

---

# Plasticité anisotrope couplée à un endommagement ductile isotrope

## Application au gonflement hydraulique de tôles minces

**Mourad Khelifa\*** — **Khémais Saanouni\***  
**Houssem Badreddine\*\*\*** — **M. Amen Gabbich\*\***  
**Abdelwaheb Dogui\*\***

\* ICD/SMIS-CNRS-FRE 2848 - Université de Technologie de Troyes  
12 rue Marie Curie - BP 2060, F-10010 Troyes cedex  
saanouni@utt.fr

\*\* LGM – Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir  
Avenue Ibn El Jazzar, 5019 Monastir, Tunisie

---

*RÉSUMÉ. Ce travail est dédié à l'élastoplasticité anisotrope couplée à un endommagement ductile isotrope avec l'objectif d'étudier l'influence de l'écoulement plastique anisotrope sur l'évolution de l'endommagement isotrope. On utilise un modèle d'élastoplasticité anisotrope (critère de Hill) avec écrouissage isotrope et cinématique non linéaire fortement couplé à un endommagement ductile isotrope. Ce modèle est implémenté dans le code ABAQUS dans le cadre des grandes déformations plastiques. Les aspects théoriques et numériques associés sont brièvement commentés. La validation de la méthodologie proposée est faite par application à la prévision de la rupture ductile de tôles minces orthotropes soumises à un essai de gonflement hydraulique avec matrices elliptiques et les résultats numériques et expérimentaux sont confrontés.*

*ABSTRACT. This work deals with the study of anisotropic elastoplastic constitutive equations fully coupled to the isotropic ductile damage in order to examine the effect of the anisotropic plastic flow on the "isotropic" damage evolution. An anisotropic quadratic yield criterion accounting for nonlinear isotropic and kinematic hardening is used. This fully coupled model is implemented into ABAQUS FEA Software. Both the theoretical and related numerical aspects are briefly discussed. Application is made to the failure prediction of a thin sheet metal subject to the hydrobulging test using an elliptic matrix. The experimental and numerical results are compared and discussed.*

*MOTS-CLÉS: plasticité anisotrope, endommagement isotrope, grandes déformations plastiques, contact/frottement, gonflement hydraulique.*

*KEYWORDS: plastic anisotropy, ductile damage, large plastic deformations, contact and friction, hydrobulging test.*

---

## 1. Introduction

La prévision des défauts dans les pièces obtenues par grandes déformations plastiques est de plus en plus demandée par l'industrie de mise en forme de pièces métalliques. En effet, les pièces étant obtenues par de très grandes déformations plastiques, il est légitime de penser que les microdéfauts (microfissures, microcavités...) peuvent s'y développer par les mécanismes bien connus de la rupture ductile (germination, croissance, coalescence (Gurson, 1977)). Ces dernières décennies, plusieurs approches de prévision de défauts en mise en forme des matériaux et des structures ont été proposées. Ces approches cherchent à modéliser les défauts ainsi que leurs influences sur le comportement par une description plus ou moins fine des principaux mécanismes de l'endommagement ductile. Deux familles d'approches sont souvent utilisées :

- approches basées sur des considérations physiques liées à la germination, la croissance et la coalescence des cavités (Rice *et al.*, 1969 ; Gurson, 1977). Ces travaux décrivent les principaux stades de la rupture ductile en termes d'évolution de la fraction volumique des cavités et son influence sur le comportement plastique (Gelin *et al.*, 1985 ; Aravas, 1986 ; Onate *et al.*, 1988 ; Gelin, 1990 ; Bontcheva *et al.*, 1991 ; Boudeau *et al.*, 1994 ; Bennani *et al.*, 1995 ; Brunet *et al.*, 1996 ; Picard *et al.*, 1998 ; Brunet *et al.*, 2001 ; Pardoën *et al.*, 2004 parmi de nombreux autres) ;

- approches basées sur la mécanique de l'endommagement continu (Lemaitre *et al.*, 1985 ; Chaboche, 1988 ; Lemaitre, 1992) et ses effets sur les autres champs thermomécaniques. Ces approches modélisent l'endommagement par des variables d'état de nature scalaire (isotropie) ou tensorielle (anisotropie) et décrivent plus ou moins finement l'évolution de l'endommagement et son effet sur le comportement élastoplastique par un couplage « fort » plasticité-endommagement (Saanouni *et al.*, 1994 ; 2000 ; 2001 ; 2003 ; 2004 ; Lestriez *et al.* 2005). D'autres modèles utilisent un écrouissage purement isotrope avec couplage « faible » comportement-endommagement pour prévoir l'endommagement en mise en forme (Lee *et al.*, 1985 ; Hartley *et al.*, 1989 ; Zhu *et al.*, 1991 ; 1992 ; Hambli, 2001).

Dans cette étude, une méthodologie de prévision de l'endommagement ductile avec couplage fort est présentée pour être appliquée à la prévision de la rupture ductile dans les tôles minces orthotropes soumises à des essais de gonflement hydraulique. La modélisation est développée dans le cadre des grandes déformations plastiques et décrit le couplage fort entre le comportement élastoplastique à écrouissage mixte (isotrope et cinématique) non linéaire et l'endommagement ductile isotrope. Un soin particulier a été accordé à la modélisation du couplage comportement-endommagement de sorte que les effets de l'endommagement ductile sur la distribution des différents champs mécaniques jusqu'à la rupture finale soient pris en compte. L'anisotropie de l'écoulement plastique est décrite par le critère quadratique de (Hill, 1948). A cause du couplage plasticité-endommagement, l'anisotropie de l'écoulement plastique induit une certaine orthotropie sur l'évolution

de l'endommagement supposé initialement isotrope (Khelifa, 2004 ; Belamri, 2004 ; Khelifa *et al.*, 2005 ; Belamri *et al.*, 2005).

