
Optimisation topologique de surfaces additionnelles de tôles embouties

Slim Ben-Elechi* — **Hakim Naceur****

* *Institut Supérieur de Mécanique de Paris, Supméca
3, rue Fernand Hainaut, F-93407 St Ouen cedex*

** *Lab. Roberval, Université de Technologie de Compiègne
FRE 2833 UTC-CNRS
BP 20529, F-60205 Compiègne cedex
slim.benelechi@supmeca.fr*

RÉSUMÉ. Dans cet article nous présentons une nouvelle approche numérique pour l'optimisation topologique de surfaces additionnelles (dites surfaces d'habillage) qui jouent un rôle important sur la qualité finale des pièces embouties. Cette nouvelle approche est basée sur le couplage d'une méthode inverse utilisée pour la simulation d'emboutissage et d'un algorithme d'optimisation topologique « évolutif ». Les résultats concernant l'optimisation de la forme des surfaces additionnelles de la boîte carrée (Benchmark de Numisheet'93) et de la coupelle de Renault Twingo montrent l'efficacité et l'intérêt industriel de notre approche.

ABSTRACT. In this paper we present a new numerical approach for topologic optimization of additional surfaces (called addendum surfaces) which play an important role upon the quality of the final workpiece. This new approach is based on the coupling between an inverse approach used for the deep drawing simulation and an evolutionary algorithm. The results concerning shape optimization of additional surfaces of the square cup (Benchmark of Numisheet'93) and the Twingo dashpot cup show the efficiency and the industrial interest of the proposed approach.

MOTS-CLÉS : emboutissage, approche inverse, optimisation topologique, algorithme évolutif, surfaces additionnelles.

KEYWORDS: sheet metal forming, inverse approach, topologic optimization, evolutionary optimization, additional surfaces.

1. Introduction

La simulation numérique de l'emboutissage est largement utilisée en conception et fabrication de produits industriels pour éviter les procédures expérimentales longues et coûteuses. Les actes des congrès récents (Pourboghrat *et al.*, 2005 ; Yang *et al.*, 2002 ; Ken, 2001) reflètent bien l'intérêt croissant porté à ce domaine et le progrès accompli depuis une dizaine d'années. De nombreux codes incrémentaux sont développés pour la simulation précise de l'emboutissage, deux types d'algorithmes sont couramment utilisés pour déterminer les incréments de déformations et de contraintes. Le premier est de type statique implicite qui permet l'obtention de résultats d'une grande précision pour des temps de calculs malheureusement conséquents. Le second algorithme est de type dynamique explicite qui a l'avantage d'annuler les problèmes de convergence et d'économiser de l'espace mémoire. Néanmoins, les résultats sont moins précis et les temps de calculs restent grands. Parallèlement aux codes incrémentaux, on trouve quelques codes simplifiés qui sont développés pour la conception préliminaire des pièces et des outillages d'emboutissage et qui permettent des simulations en des temps de calculs très réduits (Batoz *et al.*, 1989 ; Guo *et al.*, 1990 ; Gerdeen *et al.*, 1989 ; Sklad *et al.*, 1992 ; Liu *et al.*, 1995). Une méthode d'éléments finis simplifiée appelée « Approche Inverse » (A.I.) a été proposée par le professeur Batoz et ses collaborateurs afin d'estimer les déformations dans les pièces embouties (Batoz *et al.*, 1997, 1998 ; Ben-Elechi, 2004). L'idée originale de l'A.I. est d'exploiter la connaissance de la forme de la pièce finale désirée en adoptant une « démarche virtuelle inverse » pour estimer les déformations de la pièce emboutie. Les hypothèses sur l'action des outils et sur la loi de comportement permettent d'éviter le problème de contact et l'intégration pas à pas de la plasticité ; ces hypothèses sont discutables, mais l'estimation des déformations est satisfaisante pour la majorité des applications industrielles. L'A.I. présente l'avantage d'être beaucoup plus rapide que les approches incrémentales.

Les deux types d'approches (incrémentales et inverses) permettent d'étudier l'influence des paramètres du procédé d'emboutissage sur la qualité de la pièce emboutie finale. Cependant dans la pratique lorsqu'on souhaite chercher une bonne combinaison de ces paramètres, de nombreuses analyses doivent être effectuées. L'optimisation manuelle des paramètres de l'emboutissage reste très longue et fastidieuse. Relativement peu de travaux ont été consacrés à l'optimisation automatique de certains paramètres du procédé d'emboutissage principalement à cause des difficultés numériques (simulation de l'emboutissage coûteuse et complexe, de nombreux appels du code d'analyse sont nécessaires dans la boucle d'optimisation et le calcul des sensibilités reste difficile à réaliser dans un code incrémental). (Ohata *et al.*, 1996) ont utilisé une méthode dite « Sweeping Simplex » avec le code ROBUST (dynamique explicite incrémental) pour optimiser les profondeurs d'emboutissage de deux poinçons afin d'obtenir une distribution d'épaisseur « uniforme ». (Ghouati *et al.*, 1998) ont utilisé un algorithme d'optimisation de type « Gradient » avec deux codes d'analyse incrémentale d'emboutissage (méthodes statique implicite et dynamique explicite) pour contrôler le retour élastique. L'A.I. a déjà été combinée avec succès à un algorithme de minimisation de type Programmation Quadratique Séquentielle (SQP)

pour optimiser la forme du flan initial (Naceur, 1998). Cette technique nécessite le calcul précis de sensibilités avec une bonne précision du fait que le problème d'emboutissage est fortement non linéaire, sinon la convergence ne peut être garantie.

Une nouvelle approche simple appelée « Optimisation Structurale Evolutionnaire » (*Evolutionary Structural Optimisation* « ESO ») pour l'optimisation topologique de structures et pièces mécaniques a été proposée par Xie et Steven (1993, 1997). Cette approche est basée sur le concept d'enlèvement progressif de matière inefficace dans la structure. Ainsi la structure évoluera en partant d'une grande forme très simple (en général rectangulaire) vers une forme optimale (en général complexe). Comparée à d'autres méthodes d'optimisation structurale, telles que la méthode d'homogénéisation (Bendsøe *et al.*, 1998) et la méthode de la fonction de densité (Yan *et al.*, 1994), la méthode ESO est très attractive grâce à sa simplicité et de son efficacité. Ces dernières années, la méthode ESO a démontré qu'elle peut être utile pour résoudre beaucoup de problèmes de dimensionnement, d'optimisation de forme et de topologie pour des problèmes statiques, dynamiques et de flambement (Xie, 1993, 1997).

En se basant sur l'ensemble de ces travaux, nous avons adopté la méthode ESO pour l'optimisation de forme du flan initial lors de l'emboutissage de pièces tridimensionnelles.

Dans cet article, nous rappelons d'abord les hypothèses principales et la formulation de l'A.I., nous présentons ensuite la procédure d'optimisation évolutionnaire : les variables de conception, la définition de la fonction coût et des limitations fonctionnelles. Les premiers résultats concernant l'optimisation de la forme des surfaces additionnelles dans l'emboutissage de la boîte carrée (Benchmark de Numisheet'93) (Makinouchi *et al.*, 1993) et de la coupelle de Renault Twingo montrent l'efficacité et l'intérêt industriel de notre approche.

2. Description de l'approche inverse

L'A.I. est basée sur la connaissance de la forme finale de l'embouti. A partir d'un maillage de la pièce finale, on cherche les positions des points matériels dans le flan plan initial (figure 1). La première estimation peut être la simple projection verticale des nœuds dans le plan horizontal, et puis ces positions sont ajustées dans ce plan par un algorithme implicite de Newton-Raphson pour satisfaire l'équilibre dans la pièce finale. Deux hypothèses principales sont retenues dans l'A.I. : l'hypothèse du chargement radial ou proportionnel, qui permet d'utiliser la loi intégrée de Hencky, l'hypothèse simplificatrice des actions des outils, qui permet de remplacer ces actions par des forces de pression/frottement pour éviter le problème de contact. Ainsi nous obtenons une méthode directe et indépendante de l'historique des déformations. L'A.I. s'avère très rapide et robuste pour l'estimation des grandes déformations dans les pièces embouties.

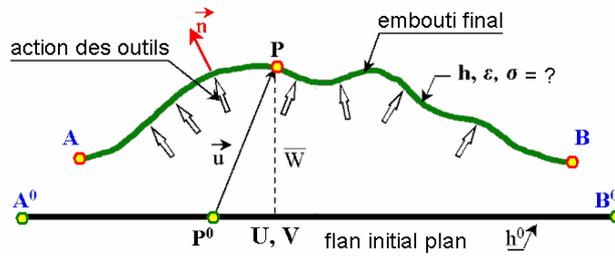


Figure 1. Description générale de l'approche inverse

2.1. Relations cinématiques

Dans l'A.I., seuls le flan plan initial C^0 et la forme 3D de la pièce finale sont considérés. En utilisant l'hypothèse de Kirchhoff, les vecteurs position initiale et finale d'un point matériel q peuvent être exprimés par rapport au point p situé sur la surface moyenne de C (figure 2) :

$$\vec{x}_q^0 = \vec{x}_p^0 + z^0 \vec{n}^0 = \vec{x}_p - \vec{u}_p + z^0 \vec{n}^0 \quad [1]$$

$$\vec{x}_q = \vec{x}_p + z \vec{n} \quad [2]$$

où \vec{u}_p est le vecteur de déplacement du point p , \vec{n}^0 et \vec{n} sont les normales de la surface moyenne en p^0 et p , z^0 et z sont les coordonnées à travers des épaisseurs initiale et finale.

