluide permettant le calcul des opérateurs  $\mathbf{K}_F$  et  $\mathbf{M}_F$ , des éléments finis d'interface permettant le calcul des opérateurs d'interaction fluide/structure  $\mathbf{R}_k$  et des éléments finis de couplage permettant le calcul de l'opérateur de couplage  $\mathbf{H}$  (voir figure 5).



**Figure 5.** Mise en œuvre de la méthode des éléments finis adaptée à l'homogénéisation du fluide

La discrétisation des équations [18] et [25] conduit ainsi à l'écriture du système matriciel temporel suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S^1 + \tilde{\mathbf{M}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_S^2 & \mathbf{0} \\ \rho_F(1-J)\mathbf{R}_1^T - \rho_F J\mathbf{H}^T & \rho_F \mathbf{R}_2^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_1 \\ \ddot{\mathbf{U}}_2 \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^1 & \mathbf{0} & -(1-J)\mathbf{R}_1 + J\mathbf{H} \\ \mathbf{K}_S^2 & \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (1-J)\mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad [26]$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \rho_F \tilde{\mathbf{R}}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\tilde{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad [27]$$

en ayant posé :

$$\tilde{\mathbf{K}}_F = (1-J)\mathbf{K}_F \quad \tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} (1-J)\mathbf{R}_1 - J\mathbf{H} \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}$$

La forme proposée pour le problème couplé structure/fluide homogénéisé est écrite sous forme non symétrique en formulation  $(\mathbf{u}, p)$ . A partir de cette formulation, il est possible d'obtenir une formulation symétrique en  $(\mathbf{u}, p)$  en écrivant tout d'abord la forme symétrique du problème couplé en formulation  $(\mathbf{u}, p, \varphi)$  (Morand *et al.*, 1995) puis en éliminant dans le problème discret l'inconnue  $\Phi$  au profit des inconnues  $\mathbf{U}, \mathbf{P}$ . On écrit ainsi :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \tilde{\mathbf{M}} + \rho_F \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}} & \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \mathbf{M}_F \\ \mathbf{M}_F \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}} & 1/\rho_F \mathbf{M}_F \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_F/\rho_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad [28]$$

Cette formulation fait intervenir les opérateurs définis précédemment dans la formulation [27].

#### 2.4. Consistance de la méthode : conservation de la masse

La méthode d'homogénéisation proposée doit permettre l'analyse dynamique d'un système couplé fluide/structure, soumis à une accélération  $\gamma$  (représentant un séisme, un choc, etc.) En référentiel relatif, l'équation du mouvement du système couplé est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{M}\Delta\gamma$$

avec les opérateurs de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  donnés par l'équation [28].

$\Delta$  représente la direction de la sollicitation dynamique  $\gamma$  : c'est un vecteur dont les composantes valent 1 pour les degrés de liberté en déplacement dans une direction donnée et 0 pour les autres degrés de liberté.  $\Delta$  s'écrit donc  $\Delta^T = \langle \mathbf{D}^T, \mathbf{0} \rangle$  avec  $\mathbf{D}^T = \langle \mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T \rangle$ , où  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}_2$  correspondent aux degrés de liberté en déplacement dans la direction donnée pour les structures  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

L'analyse modale permet la détermination des pulsations propres  $(\omega_n)_{n \geq 1}$  et des modes propres  $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ , par résolution du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \mathbf{X}_n = \mathbf{0}$$

et le calcul des masses modales  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  selon la relation :

$$\mu_n = \frac{(\Delta^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n)^2}{\mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n}$$

Le cumul des masses modales vérifie alors le bilan (Gibert, 1986) :

$$\sum_{n \geq 1} \mu_n = \Delta^T \mathbf{M} \Delta = m_t$$

où  $m_t$  est la masse totale du système (fluide et structure).

Comme on l'a montré en introduction, les phénomènes de couplage fluide/structure se caractérisent essentiellement, pour l'application industrielle visée, par des effets *inertiels*. Dans ce contexte, le point fondamental de la méthode proposée réside dans la satisfaction du principe de conservation de la masse.