Les aspects numériques de la modélisation sont traités en détail. La méthode des éléments finis en déplacement est utilisée pour formuler le problème de valeurs initiales et aux limites. Deux schémas de résolution sont utilisés : le schéma statique implicite (SI) dans le cadre du code ABAQUS/Standard et le schéma dynamique explicite (DE) dans le cadre d'ABAQUS/Explicit (Abaqus, 2001). Dans les deux cas, le calcul des contraintes est basé sur la méthode implicite de prédiction élastique et correction plastique (retour radial) pour intégrer les équations différentielles ordinaires que sont les relations de comportement couplées. L'utilisation d'un schéma asymptotique pour discrétiser les deux équations de l'écrouissage ainsi que la réduction du nombre d'équations à résoudre conduisent à un algorithme robuste et efficace (Hammi, 2000 ; Saanouni *et al.*, 2003 ; Belamri, 2004 ; Khelifa, 2004). Pour le schéma SI, un opérateur tangent consistant est calculé d'une manière exacte. Enfin la gestion numérique du contact évolutif est traitée par la méthode classique de surfaces maîtres/esclaves déjà disponible dans ABAQUS (Abaqus, 2001).

## 2. Modélisation mécanique du comportement plastique endommageable

La modélisation théorique utilisée est formulée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes :  $(\underline{\varepsilon}^e, \underline{\sigma})$  représentant l'écoulement plastique ;  $(\underline{\alpha}, \underline{X})$  représentant l'écrouissage cinématique ;  $(r, R)$  représentant l'écrouissage isotrope et  $(D, Y)$  représentant l'endommagement ductile isotrope.

Les relations d'état sont données par (Saanouni, 1994, 2003) :

$$\underline{\sigma} = (1 - D)\underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon}^e \quad [1]$$

$$\underline{X} = \frac{2}{3}C(1 - D)\underline{\alpha} \quad [2]$$

$$R = Q(1 - D)r \quad [3]$$

$$Y = \frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^e : \underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon}^e + \frac{1}{3}C\underline{\alpha} : \underline{\alpha} + \frac{1}{2}Qr^2 \quad [4]$$

où  $\underline{\Lambda}$  est l'opérateur d'ordre 4 symétrique des propriétés d'élasticité et C et Q sont les modules d'écrouissage cinématique et isotrope respectivement.

L'écoulement plastique est décrit par un critère de plasticité  $f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R, D)$  associé à un pseudo potentiel plastique  $F(\underline{\sigma}, \underline{X}, R, D)$  (Saanouni *et al.*, 2003 ; Khelifa *et al.*, 2003 ; Belamri, 2004) :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R, D) = \frac{\|\underline{\sigma} - \underline{X}\| - R}{\sqrt{1-D}} - \sigma_y = 0 \quad [5]$$

où la norme de Hill  $\|\underline{\sigma} - \underline{X}\|$  est définie dans l'espace des contraintes par :

$$\|\underline{\sigma} - \underline{X}\| = \sqrt{(\underline{\sigma} - \underline{X}) : \underline{H} : (\underline{\sigma} - \underline{X})} \quad [6]$$

avec  $\sigma_y$  est la limite d'élasticité et  $\underline{H}$  est l'opérateur de Hill (d'ordre 4 symétrique) décrivant l'orthotropie plastique fonction des six paramètres F, G, H, L, M et N (Hill, 1948). Les paramètres a et b sont les coefficients de non-linéarité de l'écroutissage cinématique et isotrope respectivement. Finalement, les coefficients  $\beta$ , s, S et  $Y_0$  caractérisent l'évolution de l'endommagement ductile. Les relations complémentaires qui en découlent par la règle de normalité généralisée sont :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \underline{n} = \dot{\lambda} \frac{\underline{H} : (\underline{\sigma} - \underline{X})}{\sqrt{1-D} \|\underline{\sigma} - \underline{X}\|} = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{1-D}} \tilde{\underline{n}} \quad [7]$$

$$\dot{\underline{\alpha}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^p - \dot{\lambda} a \underline{\alpha} \quad [8]$$

$$\dot{r} = \dot{\lambda} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-D}} - br \right] \quad [9]$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)^\beta} \left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^s \quad [10]$$

où  $\tilde{\underline{n}}$  est la normale à la surface de charge dans l'espace des contraintes effectives et  $\underline{n}$  son homologue dans l'espace des contraintes réelles.

Pour un écoulement plastique indépendant du temps, le multiplicateur plastique est alors solution de l'équation [11] obtenue à partir de la condition de cohérence plastique :

$$\dot{f} = \sqrt{1-D} \tilde{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\lambda} H = 0 \quad [11]$$

soit :

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{1-D}}{H} \langle \tilde{\underline{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \dot{\underline{\varepsilon}} \rangle \quad [12]$$

Le scalaire  $H > 0$  est le module tangent élastoplastique donné par :

$$H = \tilde{\mathbf{n}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \tilde{\mathbf{n}} + Q + C + \hat{Y} \frac{\sigma_y}{2(1-D)} - \frac{1}{\sqrt{1-D}} [bR + a \tilde{\mathbf{n}} : \underline{\underline{X}}] \quad [13]$$

où l'on a posé  $\hat{Y} = \frac{1}{(1-D)^\beta} \left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^s$

L'opérateur tangent continu  $\underline{\underline{K}}_T$  est directement obtenu par dérivation de la contrainte:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{K}}_T : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \quad [14a]$$

où :

$$\underline{\underline{K}}_T = (1-D) \underline{\underline{\Lambda}} - \frac{1}{H} \left[ (1-D) (\underline{\underline{\Lambda}} : \tilde{\mathbf{n}}) \otimes (\underline{\underline{\Lambda}} : \tilde{\mathbf{n}}) + \frac{\hat{Y}}{\sqrt{1-D}} \underline{\underline{\sigma}} \otimes (\underline{\underline{\Lambda}} : \tilde{\mathbf{n}}) \right] \quad [14b]$$

$\underline{\underline{K}}_T$  est un tenseur d'ordre 4 non symétrique à cause du dernier terme de [14b] introduit par le couplage fort entre l'écoulement plastique et l'endommagement.

Notons que la généralisation du modèle ci-dessus aux grandes déformations, exige une formulation en référentiel tournant. La rotation totale  $\underline{\underline{Q}}$  de la configuration actuelle est, à chaque instant  $t$ , solution d'une équation cinématique (Dogui, 1989). Les déformations élastiques sont supposées infinitésimales afin d'assurer l'additivité des taux des déformations :

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_e^J + \underline{\underline{D}}_p \quad [15]$$

où  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_e^J$  est la dérivée rotationnelle de Jaumann du tenseur des petites déformations élastiques.