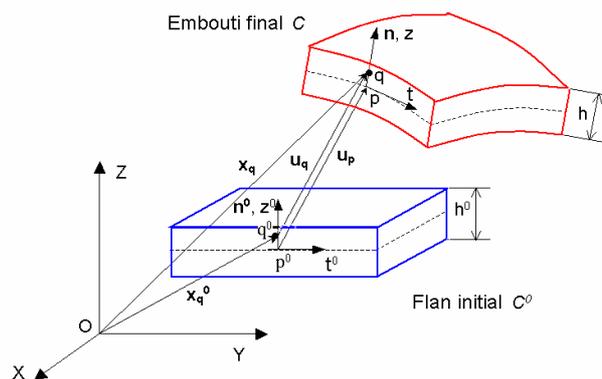


Figure 2. Cinématique d'une coque mince en emboutissage

Soit $x = \langle x, y, z \rangle$ le repère local orthogonal sur la configuration finale. Le tenseur gradient de déformation aux points q^0 et q par rapport à p est donné par :

$$d\bar{x}_q^0 = \mathbb{F}_0^{-1} d\bar{x}_q ; \quad \mathbb{F}_0^{-1} = \left[\bar{x}_{p,x} - \bar{u}_{p,x} \ ; \ \bar{x}_{p,y} - \bar{u}_{p,y} \ ; \ \bar{n}^0 / \lambda_3 \right] \quad [3]$$

$$d\bar{x}_q = \mathbb{F}_z^{-1} d\bar{x} ; \quad \mathbb{F}_z^{-1} = \left[\bar{x}_{p,x} + z \bar{n}_{,x} \ ; \ \bar{x}_{p,y} + z \bar{n}_{,y} \ ; \ \bar{n} \right] \quad [4]$$

où $\lambda_3 = \frac{z}{z^0} = \frac{h}{h^0}$ est l'élongation d'épaisseur (supposée constante à travers l'épaisseur). L'inverse du tenseur gradient de déformation en q est obtenu avec [5], [6]:

$$d\bar{x}_q^0 = \mathbb{F}^{-1} d\bar{x}_q \quad \mathbb{F}^{-1} = \mathbb{F}_0^{-1} \mathbb{F}_z^{-1} \quad [5]$$

Les tenseurs \mathbb{F}_0^{-1} , \mathbb{F}_z^{-1} s'expriment dans le repère local défini par :

$$\bar{t}_1 = \bar{x}_{p,x} \ ; \ \bar{t}_2 = \bar{x}_{p,y} \ ; \ \bar{n} = \frac{\bar{t}_1 \times \bar{t}_2}{\|\bar{t}_1 \times \bar{t}_2\|} \quad [6]$$

Ainsi le tenseur de Cauchy-Green gauche entre q et q^0 peut être défini par :

$$B^{-1} = \mathbb{F}^{-T} \mathbb{F}^{-1} \quad [7]$$

L'hypothèse de l'élongation d'épaisseur constante permet d'obtenir le tenseur B^{-1} avec le découplage des élongations dans le plan et suivant l'épaisseur de la tôle. Le calcul des valeurs propres de B^{-1} donne deux élongations principales dans le plan (λ_1, λ_2) et leur matrice de transformation $[M]$. L'élongation d'épaisseur est calculée avec l'hypothèse d'incompressibilité. Finalement, les déformations logarithmiques sont obtenues par :

$$[\varepsilon] = [M] [\ln \Lambda] [M]^T \quad [8]$$

2.2. Equations constitutives

Le modèle de simulation basée sur l'A.I. permet de traiter l'anisotropie transverse, la plasticité est ainsi décrite par le critère de Hill 1948 sous l'hypothèse de contraintes planes :

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 - 1 = 0 \quad [9]$$

Avec :

$$2F = 2G = \frac{1}{\sigma_{y3}^2} \quad 2H = \frac{2}{\sigma_y^2} - \frac{1}{\sigma_{y3}^2} \quad N = \frac{2}{\sigma_y^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_{y3}^2}$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_y \quad K = \frac{\sigma_y}{\sigma_{y3}} \quad F(\sigma) = \sigma_e = \sigma_y$$

On obtient :

$$F(\sigma) = \left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + K^2\sigma_{33}^2 - K^2\sigma_{33}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - (2 - K^2)\sigma_{11}\sigma_{22} + 2L\sigma_y^2(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) + 2\left(2 - \frac{1}{2}K^2\right)\sigma_{12}^2 \right]^{1/2}$$

Si on pose :

$$R = \frac{2}{K^2} - 1$$

On aura l'expression finale du critère de Hill 1948 :

$$F(\sigma) = \left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \frac{2R}{R+1}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\frac{2R+1}{R+1}\sigma_{12}^2 \right]^{1/2}$$

En utilisant la notation ingénieur :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \rangle \text{ et en utilisant la matrice d'anisotropie transverse } [P] :$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{R}{1+R} & 0 \\ -\frac{R}{1+R} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+2R)}{1+R} \end{bmatrix}$$

Le critère peut être mis sous la forme suivante :

$$F(\sigma) = \sigma [P]\{\sigma\} - \bar{\sigma} = 0$$

avec $\bar{\sigma}$ est la contrainte seuil équivalente calculé en utilisant la loi de type Hollomon (voir équation [23]). L'hypothèse du chargement proportionnel (radial) permet d'obtenir les relations suivantes entre les déformations plastiques totales et les contraintes totales :

$$\{\varepsilon_p\} = \frac{\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\sigma}} [P] \{\sigma\} \quad [10]$$

où $\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\langle \varepsilon_p \rangle [P]^{-1} \{\varepsilon_p\}}$ est la déformation plastique équivalente. Les petites déformations élastiques sont calculées classiquement par :

$$\{\varepsilon_e\} = [H_e]^{-1} \{\sigma\} = [C] \{\sigma\} \quad [11]$$

En utilisant les équations [10] et [11] on obtient la relation entre les déformations totales et les contraintes de Cauchy :

$$\{\sigma\} = \left([C] + \frac{1}{H_s} [P] \right)^{-1} \{\varepsilon\} \quad [12]$$

avec $H_s = \bar{\sigma} / \bar{\varepsilon}_p$. On peut alors calculer $\bar{\varepsilon}_p$ et H_s en utilisant une estimation des déformations totales $\{\varepsilon\}$, puis estimer les contraintes. Cette opération est effectuée à chaque point d'intégration numérique à travers l'épaisseur.

2.3. Formulation éléments finis

L'élément de coque DKT12 représenté sur la figure 3 est utilisé dans l'A.I. (Batoz *et al.*, 1998). Le maillage d'éléments finis est créé sur la pièce finale connue. Le principe des travaux virtuels (PTV) est écrit sur cette configuration :

$$W = \sum_{elt} W^e = \sum_{elt} (W_{int}^e - W_{ext}^e) = 0 \quad [13]$$

où W_{int}^e est le travail virtuel interne élémentaire, W_{ext}^e est le travail virtuel externe élémentaire associé aux actions des outils.

2.4. Vecteur de forces internes

Le travail virtuel interne élémentaire est donné par l'expression suivante :

$$W_{int}^e = \int_{v^e} \langle \varepsilon^* \rangle \{\sigma\} dv = \int_{v^e} \langle \varepsilon_x^* \quad \varepsilon_y^* \quad \varepsilon_{xy}^* \rangle \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dv \quad [14]$$

avec

$$\langle \varepsilon^* \rangle = \langle e^* \rangle + z \langle \chi^* \rangle, \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) \quad [15]$$

où $\langle \varepsilon^* \rangle$ est composé des déformations virtuelles de membrane et de flexion, $\{\sigma\}$ est le vecteur de contraintes planes de Cauchy, l'épaisseur h est supposée constante par élément.