Le calcul  $\Delta^T \mathbf{M} \Delta$  s'écrit  $\mathbf{D}^T (\mathbf{M}_S + \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{M}}_H) \mathbf{D}$ , compte tenu de la forme du vecteur  $\Delta$ .  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  est l'opérateur de masse ajoutée défini comme :

$$\tilde{\mathbf{M}}_H = \rho_F \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}$$

Le calcul des termes de masse structure donne les masses des structures  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  :

$$\mathbf{D}_k^T \mathbf{M}_S^k \mathbf{D}_k \rightarrow m_{s,k} \quad k = 1, 2$$

Le calcul du terme de masse ajoutée sur la structure donne :

$$\mathbf{D}_1^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{D}_1 \rightarrow \rho_F I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} |\Omega|$$

Le calcul du terme de masse de fluide ajoutée donne (voir détail en annexe B) :

$$\mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{M}}_H \mathbf{D} \rightarrow \rho_F (1 - J) |\Omega|$$

Le bilan des masses en présence est alors :

$$m_{s,1} + m_{s,2} + \rho_F I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} |\Omega| + \rho_F (1 - J) |\Omega|$$

On a par ailleurs :

$$\rho_F I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} |\Omega| + \rho_F (1 - J) |\Omega| = \rho_F \left( 1 - \frac{|\Omega_S|}{|\Omega_T|} \right) |\Omega| = m_f$$

de sorte que :

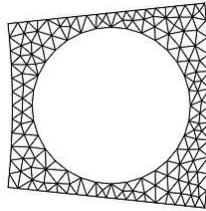
$$\mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D} = m_{s,1} + m_{s,2} + m_f \quad [29]$$

ce qui vérifie le principe de conservation de la masse.

### 2.5. Détermination du paramètre $J$

Le coefficient de confinement  $J$  est déterminé à partir d'un calcul sur une cellule élémentaire. Dans le cas étudié, le maillage d'une cellule élémentaire est représenté par la figure 6.

Par définition, un calcul à l'échelle élémentaire permet de calculer  $J$  selon la relation [12]. On peut calculer de façon équivalente le coefficient de confinement (Broc, 2004) en supposant que l'inclusion solide  $\Omega_S$  est un système masse ( $m$ ), ressort ( $k$ ) à un degré de liberté couplée avec le fluide occupant le domaine  $\Omega_F$ .



**Figure 6.** Maillage d'une cellule élémentaire

La pulsation propre du système non couplé avec le fluide est  $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . On détermine alors par calcul sur la géométrie de la cellule élémentaire la pulsation propre du système couplé  $\omega_h = \sqrt{\frac{k}{m + m_h}}$ . A l'aide des pulsations  $\omega_o$  et  $\omega_h$ , on détermine la masse de fluide ajoutée  $m_h$  puis le coefficient de confinement  $J$ , donné par (Broc *et al.*, 2003) :

$$J = \frac{m_h + \rho_F |\Omega_S|}{m_h + \rho_F (|\Omega_S| + |\Omega_F|)} \quad [30]$$

### 3. Validation de la méthode

On valide la méthode proposée sur le cas bidimensionnel représenté par la figure 2. On considère un système à deux degrés de liberté, constitué de deux cylindres concen-

triques couplés par un fluide incompressible. Les inclusions solides dans le domaine fluide sont circulaires, rigides et liées au cylindre intérieur. Les caractéristiques géométriques et physiques du système étudié sont données dans le tableau 2, le bilan de masse du système est donné par le tableau 3.

Grandeur	Notation	Valeur
Rayon de la structure intérieure	$R_1$	1 m
Rayon de la structure extérieure	$R_2$	1.25 m
Rayon des inclusions	$R$	0.1 m
Masse volumique des structures	$\rho_{S,1/2}$	8000 kg/m <sup>3</sup>
Epaisseur des structures	$e_{1/2}$	0.01 m
Raideur des ressorts	$k_{1/2}$	1000 N/m
Nombre d'inclusions	$N$	30
Masse d'une inclusion	$m$	50 kg
Masse volumique du fluide	$\rho_F$	1000 kg/m <sup>3</sup>
Célérité des ondes sonores dans le fluide	$c$	1500 m/s