### 3. Modélisation numérique du comportement plastique endommageable

La simulation numérique par EF de tout procédé de formage revient à résoudre (au sens faible) les équations d'équilibre à différents instants du chargement en utilisant une procédure incrémentale. Si l'on discrétise par EF la forme variationnelle faible associée au problème d'équilibre, on aboutit, après assemblage sur tous les éléments, au système algébrique non linéaire exprimant l'équilibre dynamique de la structure :

$$[M]\{\ddot{U}\} + \{F\}_{\text{int}} - \{F\}_{\text{ext}} = 0 \quad [16]$$

où  $[M]$  est la matrice globale de masse (diagonale) et  $\{F_{\text{int}}\}$  (respectivement  $\{F_{\text{ext}}\}$ ) est le vecteur global des efforts intérieurs (respectivement extérieurs) de toute la structure. La résolution numérique du système non linéaire (équation [16]) est envisagée de deux manières : par un schéma itérative statique implicite (SI) ou par un schéma dynamique explicite (DE).

### 3.1. Schéma statique implicite (SI)

Dans une analyse statique implicite, l'équation [16] se réduit à :

$$\{R\} = \{F\}_{\text{int}} - \{F\}_{\text{ext}} = 0 \quad [17]$$

$\{R\}$  étant le résidu d'équilibre statique. La méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée dans le cadre du code ABAQUS/Std. Le résidu (équation [17]) est alors linéarisé grâce au développement de Taylor au premier ordre :

$$\{R\}_n^{s+1} = \{R\}_n^s + \left[ \left( \frac{\partial R_n}{\partial U_n} \right)^s \right] \{\delta U_n\} + \dots = 0 \quad [18]$$

où  $\{\delta U\}_n = \{U_n^{s+1}\} - \{U_n^s\}$  est la variation des déplacements entre les itérations successives (s+1) et (s). La matrice tangente consistante de ce système à l'itération (s) est :

$$[K_T^s(U_n)] = - \left[ \left( \frac{\partial R_n}{\partial U_n} \right)^s \right] \quad [19]$$

Cette dernière fait apparaître la dérivée de tous les termes intégraux intervenant dans  $\{F\}_{\text{int}}$  et  $\{F\}_{\text{ext}}$ . Une discussion détaillée de ces aspects peut être trouvée dans (Saanouni, 2003). Ce schéma implicite a l'avantage d'être inconditionnellement stable et possède une convergence quadratique pourvu que l'opérateur tangent (équation [19]) soit cohérent avec le schéma de discrétisation temporelle de la contrainte (Simo *et al.*, 1985, 1998 ; Saanouni *et al.*, 2003). Cependant, le calcul de cette matrice tangente n'est pas anodin car il dépend aussi bien du modèle de comportement que des conditions aux limites évolutives (contact/frottement). C'est pour cela qu'en mise en forme, il est plus avantageux d'utiliser un schéma de résolution de type DE qui ne nécessite pas de matrice tangente.

### 3.2. Schéma dynamique explicite (DE)

Dans une analyse dynamique explicite, l'équation [16] s'écrit à l'instant  $t_n$  début de l'incrément de temps :

$$[M_n] \{\ddot{U}_n\} + \{R_n\} = 0 \quad [20]$$

L'algorithme explicite consiste à obtenir une solution de l'équation précédente ( $U_{n+1}$ ) à l'instant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  en fonction des quantités connues aux instants précédents :

$$\{\ddot{U}_n\} = [M_n]^{-1} \{R_n\} \quad [21a]$$

$$\{\dot{U}_{n+1/2}\} = \{\dot{U}_{n-1/2}\} + \frac{\Delta t_{n+1} + \Delta t_n}{2} \{\ddot{U}_n\} \quad [21b]$$

$$\{U_{n+1}\} = \{U_n\} + \Delta t_{n+1} \{\dot{U}_{n+1/2}\} \quad [21c]$$

Notons que ce schéma explicite évite les itérations ainsi que le calcul de la matrice tangente. Il n'utilise que la matrice masse qui peut être avantageusement diagonalisée (Chiou *et al.*, 2002). Sa stabilité et sa précision dépendent fortement du pas de temps  $\Delta t$  (Abaqus, 2001).

### 3.3. Intégration du modèle

Qu'on utilise le schéma SI ou DE, on doit intégrer les équations constitutives sur chaque incrément de temps afin de déterminer la valeur des variables  $\underline{\sigma}_{n+1}$ ,  $\underline{X}_{n+1}$ ,  $R_{n+1}$  et  $D_{n+1}$  à la fin de chaque incrément. Ceci est réalisé par un algorithme implicite (itératif) de type Newton appelé schéma du retour radial (Simo *et al.*, 1985, 1998 ; Chaboche *et al.*, 1996 ; Saanouni *et al.*, 2003). L'intégration des équations différentielles [7] à [10] compte tenu des équations [1] à [6] se fait par une méthode classique de prédiction élastique et correction plastique avec retour radial (Saanouni *et al.*, 2003 ; Khelifa, 2004 ; Belamri, 2004).