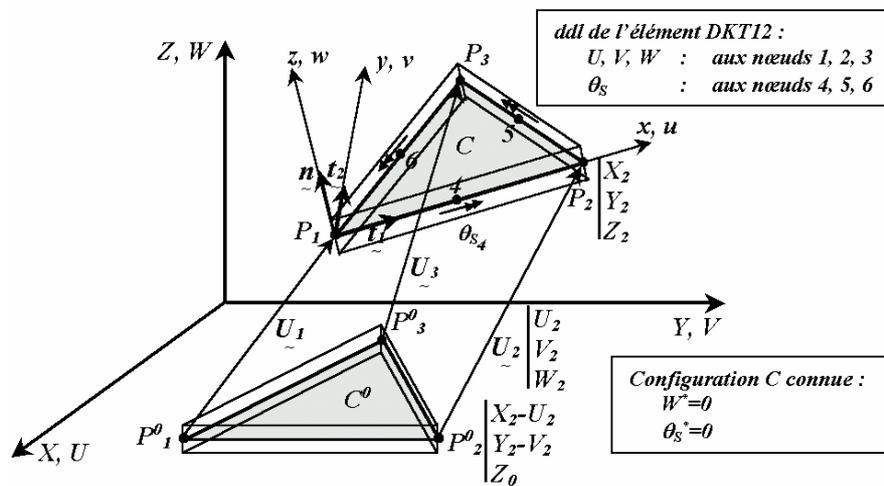


Figure 3. Élément de coque DKT12 (6 d.d.l. globaux dans l' A.I.)

Les déplacements sont interpolés linéairement à partir des déplacements nodaux exprimés dans le repère local de l'élément.

$$\{u\} = [N]\{u_n\} \quad \{u^*\} = [N]\{u_n^*\}$$

Avec :

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3 \rangle$$

où $[N]$ est la matrice des fonctions d'interpolations linéaires, conduisant donc à des déformations (et des contraintes) constantes par élément, telles que :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{2A}((y_3 - y_2)(x_2 - x) - (x_3 - x_2)(y_2 - y))$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}((y_1 - y_3)(x_3 - x) - (x_1 - x_3)(y_3 - y))$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}((y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y))$$

où x_i et y_i sont les coordonnées locales des nœuds.

Les déformations virtuelles de membrane sont discrétisées en utilisant l'élément CST et sont exprimées en fonction des déplacements virtuels nodaux en utilisant des approximations linéaires (Batoz *et al.*, 1992) :

$$\langle e^* \rangle = \langle u_{,x}^* \quad v_{,y}^* \quad u_{,y}^* + v_{,x}^* \rangle = [B_m] \{u_n^*\} \quad [16]$$

avec $\langle u_n^* \rangle = \langle u_1^* \quad v_1^* \quad w_1^* \quad u_2^* \quad v_2^* \quad w_2^* \quad u_3^* \quad v_3^* \quad w_3^* \rangle$

$$[B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & 0 & y_{31} & 0 & 0 & y_{12} & 0 & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{21} & 0 \\ x_{32} & y_{23} & 0 & x_{13} & y_{31} & 0 & x_{21} & y_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad [17]$$

où $[B_m]$ est la matrice classique de déformations constante.

Un élément de plaque de type Kirchhoff discret DKT6 (Batoz *et al.*, 1997) est utilisé pour la représentation des déformations de flexion (figure 4).

Pour définir les courbures virtuelles de l'élément DKT6, les rotations β_x et β_y de la normale à la coque sont exprimées linéairement en termes des rotations aux milieux des cotés ($\beta_{xk}, \beta_{yk}, k = 4, 5, 6$ avec des approximations semi- C^0). Ces dernières sont ensuite transformées dans le repère s, n ($\beta_{xk}, \beta_{yk} \Rightarrow \beta_{sk}, \beta_{nk}$).

L'hypothèse de Kirchhoff discret le long des côtés de l'élément est introduite afin d'exprimer β_{sk}^* en fonction des déplacements transversaux w_i^* et w_j^* aux deux nœuds sommets du côté. Ainsi l'élément DKT6 possède uniquement trois degrés de rotation aux milieux des côtés $\theta_{sk} = \beta_{nk}$ et trois degrés de translation w_j .

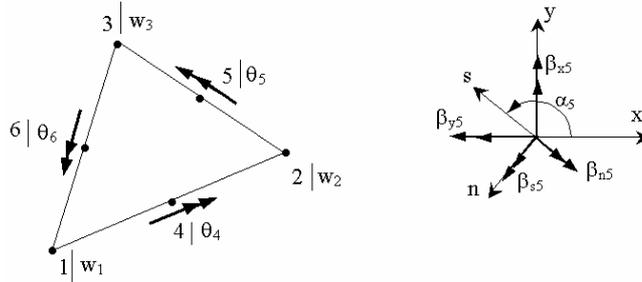


Figure 4. Elément de plaque DKT6

Dans l’A.I. les rotations virtuelles $\beta_{nk}^* = \theta_{sk}^*$ sont nulles puisque les rotations réelles aux nœuds milieux des cotés sont connues de la surface finale de l’embouti. Nous obtenons finalement l’opérateur de flexion $[B_f]$:

$$\langle \chi^* \rangle = \langle \beta_{x,x}^* \quad \beta_{y,y}^* \quad \beta_{x,y}^* + \beta_{y,x}^* \rangle = [B_f] \{w_n^*\} \quad [18]$$

avec : $\langle w_n^* \rangle = \langle w_1^* \quad w_2^* \quad w_3^* \rangle$

$$[B_f] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} S_4 C_4 - S_6 C_6 & S_5 C_5 - S_4 C_4 & S_6 C_6 - S_5 C_5 \\ -S_4 C_4 + S_6 C_6 & S_5 C_5 - S_4 C_4 & S_6 C_6 - S_5 C_5 \\ -C_4^2 + S_4^2 + C_6^2 - S_6^2 & -C_5^2 + S_5^2 + C_4^2 - S_4^2 & -C_6^2 + S_6^2 + C_5^2 - S_5^2 \end{bmatrix} \quad [19]$$

où $S_4 = \sin \alpha_4$, $C_4 = \cos \alpha_4$, α_4 est l’angle d’inclinaison du coté $\overline{12}$ (figure 4), S_5 , C_5 , α_5 et S_6 , C_6 , α_6 sont associés aux cotés $\overline{23}$ et $\overline{31}$.

L’élément de membrane CST et l’élément de flexion DKT6 sont superposés pour obtenir l’élément de coque DKT12, qui contient neuf degrés de translation dans le repère local ($\langle u_i^* \quad v_i^* \quad w_i^* \rangle$, $i = 1, 2, 3$; puisque $\beta_{nk}^* = \theta_{sk}^* = 0$). Quand on passe au repère global, les déplacements verticaux connus W_i permettent de réduire encore le nombre de degrés de liberté : seulement deux degrés de translation dans le plan (U_i et V_i) à chaque nœud sont des variables effectives dans le système des équations non linéaires. Nous obtenons ainsi le vecteur des forces internes dans le repère local :

$$\{F_{int}^e\} = \int_{V^e} \left([B_m]^T + z [B_f]^T \right) \{\sigma\} dz dA \quad [20]$$

L'intégration suivant l'épaisseur permet d'écrire le vecteur des forces internes en fonction des efforts de membrane $\{N\}$ et des moments de flexion $\{M\}$ qui sont constants par élément :

2.5. Vecteur de forces externes

L'A.I. est une méthode directe entre les configurations finale et initiale sans tenir compte de l'historique. L'action du poinçon sur la tôle n'est pas considérée dans ce travail. L'action du serre-flan est remplacée par une force équivalente du frottement. Afin de déterminer la force résultante de frottement sous serre-flan, nous établissons l'équilibre des forces sous serre-flan illustré sur la figure 5.

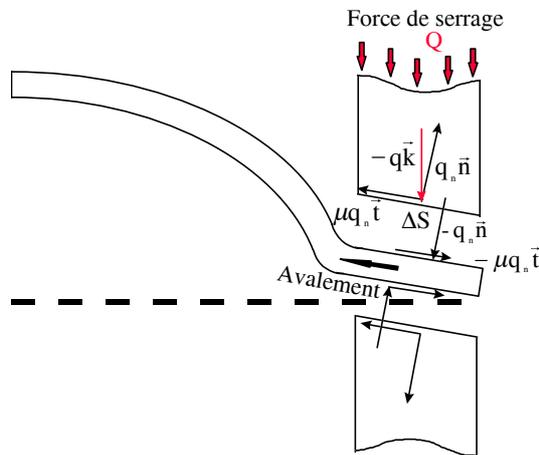


Figure 5. Description du frottement sous serre-flan

Pour cela, nous déterminons l'équilibre d'une surface ΔS appartenant au serre-flan supérieur :

$$\frac{-Q}{S_{XOY}} (\Delta S \cos \alpha) \bar{k} + q_n \Delta S \bar{n} + \mu q_n \Delta S \bar{t} = \vec{0} \quad [21]$$

avec

Q , la force de serrage totale ;

\bar{k} , la direction de cette force ;

μ , le coefficient de frottement ;

S_{XOY} , la projection verticale de la surface de serrage totale dans le plan XOY ;

\vec{n} , le vecteur normal à la tôle ;

\vec{t} , le vecteur unitaire de la direction de glissement tel que :

$$\vec{t} = \frac{\vec{u}_t}{\|\vec{u}_t\|} \text{ avec } \vec{u}_t = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n} \text{ et } \vec{u}_t \text{ est la projection du vecteur}$$

déplacement \vec{u} sur le plan tangent à la tôle.