**Tableau 2.** *Caractéristiques géométriques et physiques du problème couplé élémentaire*

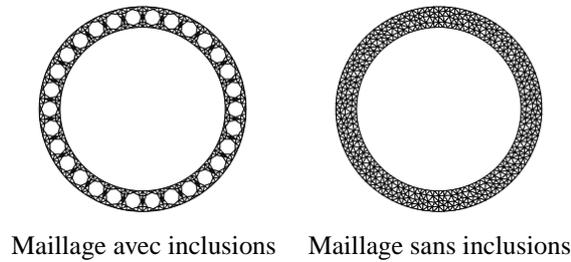
Masse	Notation	Valeur
Masse de la structure intérieure	$m_{s,1}$	504 kg
Masse de la structure extérieure	$m_{s,2}$	628 kg
Masse de fluide	$m_f$	848 kg
Masse des inclusions	$N \times m$	1761 kg
Masse totale	$m_t$	3741 kg

**Tableau 3.** *Bilan des masses du système couplé élémentaire*

On calcule les modes propres (fréquences, déformées, masses modales) du système étudié en mettant en œuvre dans le code CASTEM :

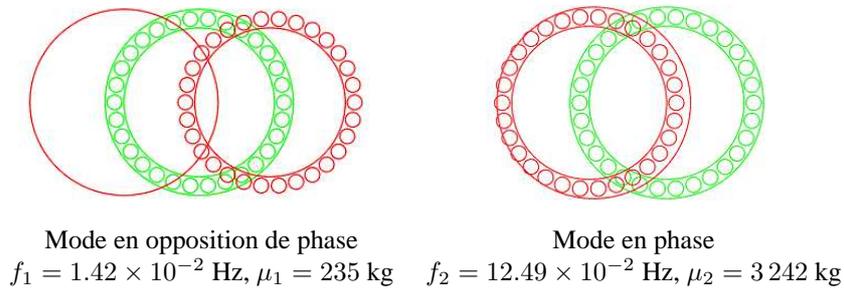
- un calcul couplé fluide/structure avec maillage des inclusions solides ;
- un calcul couplé fluide homogénéisé/structure sans maillage des inclusions fluide.

Le maillage utilisé pour les deux calculs est représenté par la figure 7.



**Figure 7.** Maillage de l'espace annulaire avec et sans inclusions solides

Le premier calcul (avec inclusion solides) est réalisé directement en formulation  $(\mathbf{u}, p, \varphi)$  et donne les modes propres du système (voir figure 8). Le premier mode est un mode de vibration en opposition de phase des deux cylindres, à la fréquence  $f_1 = 1.42 \times 10^{-2}$  Hz, avec une masse modale  $\mu_1 = 235$  kg ; le second mode est un mode de vibration en phase des deux cylindres, à la fréquence  $f_2 = 12.49 \times 10^{-2}$  Hz, avec une masse modale  $\mu_2 = 3\,242$  kg. La somme des masses modales est  $\mu_1 + \mu_2 = 3477$  kg, ce qui représente 92,9 % de la masse totale du système.

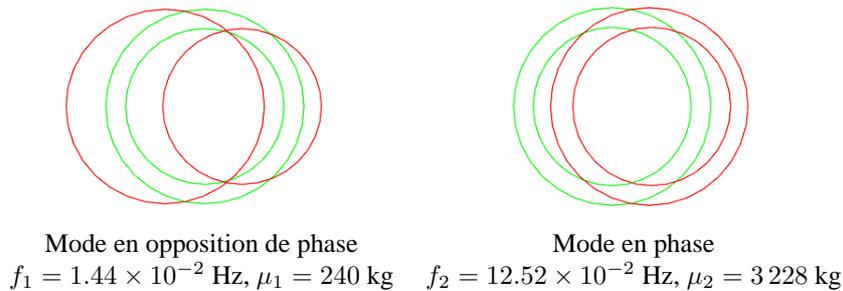


**Figure 8.** Modes propres du système couplé avec inclusions solides

Le second calcul (sans inclusions solides) est réalisé avec les principes exposés précédemment. Les opérateurs de couplage sont modifiés pour prendre en compte le confinement induit par les inclusions. Le coefficient  $J$  est calculé sur un modèle de cellule élémentaire ; pour la géométrie étudiée, la relation [30] donne  $J = 0.66$ . La masse volumique de la structure intérieure est modifiée pour prendre en compte la masse des inclusions qui lui sont liées.