#### 3.3.1. Etape de prédiction élastique

On se donne un incrément de déformation totale  $\Delta \underline{\varepsilon}$  à l'instant  $t_n$  que l'on considère purement élastique. En supposant l'isotropie de l'élasticité, la contrainte « essai » résultante à la fin de l'incrément  $t_{n+1}$  est alors :

$$\underline{\sigma}_{n+1}^* = \underline{\sigma}_n + (1 - D_n) \underline{\underline{\Lambda}} : \Delta \underline{\varepsilon} = \underline{\sigma}_n + (1 - D_n) [2\mu \Delta \underline{\varepsilon} + \lambda_e \text{tr}(\Delta \underline{\varepsilon}) \underline{1}] \quad [22]$$

où  $\mu$  et  $\lambda_c$  sont les constantes d'élasticité de Lamé. On remplace la valeur de  $\underline{\sigma}_{n+1}^*$  dans l'expression du critère pour avoir :

$$f_{n+1}^* = \frac{\|\underline{\sigma}_{n+1}^* - \underline{X}_n\| - R_n}{\sqrt{1 - D_n}} - \sigma_y \quad [23]$$

Si  $f_{n+1}^* < 0$ , la solution est élastique et les variables à l'instant  $t_{n+1}$  sont :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^*, \underline{X}_{n+1} = \underline{X}_n, R_{n+1} = R_n, D_{n+1} = D_n \text{ et } \underline{\varepsilon}_{n+1}^p = \underline{\varepsilon}_n^p \quad [24]$$

### 3.3.2. Etape de correction plastique

Si  $f_{n+1}^* \geq 0$  il faut procéder à une correction plastique sur  $\underline{\sigma}_{n+1}^*$  afin de calculer  $\underline{\sigma}_{n+1}$ ,  $\underline{X}_{n+1}$ ,  $R_{n+1}$  et  $D_{n+1}$  de sorte à vérifier le critère de plasticité en fin de l'incrément :

$$f_{n+1} = \frac{\|\underline{\sigma}_{n+1} - \underline{X}_{n+1}\| - R_{n+1}}{\sqrt{1 - D_{n+1}}} - \sigma_y = 0 \quad [25]$$

où  $\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^* - (1 - D_{n+1}) \underline{\underline{\Lambda}} : \Delta \underline{\varepsilon}^p$  et  $\Delta \underline{\varepsilon}^p = \frac{\Delta \lambda}{\sqrt{1 - D_{n+1}}} \tilde{\underline{n}}_{n+1}$  ce qui donne, en élasticité isotrope :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^* - 2\mu \sqrt{1 - D_{n+1}} \Delta \lambda \tilde{\underline{n}}_{n+1} \quad [26]$$

Par ailleurs, la discrétisation des équations d'écroissance par le schéma asymptotique conduit à :

$$\underline{X}_{n+1} = C(1 - D_{n+1}) \left[ \underline{\alpha}_n e^{-a\Delta\lambda} + \frac{(1 - e^{-a\Delta\lambda})}{a\sqrt{1 - D_{n+1}}} \tilde{\underline{n}}_{n+1} \right] \quad [27]$$

$$R_{n+1} = Q(1 - D_{n+1}) \left( r_n e^{-b\Delta\lambda} + \frac{(1 - e^{-b\Delta\lambda})}{b\sqrt{1 - D_{n+1}}} \right) \quad [28]$$

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & \frac{1}{2} \frac{\underline{\sigma}_n : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\sigma}_n}{(1 - D_{n+1})^2} + \frac{1}{2} (\Delta \underline{\varepsilon} - \Delta \lambda \frac{\tilde{\underline{n}}_{n+1}}{\sqrt{1 - D_{n+1}}}) : \underline{\underline{\Lambda}} : (\Delta \underline{\varepsilon} - \Delta \lambda \frac{\tilde{\underline{n}}_{n+1}}{\sqrt{1 - D_{n+1}}}) \\
& + \frac{\underline{\sigma}_n}{(1 - D_{n+1})} : (\Delta \underline{\varepsilon} - \Delta \lambda \frac{\tilde{\underline{n}}_{n+1}}{\sqrt{1 - D_{n+1}}}) + \frac{Q}{2} \left[ r_n e^{-b\Delta\lambda} + \frac{(1 - e^{-b\Delta\lambda})}{b\sqrt{1 - D_{n+1}}} \right]^2 \\
& + \frac{C}{3} \left[ \frac{\underline{\alpha}_n e^{-a\Delta\lambda} + \frac{(1 - e^{-a\Delta\lambda})}{a\sqrt{1 - D_{n+1}}}}{\tilde{\underline{n}}_{n+1}} \right] : \left[ \frac{\underline{\alpha}_n e^{-a\Delta\lambda} + \frac{(1 - e^{-a\Delta\lambda})}{a\sqrt{1 - D_{n+1}}}}{\tilde{\underline{n}}_{n+1}} \right]
\end{aligned} \quad [29]$$

En remplaçant toutes ces quantités dans les expressions du critère (équation [5]), de l'équation de dommage ([10]) et de l'expression de la normale (équation [7]), on arrive au système de trois équations (une tensorielle et deux scalaires) suivant :

$$f_{n+1}(\Delta\lambda, \tilde{\underline{n}}_{n+1}, D_{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{1 - D_{n+1}}} (\|\underline{\sigma}_{n+1} - \underline{X}_{n+1}\| - R_{n+1}) - \sigma_y = 0 \quad [30a]$$

$$\underline{h}_{n+1}(\Delta\lambda, \tilde{\underline{n}}_{n+1}, D_{n+1}) = \underline{H} : (\underline{\sigma}_{n+1} - \underline{X}_{n+1}) - \|\underline{\sigma}_{n+1} - \underline{X}_{n+1}\| \tilde{\underline{n}}_{n+1} = 0 \quad [30b]$$

$$g_{n+1}(\Delta\lambda, \tilde{\underline{n}}_{n+1}, D_{n+1}) = D_{n+1} - D_n - \Delta\lambda \left\langle \frac{Y_{n+1} - Y_0}{S} \right\rangle^s \frac{1}{(1 - D_{n+1})^\beta} = 0 \quad [30c]$$

dont la résolution itérative par un schéma classique de Newton donne, à convergence, les inconnues sous la forme :

$$\Delta\lambda_{n+1} = \Delta\lambda + \delta\Delta\lambda, \quad \tilde{\underline{n}}_{n+1} = \tilde{\underline{n}}_n + \delta\tilde{\underline{n}} \quad \text{et} \quad D_{n+1} = D_n + \delta D \quad [31]$$

La connaissance de ces variables permet de remonter à toutes les autres inconnues du problème.