Cela nous permet d'obtenir l'expression de l'équation d'équilibre suivant \vec{k} , comme suit :

$$\frac{-Q}{S_{XOY}}(\Delta S \cos \alpha) + q_n \Delta S \cos \alpha + \mu q_n \Delta S \sin \beta = 0$$

avec $\cos \alpha = \vec{n} \cdot \vec{k}$ et $\sin \beta = \vec{n} \cdot \vec{t}$

Notons que, les vecteurs \vec{n} , \vec{t} et \vec{k} n'étant pas forcément coplanaires, la somme des angles α et β n'est alors pas égale à l'angle droit.

Nous pouvons ainsi exprimer la force de frottement f , exercée sur les deux faces de la tôle, par unité de surface.

$$f = 2\mu q_n = \frac{2\mu Q}{S_{XOY}} \frac{1}{1 + \mu \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}}$$

Afin d'établir le vecteur des forces nodales, on utilise l'équation du PTV pour écrire le travail des forces de frottement dans le repère local sur la configuration finale.

$$W_f^e = \int_{A^e} \langle \mathbf{u}^* \quad \mathbf{v}^* \rangle \begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \end{Bmatrix} dA = \langle \mathbf{U}_n^* \rangle \{ \mathbf{F}_f^e \}$$

Le vecteur des forces nodales élémentaire est donc défini par :

$$\{ \mathbf{F}_f^e \} = [\mathbf{T}]^T \int_{A^e} [\mathbf{N}]^T \{ f \} dA \quad [22]$$

où $[\mathbf{N}]$ est la matrice des fonctions d'interpolation linéaire de l'élément triangulaire de membrane.

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1-\xi-\eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \end{Bmatrix} = \frac{-f}{\sqrt{u^2 + v^2}} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad [23]$$

u et v sont les déplacements dans le repère local et $[\mathbf{T}]^T$, la matrice de transformation du repère local au repère global.

Afin d'étudier la validité et les limites des différentes hypothèses considérées pour intégrer les frottements du poinçon, de la matrice et du serre-flan au sein de l'approche inverse, nous présentons dans la section suivante divers exemples d'analyses numériques.

3. Optimisation topologique de surfaces additionnelles

3.1. Introduction

L'optimisation topologique peut améliorer grandement les performances d'une structure donnée. Une méthode générale capable de traiter simultanément de l'optimisation de forme et de topologie est un sujet de recherche encore ouvert. Un important développement dans ce domaine est la méthode d'homogénéisation proposée par (Bendsée *et al.*, 1998), où la structure est représentée par un modèle avec des microtrous et l'objectif est de chercher la porosité optimale du milieu poreux en utilisant un critère d'optimalité. L'utilisation d'un maillage fixe pour la conception permet d'éviter le remaillage automatique qui est très coûteux et complexe, malheureusement la méthode d'homogénéisation est mathématiquement encore plus complexe.

Depuis 1993, une méthode simple pour l'optimisation de forme et de topologie, appelée « Optimisation Structurale Evolutionnaire » (*Evolutionary Structural Optimisation* « ESO ») a été proposée par Xie et Steven (1993, 1997). Cette méthode est basée sur le concept d'enlèvement graduel de matière (des éléments finis) pour rechercher une conception optimale. La méthode ESO a été développée par Xie et Steven au début pour les problèmes de statique linéaire en considération avec les contraintes, ensuite elle a été généralisée pour le traitement des problèmes d'optimisation vibratoires.

La méthode ESO est simple et intuitive. Elle utilise un modèle avec un maillage régulier pour représenter le domaine de conception initial. La forme optimale est un sous-domaine du domaine initial. Une itération d'optimisation évolutionnaire consiste en une analyse E.F. de la structure, un calcul de sensibilités et des indicateurs d'enlèvement des éléments de maillage.

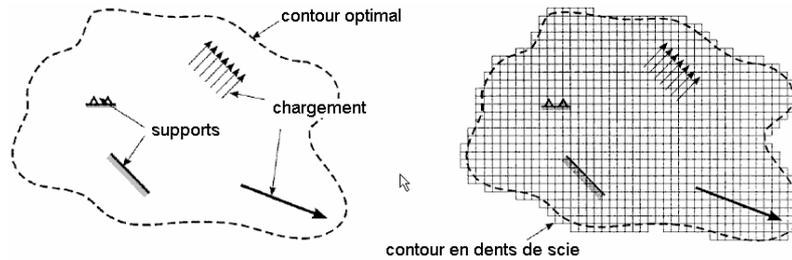


Figure 6. *Forme optimale obtenue par la méthode ESO*

La méthode ESO peut être implantée facilement dans tous les codes d'éléments finis. Comme la méthode d'homogénéisation, utilisant un seul maillage fixe pour la modélisation du domaine de conception, la méthode ESO génère des solutions avec des contours non lisses en dents de scie (figure 6), par contre elle permet d'éviter le remaillage automatique et d'obtenir la forme optimale de la structure.

3.2. Formulation du problème d'optimisation

Cette section concerne la détermination de la forme optimale du contour du flan initial d'une pièce emboutie tridimensionnelle. On considère plusieurs variables d'optimisation dont le nombre est égal au nombre d'éléments sous serre-flan. Ainsi le problème d'optimisation consiste à chercher la meilleure forme géométrique des surfaces sous serre-flan (figure 7) pour obtenir une pièce emboutie de bonne qualité avec le minimum de matière. La partie utile de la pièce reste inchangée, la seule surface qui changera durant le processus d'optimisation est la surface sous serre-flan représentée sur la figure 7.

La qualité de la pièce est caractérisée par la variation de l'épaisseur suivante :

$$-25\% \leq \left(\frac{h^e - h^0}{h^0} \right) \leq +15\% \quad [24]$$

avec h^0 et h^e sont respectivement l'épaisseur initiale et finale d'un élément.

Nous proposons dans cette étude deux critères d'enlèvement d'éléments : le premier est basé classiquement sur la contrainte équivalente totale, le deuxième plus convenable à l'emboutissage de tôles est basé sur la densité de travail plastique. Ce critère s'avère très intéressant car en emboutissage les zones de la tôle les plus sollicitées sont celles où subsistent des déformations permanentes importantes.

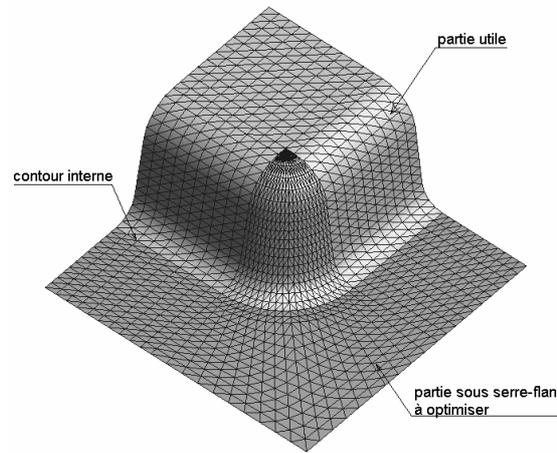


Figure 7. Optimisation des surfaces sous serre-flan d'un quart d'une boîte carrée

3.3. Critère de contrainte équivalente

A chaque cycle d'optimisation, après la résolution non linéaire du problème d'emboutissage, nous calculons dans chaque élément la déformation équivalente totale $\bar{\varepsilon}$ (équation [10]) :

En utilisant la courbe d'érouissage contrainte-déformations uni-axiale, nous calculons la contrainte seuil équivalente avec la loi de type Hollomon :

$$\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^n \quad [25]$$

avec K et n paramètres d'érouissage. Ainsi nous pouvons définir le critère de rejet RR de l'élément par :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_{\max}} \leq RR \quad [26]$$

avec $\bar{\sigma}_{\max}$ est la valeur de la contrainte équivalente maximale dans la pièce.