Les modes propres calculés sont donnés par la figure 9 : on retrouve le premier mode de vibration en opposition de phase à la fréquence  $f_1 = 1.44 \times 10^{-2}$  Hz, de masse modale  $\mu_1 = 240$  kg et le second mode de vibration en phase à la fréquence  $f_2 = 12.52 \times 10^{-2}$  Hz, de masse modale  $\mu_2 = 3228$  kg. La somme des masses

modales est alors  $\mu_1 + \mu_2 = 3\,468$  kg, ce qui représente 92,7 % de la masse totale du système.



**Figure 9.** Modes propres du système couplé sans inclusions solides

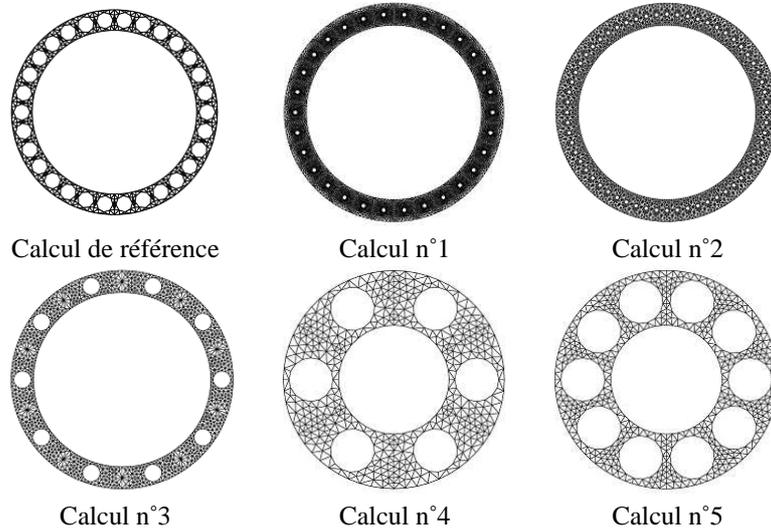
La méthode est également testée dans la configuration géométrique définie par la figure 2 avec des valeurs différentes du nombre d'inclusions solides  $N$ , du ratio de confinement  $\alpha$  (rapport des rayons des deux cylindres), du rayon des inclusions  $r$ . Le tableau 4 définit cinq cas de validation complémentaires et donne la valeur du coefficient  $J$  déterminé par un calcul élémentaire, ainsi que la masse totale (fluide et structure). La figure 10 donne une représentation du maillage du problème avec les inclusions solides.

Cas de calcul	Paramètres du calcul					Masse totale
	$R$	$\alpha$	$N$	$r$	$J$	
1	1 m	1.25	30	0.025 m	0.063	3 216 kg
2	1 m	1.25	60	0.025 m	0.114	3 534 kg
3	1 m	1.25	10	0.1 m	0.422	3 087 kg
4	1 m	2	6	0.4 m	0.522	9 123 kg
5	1 m	2	10	0.4 m	0.695	8 023 kg

**Tableau 4.** Cas de calcul de validation de la méthode d'homogénéisation : définition de la géométrie

Le tableau 5 donne les fréquences propres et les masses modales pour les modes de vibration du système avec inclusions solides ; le tableau 6 donne les résultats correspondants obtenus avec la méthode d'homogénéisation.

A l'exception du cas de calcul n° 4, les résultats de calcul avec fluide homogénéisé sans modélisation des inclusions sont donc identiques aux résultats de calcul couplés avec modélisation des inclusions, à la fois en termes de fréquences propres, de modes propres et de masses modales. On vérifie en particulier que la somme des masses modales est très proche (voire égale) à la masse totale du système.