#### 4. Application au gonflement hydraulique

La méthodologie de simulation numérique présentée ci-dessus est appliquée à la prévision de l'endommagement ductile dans une tôle mince soumise à un essai de gonflement hydraulique avec une matrice elliptique. Les essais de gonflement hydraulique (ou d'expansion biaxiale) sont utilisés pour étudier l'aptitude des tôles minces à se déformer plastiquement sans atteindre la rupture. Ces procédés consistent à encastrier un flan entre une matrice et un serre-flan. Un jonc peut être utilisé pour empêcher le flan de glisser radialement. Un fluide est injecté sous pression contrôlée pour gonfler le flan. Un procédé d'expansion biaxiale est

similaire à un emboutissage en expansion, car la tôle est étirée suivant deux directions dans son plan.

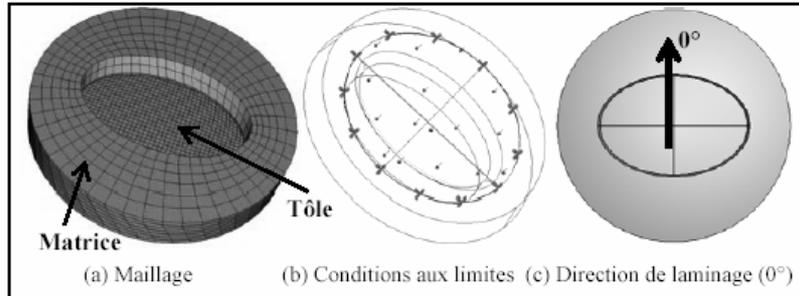
L'essai de gonflement hydraulique est réalisé sur une tôle en acier inoxydable (X6 Cr Ni 18 10) à l'ENIM/Tunisie. L'identification des coefficients du modèle implémenté dans la plate-forme d'ABAQUS sur ce matériau a été faite dans (Khelifa, 2004) sur la base de plusieurs essais de traction dans différentes directions. Cette identification a donné les coefficients rassemblés dans le tableau 1.

Sur ces essais les grandeurs mesurées expérimentalement sont : la variation de la pression en fonction du déplacement du point polaire (centre de la plaque) et le palpement du déplacement de points situés le long de lignes méridiennes passant par le centre de la plaque. Cela permet d'avoir le profil de la calotte pour différents niveaux de pression.

La matrice elliptique a un grand axe de 110 mm et un petit axe de 74 mm. Elle est supposée rigide indéformable et modélisée par des éléments de coques minces à 4 nœuds (élément R3D4 d'ABAQUS). La tôle est un flan circulaire de rayon 66,5 mm et d'épaisseur 0,8 mm. Elle est maillée par 3 848 éléments solides 3D hexaédriques à 8 nœuds, isoparamétriques et à intégration réduite (éléments C3D8R d'ABAQUS). Après une étude sur l'effet du nombre d'éléments dans l'épaisseur, il s'avère que deux rangées d'éléments dans l'épaisseur de la tôle sont suffisantes pour assurer un bon compromis entre précision et coût de calcul.

Elasticité isotrope	E [MPa]			ν		
	193000.			0,3		
Plasticité orthotrope	$\sigma_y$ [MPa]	C [MPa]	a	Q [MPa]		b
	260.	7000.	200.	1680.		1,1
	F	G	H	L	M	N
	0,26	0,34	0,66	1,5	1,5	1,78
Endommagement isotrope	S [MPa]	s		β	Y <sub>0</sub> [MPa]	
	83,1	5.		3.	0,01	

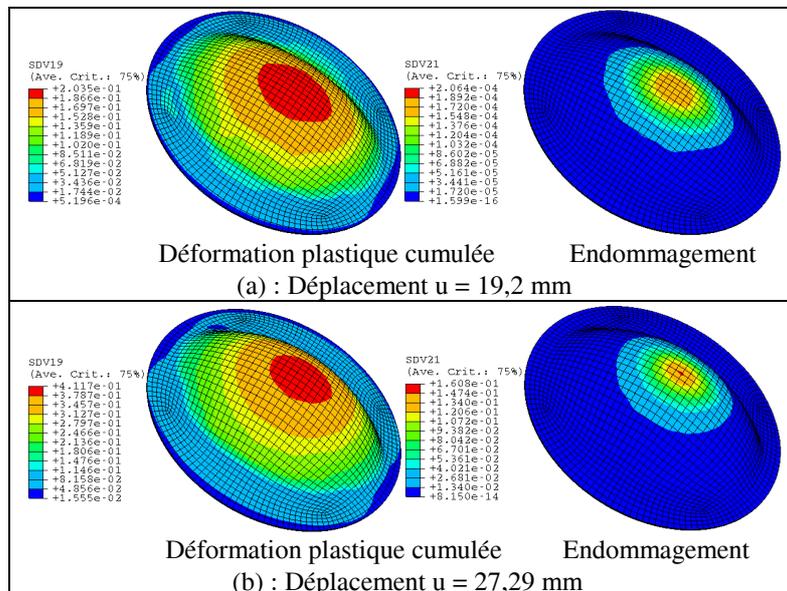
**Tableau 1.** Coefficients du modèle pour l'acier inoxydable X6 Cr Ni 18 10 étudié

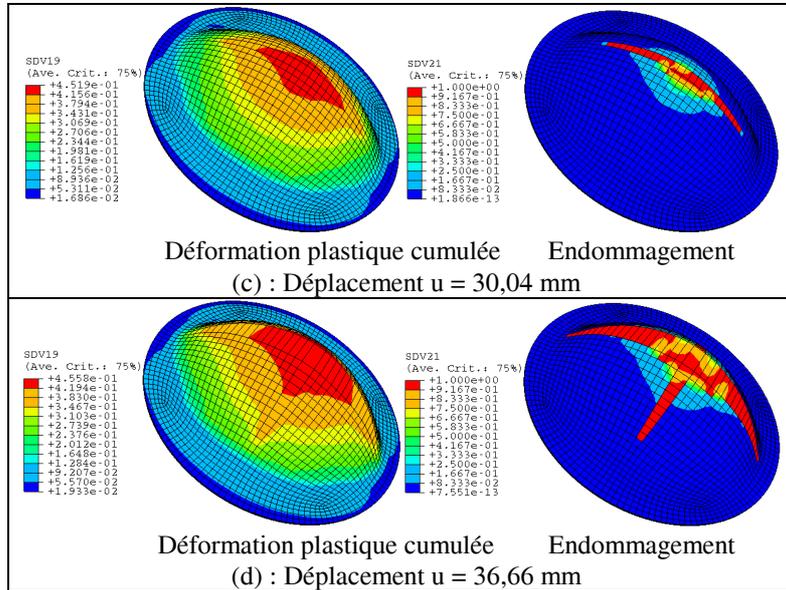


**Figure 1.** Gonflement hydraulique à matrice elliptique

Les conditions de la simulation sont les suivantes (figure 1) : la matrice est bloquée (encastrée) sur son bord extérieur. La tôle est encastrée le long de son périmètre extérieur pour représenter le blocage par le jonc. La densité du matériau est  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ , le coefficient de frottement de Coulomb entre la tôle et la matrice est de  $\eta = 0,17$ , il correspond à un contact métal-métal lubrifié. Enfin la direction de laminage est orientée à  $0^\circ$ .