3.4. Critère de la densité de travail plastique

La densité de travail plastique au niveau élémentaire est donnée par :

$$d = \int_0^{\bar{\varepsilon}_p} \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}_p \quad [27]$$

Dans le cas d'un écrouissage isotrope de type Hollomon, et en utilisant la relation d'additivité nous aurons :

$$\bar{\varepsilon}_p = \left(\frac{\bar{\sigma}}{K} \right)^{1/n} - \frac{\bar{\sigma}}{E} \quad [28]$$

d'où l'on a :

$$d\bar{\varepsilon}_p = \left(\frac{1}{nK} \left(\frac{\bar{\sigma}}{K} \right)^{1/n-1} - \frac{1}{E} \right) d\bar{\sigma} \quad [29]$$

Ainsi nous obtenons l'expression de la densité de travail plastique en fonction de la contrainte équivalente totale uniquement :

$$d = \int_{\bar{\sigma}_0}^{\bar{\sigma}} \bar{\sigma} \left(\frac{1}{nK} \left(\frac{\bar{\sigma}}{K} \right)^{1/n-1} - \frac{1}{E} \right) d\bar{\sigma} \quad [30]$$

avec $\bar{\sigma}_0$ est la contrainte équivalente qui correspond au cas où $\bar{\varepsilon}_p = 0$ (avant plastification). Cette valeur est déterminée par la résolution de l'équation non linéaire suivante :

$$\left(\frac{\bar{\sigma}_0}{K} \right)^{1/n} - \frac{\bar{\sigma}_0}{E} = 0 \quad [31]$$

En intégrant la formule [30] nous obtenons l'expression directe suivante :

$$d = \frac{(1+n)(\bar{\sigma}_0^2 - \bar{\sigma}^2) - 2E \left(\bar{\sigma}_0 \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{K} \right)^{1/n} - \bar{\sigma} \left(\frac{\bar{\sigma}}{K} \right)^{1/n} \right)}{2E(1+n)} \quad [32]$$

Ainsi nous pouvons définir le critère de rejet RR de l'élément par :

$$\frac{d}{d_{\max}} \leq RR \quad [33]$$

avec d_{\max} la valeur de la densité de travail plastique maximale dans la pièce.

Durant le processus d'optimisation la pièce peut comporter des zones non sollicitées, les éléments de cette zone peuvent être enlevés s'ils satisfont la relation [33] ou [35]. Le rapport de rejet RR peut être estimé par (Xie *et al.*, 1996, 1997 ; Querin *et al.*, 2000) :

$$RR = a_0 - a_1 SS - a_2 SS^2 - a_3 SS^3 + \dots, \quad 0 \leq RR \leq 1, \quad [34]$$

SS : le nombre de conceptions trouvées, c'est un compteur entier indiquant tous les états d'étude trouvés durant le processus d'évolution.

$$a_0 = 1$$

a_1, a_2, a_3, \dots sont des coefficients d'évolution qui peuvent être déterminés par des expérimentations numériques.

3.5. Limitation de volume

Le processus d'optimisation présenté ci-avant ne possède pas de test d'arrêt et peut donc itérer jusqu'à l'enlèvement complet des surfaces d'habillage. Une limitation sur la quantité de matière sous serre-flan à enlever est imposée. Si le volume de la partie sous serre-flan enlevée est supérieur ou égal à la limite imposée par l'utilisateur l'algorithme s'arrête :

$$\left\| \frac{V - V^0}{V^0} \right\| \leq V_R \quad [35]$$

V_R est un pourcentage d'enlèvement de matière tolérée par rapport au volume des surfaces d'habillage initiales.

3.6. Algorithme d'optimisation évolutionnaire

L'algorithme ESO programmé dans le code REFORM (logiciel de simulation d'emboutissage par la méthode Inverse développé à l'UTC) est représenté sur la figure 8.

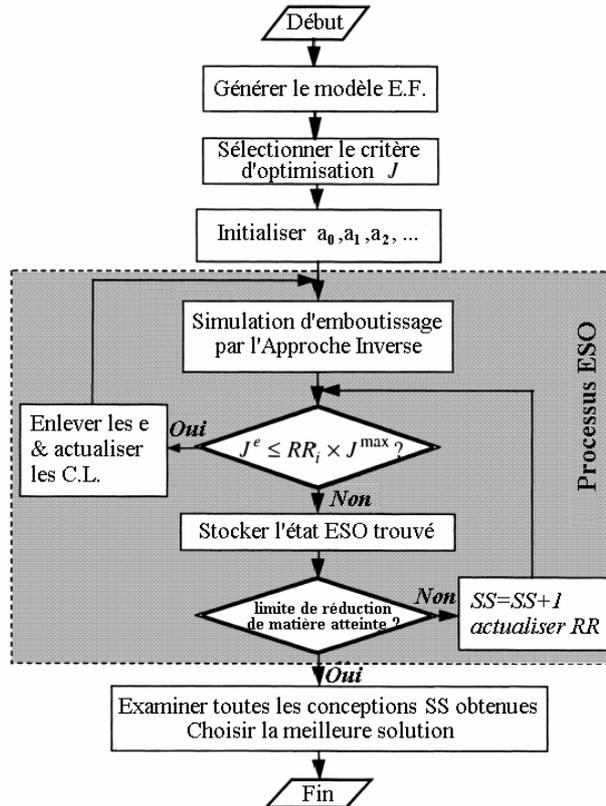


Figure 8. Algorithme d'optimisation ESO

4. Applications numériques

Cette application numérique concerne l'emboutissage d'un quart d'une boîte carrée à 25 mm de profondeur (Benchmark de Numisheet'93) (Makinouchi *et al.*, 1993). Nous cherchons à optimiser la forme des surfaces d'habillage afin d'obtenir une pièce emboutie avec la meilleure qualité et le minimum de matière. Les propriétés géométriques et matériaux sont les suivantes : flan plan initial de $150 \times 150 \text{ mm}^2$, matériau de module d'Young $E = 206000 \text{ MPa}$, épaisseur initiale $h^0 = 0,78 \text{ mm}$, coefficient d'anisotropie moyen (Lankford) $\bar{r} = 1,77$, coefficient de

frottement sous serre-flan $\mu = 0,144$, force de serrage totale $Q = 19600$ N, courbe d'écroutissage uni-axiale du matériau $\sigma = 567.29 \times e^{0.2637}$ MPa.

Deux critères d'optimisation ont été testés dans cette étude, le premier est celui de la densité de travail plastique, le deuxième est celui de la contrainte équivalente.

4.1. Emboutissage de la boîte carrée

Nous avons utilisé un maillage de 5 242 éléments de type DKT12 pour modéliser le quart de la boîte carrée (figure 9).

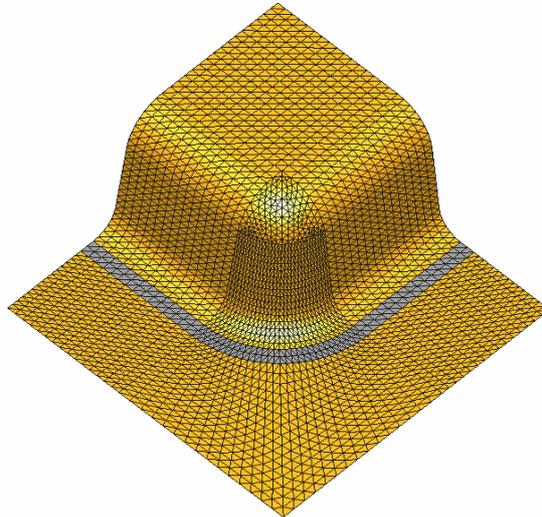


Figure 9. Un quart de la boîte carrée (5 242 éléments DKT12)

La figure 10 représente la variation de l'épaisseur en pourcentage sur l'embouti final sans optimisation. Du fait de la présence du frottement sous serre-flan et de la grande surface sous serre-flan, nous remarquons un fort amincissement ($\sim 16\%$).

La figure 11 représente la distribution de la densité de travail plastique sur l'embouti final avant optimisation. Nous remarquons une forte concentration de densité de travail plastique au congé de raccordement des deux murs.

Dans ce processus d'optimisation la convergence est obtenue au bout de 66 itérations avec une limite de réduction de volume de -85% du volume initial de la partie d'habillage.