**Figure 10.** Cas de calcul de validation de la méthode d'homogénéisation : maillage du problème avec inclusions solides

Cas de calcul	Mode en opposition de phase		Mode en phase	
	$f_1$	$\mu_1$	$f_2$	$\mu_2$
1	$2.52 \times 10^{-2}$ Hz	834 kg	$1.45 \times 10^{-1}$ Hz	2 380 kg
2	$2.47 \times 10^{-2}$ Hz	742 kg	$1.34 \times 10^{-1}$ Hz	2 785 kg
3	$1.94 \times 10^{-2}$ Hz	496 kg	$1.40 \times 10^{-1}$ Hz	2 595 kg
4	$1.90 \times 10^{-2}$ Hz	2 573 kg	$8.67 \times 10^{-2}$ Hz	6 611 kg
5	$1.55 \times 10^{-2}$ Hz	1 841 kg	$9.01 \times 10^{-2}$ Hz	6 182 kg

**Tableau 5.** Résultats de calculs couplés avec inclusions solides

Cas de calcul	Mode en opposition de phase		Mode en phase	
	$f_1$	$\mu_1$	$f_2$	$\mu_2$
1	$2.52 \times 10^{-2}$ Hz	833 kg	$1.45 \times 10^{-1}$ Hz	2 370 kg
2	$2.45 \times 10^{-2}$ Hz	719 kg	$1.34 \times 10^{-1}$ Hz	2 801 kg
3	$1.93 \times 10^{-2}$ Hz	480 kg	$1.40 \times 10^{-1}$ Hz	2 596 kg
4	$1.85 \times 10^{-2}$ Hz	1 542 kg	$8.83 \times 10^{-2}$ Hz	7 609 kg
5	$1.51 \times 10^{-2}$ Hz	1 743 kg	$8.99 \times 10^{-2}$ Hz	6 216 kg

**Tableau 6.** Résultats de calculs couplés sans inclusions solides avec méthode d'homogénéisation

Pour le cas de calcul n° 4, la méthode d'homogénéisation ne donne pas de résultats satisfaisants : le nombre des inclusions solides dans l'espace annulaire n'est pas suffisant pour que les hypothèses de périodicité et de description locale du comportement du fluide soient correctes. Ce cas est cependant assez éloigné de la géométrie industrielle à étudier et peut être traité avec un maillage complet de l'espace annulaire et des inclusions.

L'ensemble de ces calculs permet de valider la méthode d'homogénéisation présentée et d'envisager son application à l'analyse dynamique de l'ensemble panier/cuve d'un réacteur nucléaire avec prise en compte de l'interaction fluide/structure et modélisation des structures internes du réacteur. L'analyse dynamique avec méthode de projection modale sera présentée dans un prochain article.

#### 4. Conclusion

On a présenté dans cet article une méthode d'homogénéisation pour l'analyse modale d'un problème d'interactions fluide/structure. La méthode proposée permet de modéliser un fluide contenant des inclusions solides et de traiter le problème de couplage avec une structure élastique. On a rappelé le principe de la méthode qui s'appuie, d'une part, sur les approches classiques proposées pour l'homogénéisation de problèmes fluide, et, d'autre part, sur les descriptions du problème couplé en formulations non symétriques et symétriques en pression/déplacement (formulation  $(\mathbf{u}, p)$ ) et pression, potentiel des déplacements/déplacements (formulation  $(\mathbf{u}, p, \varphi)$ ).

Le traitement du problème fluide homogénéisé revient à modifier les opérateurs d'interactions fluide/structure et à définir un opérateur de couplage fluide/structure, dont les expressions ont été exposées. La consistance physique de la méthode est établie en calculant le cumul théorique de masses modales pour le problème couplé avec fluide homogénéisé et en montrant la conservation de la masse totale du système.

La méthode est ensuite validée sur un cas bidimensionnel pour lequel un calcul couplé avec et sans inclusions solides dans le domaine fluide est proposé. L'équivalence des deux approches est ainsi illustrée en comparant les fréquences propres, les modes propres et les masses modales du système étudié.

Cette méthode sera ainsi appliquée pour l'étude sismique d'un réacteur nucléaire, en utilisant un modèle axisymétrique (Sigrist *et al.*, 2005a, Sigrist *et al.*, 2005b) qui sera adapté pour prendre en compte la présence de structures internes avec l'approche d'homogénéisation du fluide, en modifiant les opérateurs de couplage et d'interaction fluide/structure pour prendre en compte la présence de parties structurelles à l'intérieur du réacteur, sans avoir recours à une modélisation tridimensionnelle complète.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier messieurs Guillopé, Glavizic et Jucker pour le soutien apporté aux actions de collaborations technique et scientifique entre le CEA Saclay et DCN Propulsion dans le domaine des interactions fluide/structure et leurs applications dans le cadre de projets de propulsion navale nucléaire.