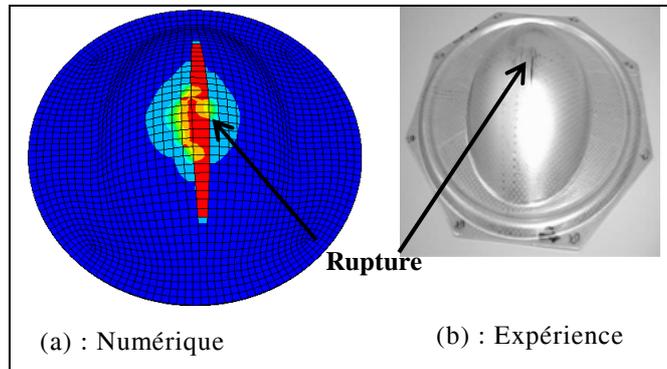
Les isovalues de la déformation plastique cumulée et de l'endommagement à certains déplacements sont données sur la figure 2. Sur le plan qualitatif, on note que la fissuration se produit par éclatement de la tôle selon deux directions perpendiculaires : une première fissure le long du grand axe de l'ellipse et une deuxième fissure plus courte le long du petit axe (figure 2).



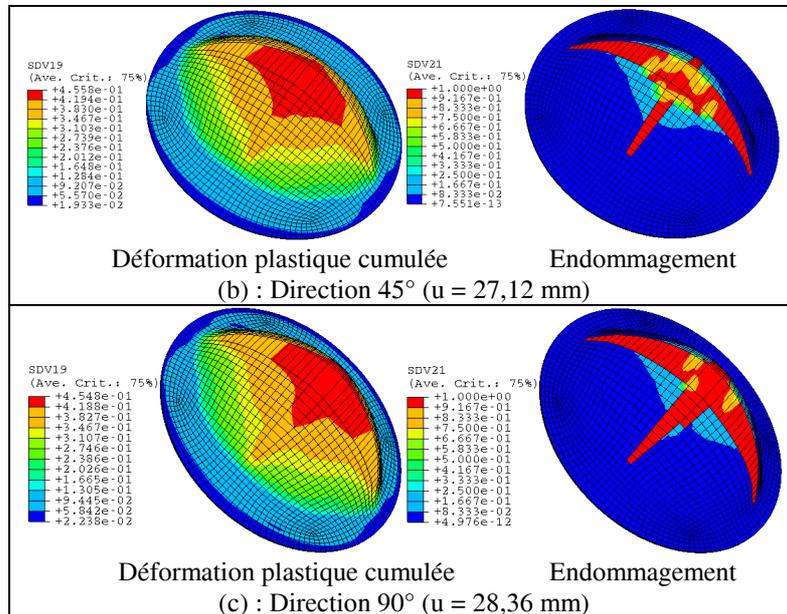


**Figure 2.** Distributions de la déformation plastique cumulée et de l'endommagement suivant la direction de laminage ( $0^\circ$ )

La figure 3 montre une comparaison qualitative entre la fissure prédite numériquement et celle observée expérimentalement pour la direction de laminage  $0^\circ$ .



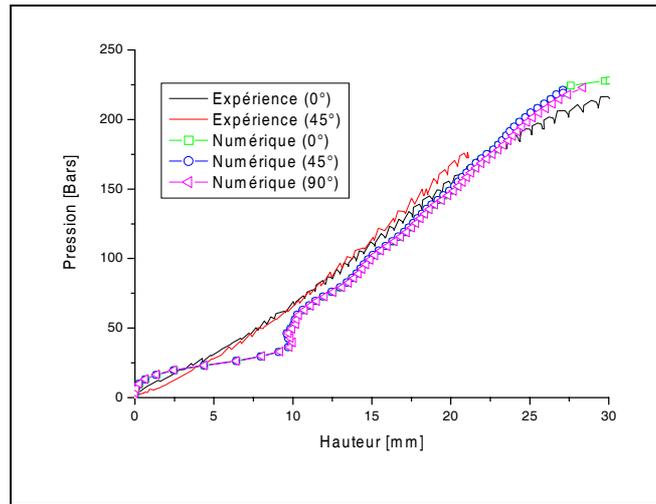
**Figure 3.** Rupture de la tôle à un déplacement  $u = 30.04$  mm suivant la direction de laminage ( $0^\circ$ )



**Figure 4.** Distribution de champs mécaniques (déformation plastique cumulée et endommagement) suivant la direction  $45^\circ$  et  $90^\circ$  à la rupture

La figure 4 montre la distribution de la déformation plastique et de l'endommagement suivant la direction  $45^\circ$  et  $90^\circ$  à l'instant de rupture. Notons que l'instant de rupture est différent pour chaque direction d'anisotropie comme le montrent les figures 2 et 4. Cette différence malgré l'isotropie de l'endommagement est due aux effets de l'orthotropie de l'écoulement plastique sur l'endommagement générés par le couplage fort. On note clairement que la rupture semble indépendante de l'orientation de la direction de l'orthotropie par rapport aux axes de la matrice elliptique (figure 3). Toujours d'une façon indépendante de l'orientation, on note que la distribution de tous les champs mécaniques commence par être axisymétrique autour du point polaire (centre de la cavité elliptique). Cette zone axisymétrique de localisation semble diminuer de rayon au fur et à mesure que la pression augmente. Dès que l'endommagement maximum atteint quelques pour-cents ( $<10\%$ ), il localise selon la direction du grand axe de l'ellipse. Cette localisation de l'endommagement force (par effet de couplage) les autres champs mécaniques à suivre le même type de localisation. Dès que l'endommagement maximal atteint quelques dizaines de pour-cents ( $>10\%$ ) dans la zone située le long du grand axe, une deuxième zone apparaît dans la direction perpendiculaire (le long le petit axe). Ces deux fissures centrées autour du point polaire de l'ellipsoïde évoluent rapidement et provoquent l'éclatement de la tôle pour (voir figure 5) :