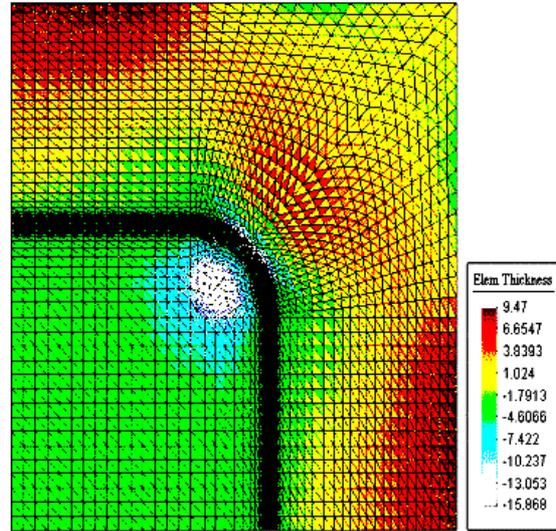


Figure 10. *Variation de l'épaisseur en pourcentage*

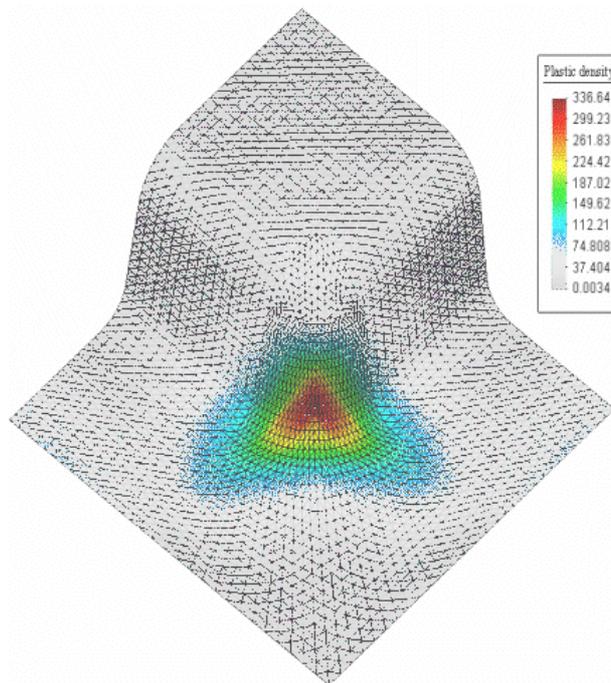


Figure 11. *Distribution de la densité de travail plastique*

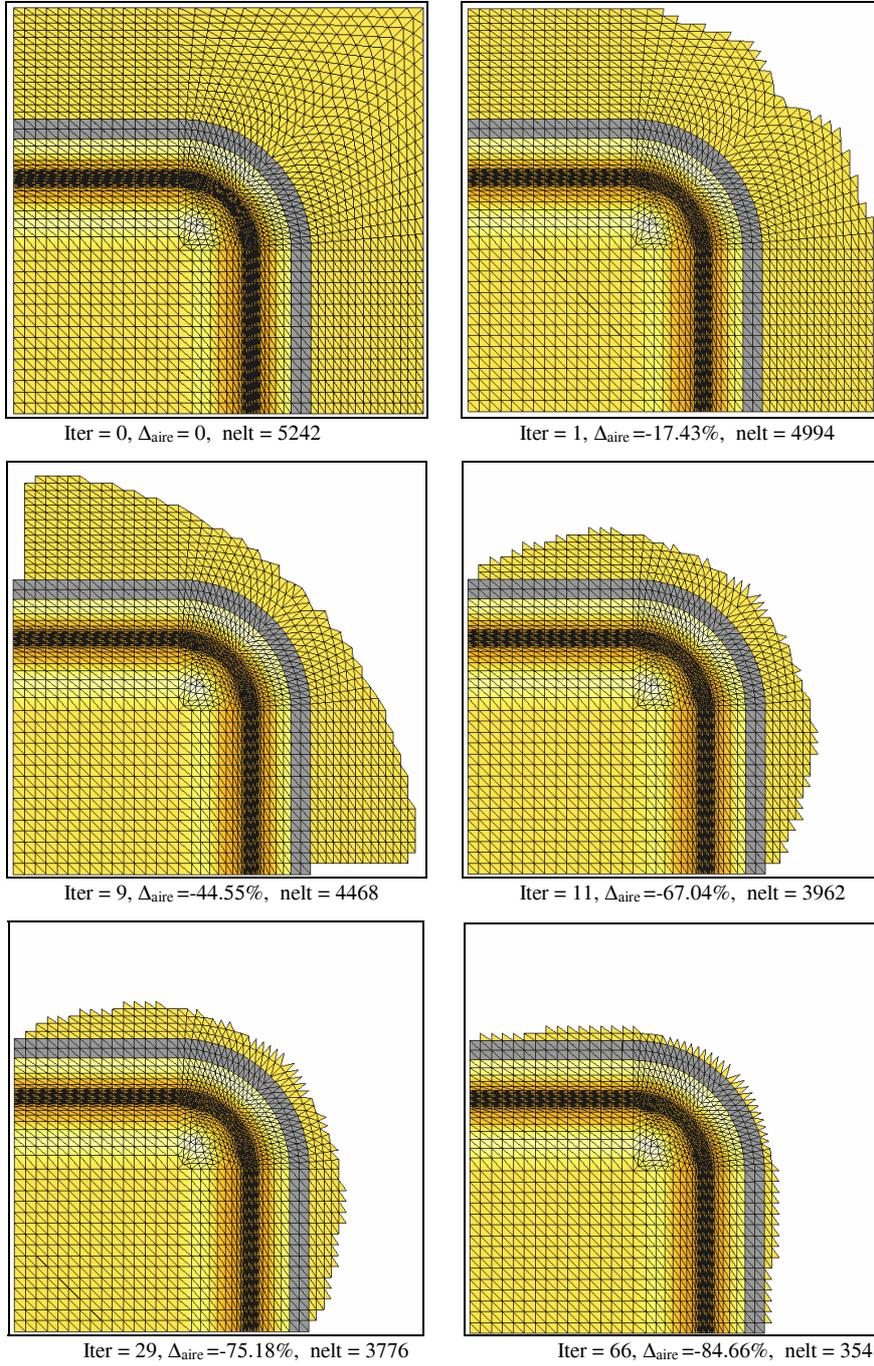


Figure 12. Différentes configurations obtenues durant le processus ESO

Sur la figure 12 nous représentons quelques configurations obtenues au cours du processus ESO. La configuration finale correspond à une réduction de volume de -85 % sur la surface sous serre-flan. Les figure 13 et 14 représentent respectivement en pourcentage les courbes d'évolution du volume et celui du maximum de la densité de travail plastique.

Sur la figure 14, nous pouvons remarquer que la configuration optimale obtenue par la densité de travail plastique (37^e itération) ne correspond pas nécessairement à la configuration optimale obtenue par la variation de l'épaisseur (67^e itération).

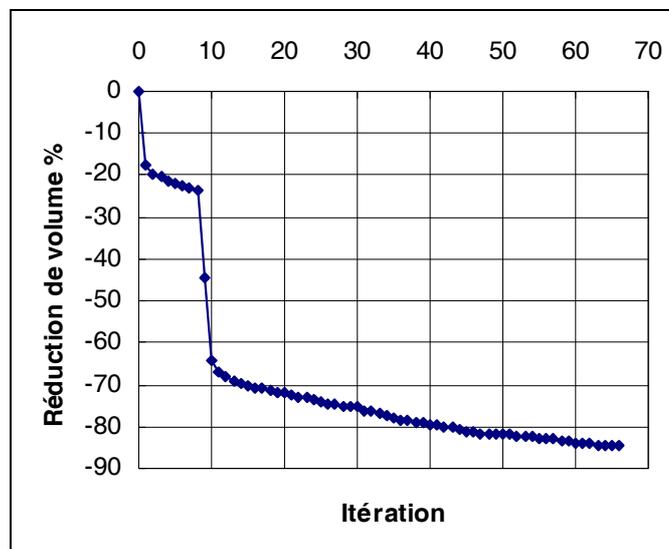


Figure 13. Réduction de volume

La solution optimale obtenue par le processus ESO est ensuite lissée (figure 15) en utilisant une courbe de type B-Spline sur le logiciel GiD[®].

Nous avons reconstruit la CAO en utilisant le contour lissé (Figure 15), puis nous avons lancé une simulation d'emboutissage par l'A.I. pour cette configuration. Sur la figure 16, sont donnés l'embouti final et le flan initial correspondant après le calcul par le logiciel REFORM[®].