## 5. Bibliographie

- ASME, *Boiler and Pressure Vessel Code, Appendix N*, American Society of Mechanical Engineers, 2004.
- Axisa F., *Interactions Fluide Structure*, Hermès, 2001.
- Broc D., « Seismic Behaviour of PWR Reactor Cores : Whole Core Model with Fluid-Structure Interaction Effects », *Flow induced Vibrations*, Paris, p. 283-288, 6-9 July, 2004.
- Broc D., Queval J., Viallet E., « Seismic Behaviour of PWR Reactor Cores : Fluid-Structure Effects », *Structural Mechanics in Reactor Technology 17*, Prague, August, 2003.
- Cheval K., Modélisation du comportement sismique de structures multitubulaires baignées par un fluide dense, Thèse de doctorat, Université d'Evry, 2001.
- Conca C., Planchard J., Thomas B., Vanninathan M., *Problèmes mathématiques en couplage fluide/structure*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 85, Eyrolles, 1994.
- DeLangre E., *Fluides et solides*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, 2001.
- Fritz R., « The Effect of Liquids on the Dynamic Motion of Immersed Solids », *Journal of Engineering for Industry*, vol. 10, p. 167-173, 1972.
- Gibert R., *Vibration des structures. Interaction avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 69, Eyrolles, 1986.
- Hammami L., Etude de l'interaction fluide/structure dans les faisceaux de tube par une méthode d'homogénéisation. Application à l'analyse sismique des coeurs RNR, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1991.
- Morand H. J.-P., Ohayon R., *Fluid-Structure Interaction*, Wiley & Sons, 1995.
- Planchard J., Ibnou-Zahir M., « Natural Frequencies of Tube Bundle in an Incompressible Fluid », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 41, p. 47-68, 1983.
- Sigrist J., Broc D., Lainé C., « Analyse modale du réacteur RES avec prise en compte du couplage fluide/structure », *7e Colloque national en calcul des structures*, Hermès, Giens, p. 289-294, 17-20 mai, 2005a.
- Sigrist J.-F., Lainé C., Peseux B., « Analyse modale d'une structure industrielle avec prise en compte du couplage fluide/structure », *Mécanique & Industries*, vol. 6, n° 6, p. 553-563, 2005b.
- Vanninathan M., Sur quelques problèmes d'homogénéisation dans les équations aux dérivées partielles, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1979.

**A. Calcul des efforts fluides sur les inclusions solides**

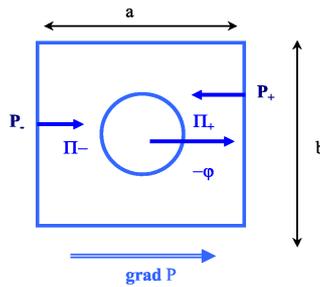
On cherche à calculer les efforts s'exerçant sur les inclusions solides. On se place au niveau d'une cellule élémentaire, contenant une inclusion ; l'effort exercé par le fluide sur l'inclusion solide est noté  $\Phi$ . On calcule ces efforts en exprimant la relation fondamentale de la dynamique pour le fluide. On écrit ainsi :

$$\int_{\Omega_F} \rho_F \ddot{\mathbf{u}}_F d\Omega_F = \mathbf{\Pi} - \Phi$$

où  $\mathbf{\Pi}$  représente les efforts de pression sur le fluide. On a  $\mathbf{\Pi} = -(P_+ - P_-)b$  avec les notations de la figure 11. Et par ailleurs,  $P_+ - P_- = a \nabla p$ , de sorte que :

$$\Phi = \nabla p |\Omega_T| - \int_{\Omega_F} \rho_F \ddot{\mathbf{u}}_F d\Omega_F$$

puisque  $\Omega_T = a \times b$ .