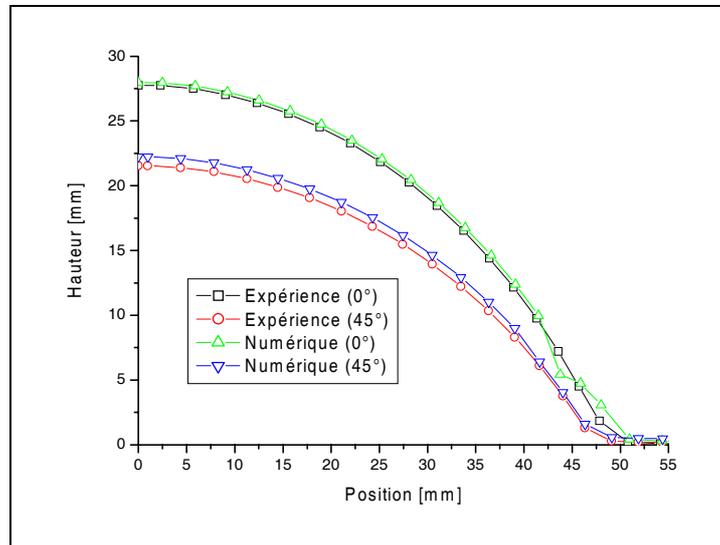
- $u = 30,04$  mm et  $P = 22,8$  MPa pour la direction  $0^\circ$  ;
- $u = 27,12$  mm et  $P = 21,9$  MPa pour la direction  $45^\circ$  ;
- $u = 28,36$  mm et  $P = 22,3$  MPa pour la direction  $90^\circ$ .



**Figure 5.** Comparaison des courbes pression-déplacement au pôle

Les variations de la pression en fonction de la hauteur au pôle sont reportées sur la figure 5 pour les trois directions ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ). Les résultats de la simulation approchent mieux l'expérience suivant la direction  $0^\circ$  comparativement à la direction  $45^\circ$ . On note également un comportement suspect de la solution numérique pour des pressions inférieures à 50 Bars. Ces résultats semblent perfectibles et plaident en faveur de l'utilisation d'un modèle plus évolué utilisant deux normes différentes des contraintes dans le critère de plasticité et dans le potentiel plastique dans le cadre d'une formulation non associée et non normale à critère non quadratique (Badreddine *et al.*, 2005).

Finalement, la figure 6 présente une comparaison entre le profil expérimental et celui obtenu par le calcul numérique à un déplacement de la calotte de  $u = 27,8$  mm suivant la direction  $0^\circ$  et à  $u = 22,1$  mm suivant la direction  $45^\circ$ . On note une légère surestimation des déplacements par la simulation. Cela semble s'expliquer par la non convenance du critère de plasticité quadratique de Hill 1948 à la description de l'orthotropie de l'écoulement plastique pour ce matériau dans le cadre de cette formulation qui respecte la règle de normalité dans l'espace des contraintes.



**Figure 6.** Profils de la calotte suivant  $0^\circ$  et  $45^\circ$  le long du grand axe

## 5. Conclusion

Une méthodologie numérique de prévision de l'endommagement ductile en mise en forme de tôles minces orthotropes a été présentée. L'application de cette méthodologie a été faite à des essais de gonflement hydraulique avec matrice elliptique. Les résultats numériques sont réalistes comparé aux résultats expérimentaux pour la prédiction des zones de rupture ductile. Cela montre la capacité de l'approche incrémentale proposée à prédire l'avènement de la rupture ductile qui peut se produire en formage de tôles minces orthotropes.

Plusieurs points sont perfectibles afin d'enrichir la méthodologie développée et de mettre à la disposition de l'ingénieur un véritable outil de formage virtuel :

- recours à une formulation non associée, non normale avec deux normes différentes intervenant dans la fonction de charge et le potentiel plastique ;
- utilisation de critères de plasticité anisotrope non quadratiques afin de mieux traduire l'anisotropie des tôles pour divers matériaux ;
- formulation non locale afin de s'affranchir de la dépendance de la solution vis-à-vis du maillage.

## Remerciements

Les auteurs remercient pour leur soutien financier, le CRCA et le FEDER (contrat N° 99-2-50-059) via le pole PMMC ainsi que le Comité Mixte de Coopération Universitaire Franco Tunisien (programme CMCU 01F1136).