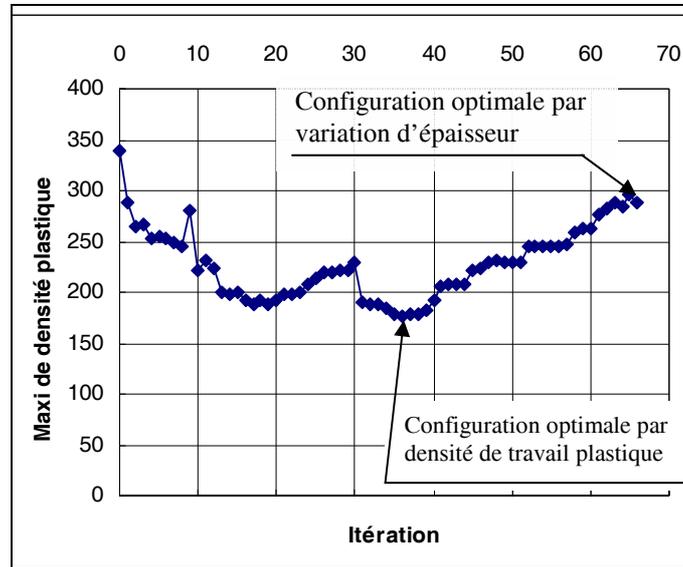


Figure 14. Evolution du maximum de la densité plastique

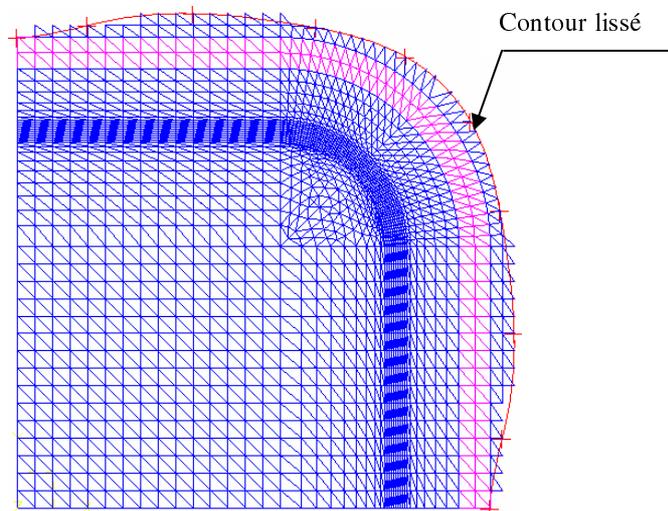


Figure 15. Lissage du contour optimisé

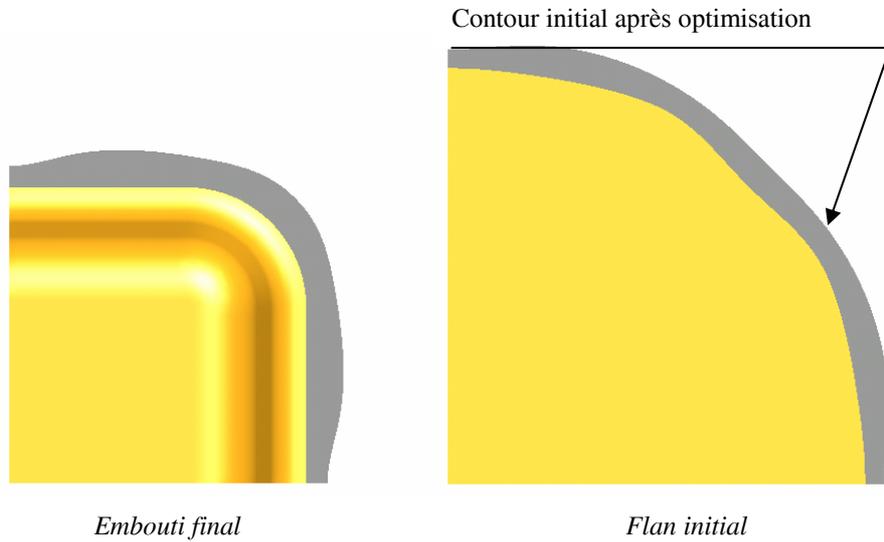


Figure 16. Contours et flan obtenus par optimisation

Sur la figure 17 est représentée la distribution de l'épaisseur sur l'embouti final avec le flan optimisé, nous remarquons une distribution d'épaisseur plus homogène que le cas initial et surtout avec un gain de matière de 84 %.

Sur la figure 18 est représenté la distribution de la densité de travail plastique de la configuration optimale, on remarque une diminution du maximum de densité de travail plastique.

Le tableau 1 résume les principaux paramètres obtenus avant et après optimisation.

	+ $\Delta h/h$ %	- $\Delta h/h$ %	d_{maxi}	ΔV %
Avant optimisation	+09,5	-15,9	336,6	0 %
Après optimisation	+10,2	-13,8	288,7	-84,7 %

Tableau 1. Bilan des résultats avant et après optimisation

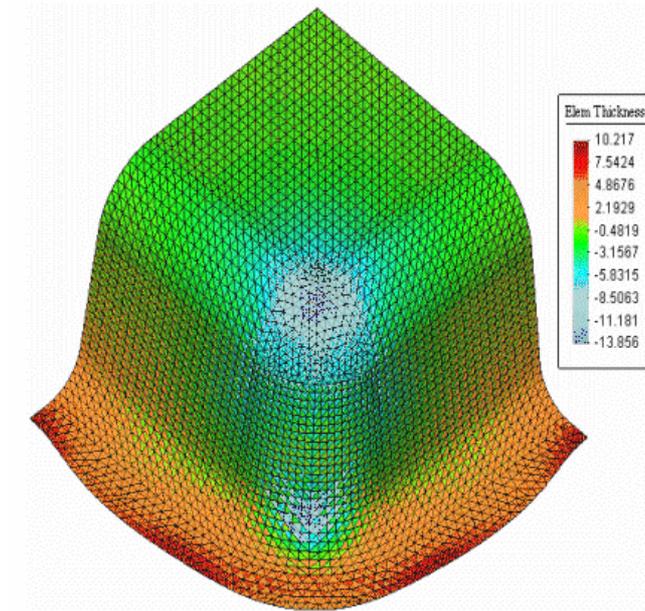


Figure 17. *Variation de l'épaisseur en %*

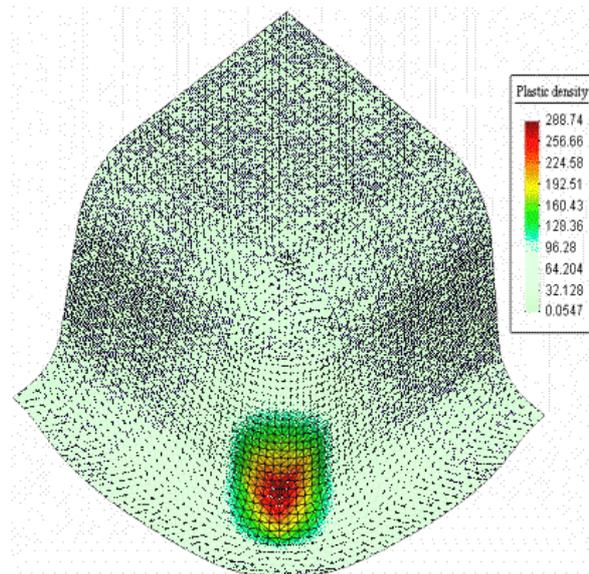


Figure 18. *Distribution de la densité de travail plastique*

4.2. Emboutissage de la coupelle de Renault Twingo

La coupelle d'amortisseur de la Renault Twingo (figure 19) a été utilisée dans le cadre d'une étude visant à la validation de plusieurs outils de simulation d'emboutissage. Il convient de préciser que la coupelle-avant du véhicule Twingo a été choisie pour la simplicité de sa définition CAO et la difficulté de son emboutissage. Par ailleurs, la variation de l'épaisseur sur l'embouti est suffisamment importante (de l'ordre de 20 %) pour que les comparaisons avec les résultats de calculs soient significatifs. Le flan utilisé est en acier qui a les caractéristiques suivantes : dimension 420x380 mm, épaisseur 1,97mm, module d'Young $E = 206000$ MPa, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, coefficient de frottement $\mu = 0,15$, loi d'érouissage de type Hollomon : $\bar{\sigma} = 623.33 \bar{\epsilon}^{0.1695}$ MPa, coefficients d'anisotropie $R_0=0,85$, $R_{45} = 1.07$ et $R_{90} = 0,99$, et un effort de serrage totale du serre-flan de 400 kN.

Critère de densité de travail plastique

Nous avons utilisé un maillage de 9 680 éléments DKT12 pour modéliser la coupelle d'amortisseur (figure 19).

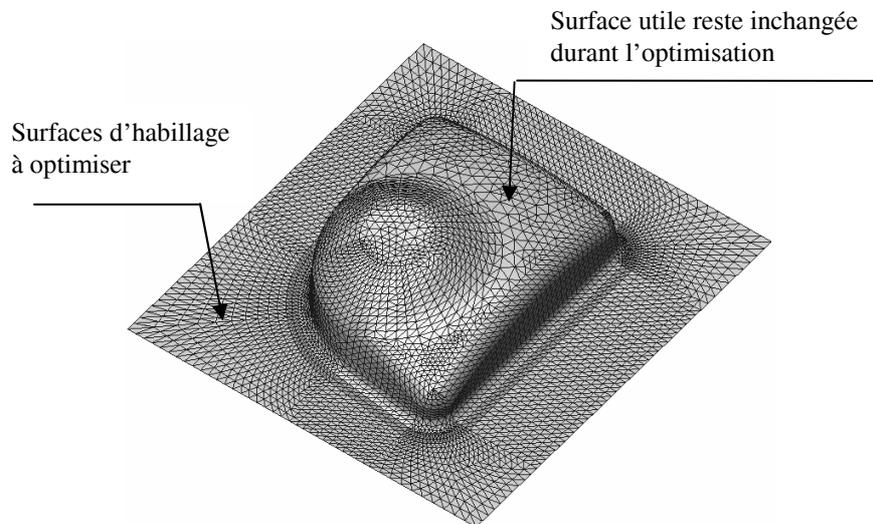


Figure 19. Coupelle d'amortisseur du véhicule Renault Twingo (9 680 éléments DKT12)

L'optimisation concerne uniquement la partie d'habillage (figure 19), la partie utile reste inchangée durant le processus d'optimisation. Pour des raisons pratiques

nous laissons une bande surfacique de quelques centimètres entre la partie utile et la partie sous serre-flan qui sera la limite inférieure pour l'optimisation (figure 20).