**Figure 11.** Efforts extérieurs sur le domaine fluide élémentaire

On calcule maintenant le terme  $\int_{\Omega_F} \rho_F \ddot{\mathbf{u}}_F d\Omega_F$ . On a d'une part :

$$\rho_F |\Omega_T| \ddot{\mathbf{U}}_F = \rho_F |\Omega_S| \ddot{\mathbf{u}}_S + \int_{\Omega_F} \rho_F \ddot{\mathbf{u}}_F d\Omega_F$$

et, d'autre part :

$$\rho_F |\Omega_T| \ddot{\mathbf{U}}_F = -(1 - J) \nabla p |\Omega_T| + J \rho_F |\Omega_T| \ddot{\mathbf{u}}_S$$

On déduit ainsi :

$$\int_{\Omega_F} \rho_F \ddot{\mathbf{u}}_F d\Omega_F = \rho_F (J |\Omega_T| - |\Omega_S|) \ddot{\mathbf{u}}_S$$

On définit alors le coefficient  $I$  par  $I |\Omega_F| = J |\Omega_T| - |\Omega_S|$ , et on établit ainsi :

$$\Phi = -J |\Omega_T| \nabla p - \rho_F I |\Omega_F| \ddot{\mathbf{u}}_S$$

Cet effort calculé au niveau de chaque cellule élémentaire  $\Omega_T$  est équivalent à une densité d'effort fluide  $df$  s'exerçant sur l'ensemble du domaine homogénéisé  $\Omega$ , cet effort est calculé comme  $df = \frac{\Phi}{|\Omega_T|}$ , soit :

$$df = -J\nabla p - \rho_F I \frac{|\Omega_F|}{|\Omega_T|} \quad [31]$$

### B. Bilan masse pour le problème fluide

Le bilan masse pour le problème couplé structure/fluide homogénéisé nécessite le calcul de l'expression  $\mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{M}}_H \mathbf{D}$ , avec :

$$\tilde{\mathbf{M}}_H = \rho_F \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T$$

où on a posé :

$$\tilde{\mathbf{K}}_F = (1 - J)\mathbf{K}_F \quad \tilde{\mathbf{R}}^T = \langle (1 - J)\mathbf{R}_1^T - J\mathbf{H}^T, \mathbf{R}_2^T \rangle \quad \mathbf{D}^T = \langle \mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T \rangle$$

On calcule alors le terme de gauche :

$$\mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T \rangle \left\{ \begin{array}{c} (1 - J)\mathbf{R}_1 - J\mathbf{H} \\ \mathbf{R}_2 \end{array} \right\} = (1 - J)\mathbf{D}_1^T \mathbf{R}_1 - J\mathbf{D}_1^T \mathbf{H} + \mathbf{D}_2^T \mathbf{R}_2$$

Par construction, les opérateurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{R}_2$  vérifient  $\mathbf{D}_2^T \mathbf{R}_2 = \mathbf{D}_1^T \mathbf{H}$ . L'expression précédente s'écrit alors :

$$\mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{R}} = (1 - J)(\mathbf{D}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{D}_2^T \mathbf{R}_2) = (1 - J)\mathbf{D}^T \mathbf{R}^*$$

avec :

$$\mathbf{R}^{*T} = \langle \mathbf{R}_1^T, \mathbf{R}_2^T \rangle$$

$\mathbf{R}^*$  est l'opérateur d'interaction fluide/structure pour le problème couplé avec un fluide *non homogénéisé* occupant tout le domaine  $\Omega$ . De même, le terme de droite s'écrit :

$$\langle (1 - J)\mathbf{R}_1^T - J\mathbf{H}^T, \mathbf{R}_2^T \rangle \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{array} \right\} = (1 - J)\mathbf{R}_1^T \mathbf{D}_1 - J\mathbf{H}^T \mathbf{D}_1 + \mathbf{R}_2^T \mathbf{D}_2$$

ou encore :

$$\tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{D} = (1 - J)(\mathbf{R}_1^T \mathbf{D}_1 + \mathbf{R}_2^T \mathbf{D}_2) = (1 - J)\mathbf{R}^{*T} \mathbf{D}$$

On peut alors écrire :

$$\rho_F \mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{D} = (1 - J)\rho_F \mathbf{D}^T \mathbf{R}^* \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \mathbf{R}^{*T} \mathbf{D} = (1 - J)m_f^*$$

où  $m_f^*$  est la masse de fluide de densité  $\rho_F$  occupant le volume  $\Omega$ , ainsi :

$$\rho_F \mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{D} = (1 - J)\rho_F |\Omega|$$