## 6. Bibliographie

- Abaqus, *Theory manual*, Version 6.2, Hibbit, Karson & Sorensen, Inc, 2001.
- Aravas N., "The analysis of void growth that leads to central burst during extrusion", *J. Mech. Phys. Solids*, 34, 1986, p. 55-79.
- Badreddine H., Saanouni K., Dogui A., Gahbiche M.A., « Nouvelle formulation en GD d'un modèle élastoplastique couplé à l'endommagement », *CFM2005, 17<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique*, Troyes, 29 août, 2 Septembre, 2005.
- Belamri N., Modélisation numérique du découpage de tôles laminées, Application au cisailage et au refendage en 3D, Thèse de Doctorat de l'UTT, Décembre 2004.
- Belamri N., Cherouat A., Saanouni K., Autesserre P., « Simulation numérique du refendage de tôles minces », *CFM2005, 17<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique*, Troyes, 29 août, 2 Septembre 2005.
- Bennani B., Oudin J., "Backward extrusion of steels, effects of punch design on flow mode and void volume fraction", *Int. J. Machine Tools and Manufacture*, 35, 1995, p. 903-911.
- Bontcheva N., Iankov R., "Numerical investigation of the damage process in metal forming", *Eng. Frac. Mech.*, 40, 1991, p. 387-393.
- Boudeau N., Gelin J. C., "Prediction of the localized necking in 3D sheet metal forming processes from FE simulations", *J. Mat. Proc. Tech.*, 45, 1994, p. 229-235.
- Brunet M., Morestin F., Walter H., "Numerical analysis of failure in sheet metal forming with experimental validation", *Revue Européennes des Eléments Finis*, n° 2-3-4, 2001, p. 275-293.
- Brunet M., Sabourin N., Mgnib-Touchal S., "The prediction of necking and failure in 3D sheet forming analysis using damage variable", *Journal de Physique III*, 6, 1996, p. 473-482.
- Chaboche J.-L., "Continuum damage mechanics, Parts I and II", *J. of Ap. Mechanics*, 55, 1988, p. 59-72.
- Chaboche J.-L., Cailletaud G., "Integration methods for complex plastic constitutive equations", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 133, Elsevier, p. 125-155, 1996.
- Chiou Y.-J., Wang Y.-K., Hsiao P.-A., Chen, "Large displacement analysis of inelastic frame structures by convected material frame approach", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 13, Issue 2, 2002, p. 135-154.
- Dogui A., Plasticité anisotrope en grandes déformations, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Claude Bernard, Lyon (France), 1989.

- Gelin J.C., Oudin J., Ravalard Y., "An improved FEM for the analysis of the damage and ductile fracture in cold metal forming processes", *Annals of the CIRP*, 1985, Vol. 34, n° 1, p. 209-2131.
- Gelin J.C., "Finite Element Analysis of Ductile Fracture and defects Formations in Cold and Hot Forging", *Annals of the CIRP*, 39,1990, p. 215-218.
- Gurson A.-L., "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I- Yield criteria and flow rules for porous ductile media", *J. Eng., Mat. Tech.*, vol. 99, 1977.
- Hambli H., "Finite element model fracture prediction during sheet-metal blanking processes", *Eng. Fracture Mechanics*, 68, 2001, p. 365-378.
- Hammi Y., Simulation numérique de l'endommagement dans les procédés de mis en forme, PhD Thesis, University of Technology of Troyes, France, Avril 2000.
- Hartley P., Clift S.E., Salimi J., Sturgess C.E.N., Pillinger I., "The Prediction of Ductile Fracture Initiation in Metalforming Using a Finite Element Method and Various Fracture Criteria", *Res. Mech.*, 1989, 28, p. 269-293.
- Hill R., "A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals", *Royal Soc, London Proc.*, 1948, p. 281.
- Khelifa M., Simulation numérique de l'endommagement en formage des structures minces, Thèse de Doctorat, Université de technologie de Troyes, France, 2004.
- Khelifa M., Badreddine H., Gahbiche M.-A., Saanouni K., Cherouat A., Dogui A., "Effect of anisotropic plastic flow on the ductile damage evolution in sheet metal forming. Application to the circular bulging test", *International Journal of Forming Processes*, vol. 8, n° 2, 2005, p. 271-289.
- Lee H., Peng K.E., Wang J., "An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates", *Eng. Frac. Mech.*, 1985, vol. 21, n° 5, p. 1031-1054.
- Lemaitre J., Chaboche J.-L., *Mécanique des milieux solides*, Dunod, Paris, 1985.
- Lemaitre J., *A course on damage mechanics*, Springer Verlag Editions, 1992.
- Lestriez P., Saanouni K., Cherouat A., « Simulation numérique de la coupe orthogonale par couplage thermique-comportement-endommagement en transformations finies », *Mécanique & Industries*, vol. 6, 2005, p. 297-307.
- Onate E., Kleiber M., "Plastic and Viscoplastic Flow of Void Containing Metal – Applications to Axisymmetric Sheet Forming Problem", *Int. J. Num. Meth. In Engng.*, 1988, 25, p. 237-251.
- Pardoen T., Hachez F., Marchioni B., Blyth H., Atkins A.G., "Mode I fracture of sheet metal", *J. Mech. Phys. Solids*, 2004, 52, p. 423-452.
- Picart P., Ghouati O., Gelin J.C., "Optimization of Metal Forming Process Parameters with Damage Minimization", *J. Mat. Proc. Tech.*, 1998, 80-81, p. 597-601.
- Rice J. R., Tracey D. M., "On the enlargement of voids in triaxial stress field", *J. Mech-Phys*, vol. 17, 1969, p. 201-217.

- Saanouni K., Forster C., Benhatira F., “On the anelastic flow with damage”, *Int. J. of Damage Mechanics*, vol. 3, 1994, p. 141-169.
- Saanouni K., Hammi Y., *Numerical simulation of damage in metal forming processes*, in *Continuous Damage and Fracture*, Editor A. Benallal, Elsevier, 2000, p. 353-363.
- Saanouni K., Cherouat A., Hammi Y., “Numerical aspects of finite elastoplasticity with damage for metal forming”, *European Journal of Finite Elements*, vol. 10, n° 2-3-4, 2001, p. 327-351.
- Saanouni K., Chaboche J.L., *Computational damage mechanics, Application to metal forming*, Chapter 7 of Vol. 3, *Numerical and Computational methods*, Ed. I. Miline, R.O. Ritchie and B. Karjalainen, Elsevier Oxford, 2003, p. 321-376.
- Saanouni K., Mariage J.F., Cherouat A., Lestriez P., “Numerical prediction of discontinuous central bursting in axisymmetric forward extrusion by continuum damage mechanics”, *Computers & Structures*, vol. 82, 2004, p. 2309-2332.
- Simo J. C., Taylor R. L., “Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 48, 1985, p. 101-118.
- Simo J. C., Taylor R. L., *Computational inelasticity*, Springer New York, 1998.
- Zhu Y.Y., Cescotto S., “The Finite Element Prediction of Ductile Fracture Initiation in Dynamic Metalforming Processes”, *Journal de Physique III*, 1, 1991, p. 751-757.
- Zhu Y. Y., Cescotto S., Habraken A.M., “A fully coupled elastoplastic damage modeling and fracture criteria in metal forming processes”, *J. Mat. Proc. Tech.*, 32, 1992, p. 197-204.