Sur la figure 20 la forme de l'embouti et celle du flan initial à la première itération de l'Approche Inverse sont présentées.

La figure 21 représente la variation de l'épaisseur en % sur l'embouti final avant optimisation. Du fait de la présence du frottement sous serre-flan et de la grande surface sous serre-flan, nous remarquons un fort amincissement (-30 %). Cette forte variation d'épaisseur peut être modifiée en utilisant la procédure d'optimisation évolutionnaire.

La figure 22 représente la distribution de la densité de travail plastique sur l'embouti final avant optimisation. Nous remarquons une forte concentration de densité de travail plastique aux congés de raccordement aux quatre coins de l'embouti.

Nous avons lancé le processus d'optimisation avec une tolérance de convergence de 10^{-4} sur la norme du résidu et sur la norme des déplacements. La convergence a été obtenue au bout de 79 itérations avec une limite de réduction de volume de -90 % du volume initial de la partie d'habillage.

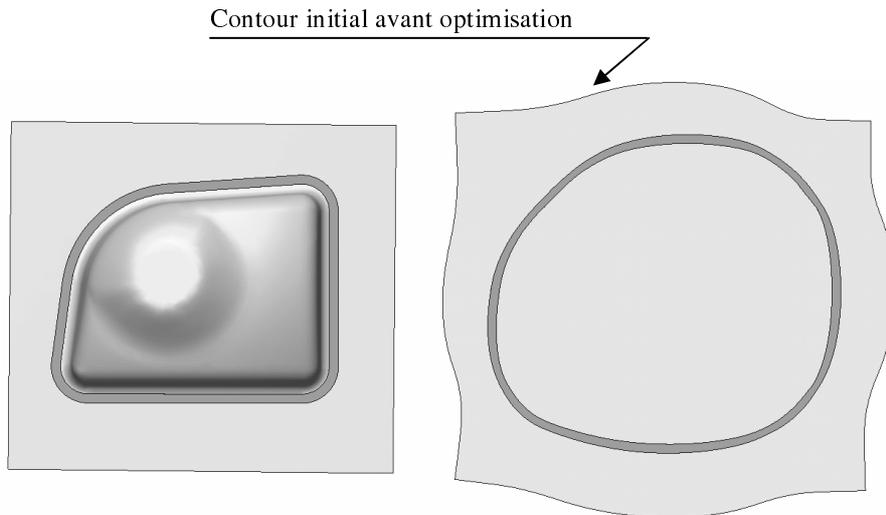


Figure 20. Embouti final et flan initial correspondant à la première itération

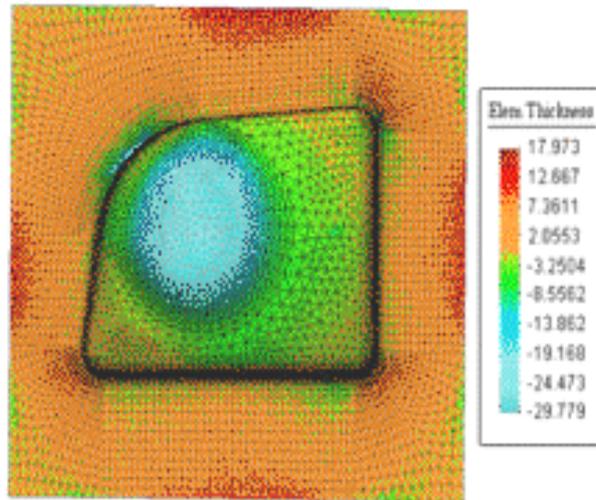


Figure 21. *Variation de l'épaisseur en pourcentage*

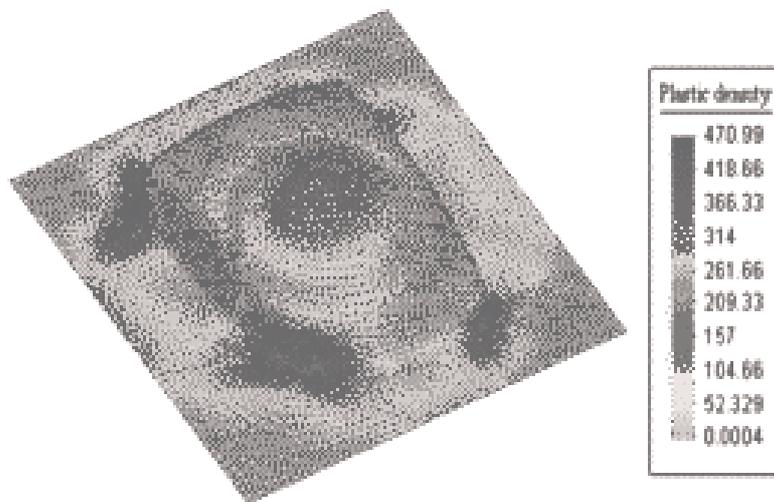
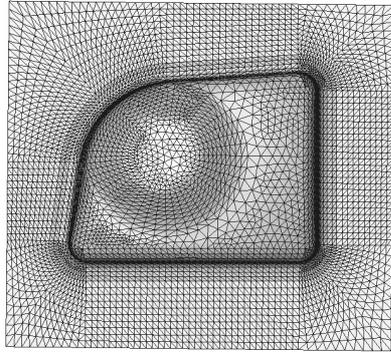
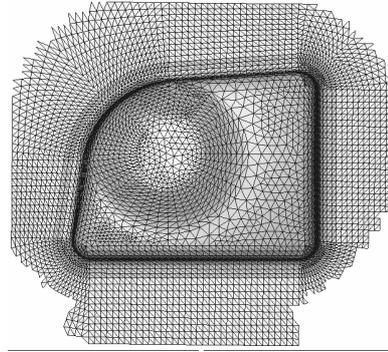


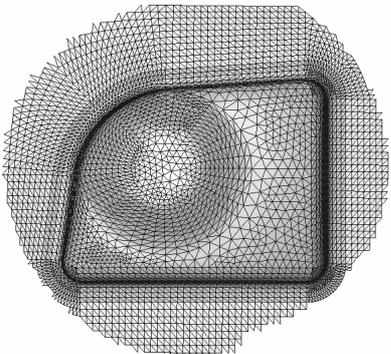
Figure 22. *Distribution de la densité de travail plastique*



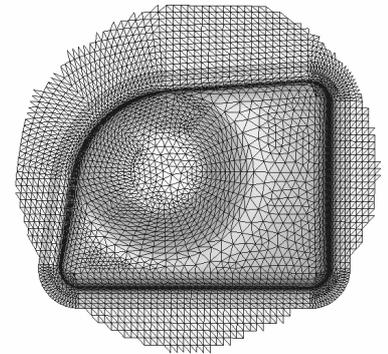
Iter = 0, $\Delta_{\text{aire}} = 0$, nelt = 9680



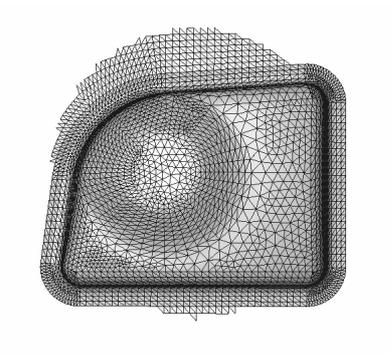
Iter = 1, $\Delta_{\text{aire}} = -21.89\%$, nelt = 9061



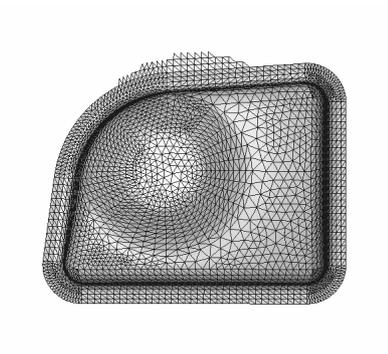
Iter = 3, $\Delta_{\text{aire}} = -39.12\%$, nelt = 8323



Iter = 13, $\Delta_{\text{aire}} = -60.29\%$, nelt = 7283



Iter = 32, $\Delta_{\text{aire}} = -80.05\%$, nelt = 6344



Iter = 69, $\Delta_{\text{aire}} = -88.71\%$, nelt = 5916

Figure 23. Différents contours de l'embouti obtenus durant le processus ESO

Sur la figure 23 nous présentons quelques configurations obtenues au cours du processus ESO. La configuration finale correspond à une réduction de volume de -89,51 % sur la surface sous serre-flan. Les figures 24 et 25 représentent respectivement les courbes d'évolution du volume en % et celui du maximum de la densité de travail plastique

La solution optimale obtenue par le processus ESO est ensuite lissée (figure 26) en utilisant une courbe de type B-Spline sur le logiciel GiD®.

Nous avons reconstruit la CAO en utilisant le contour lissé (figure 26), puis nous avons lancé une simulation d'emboutissage par l'A.I. pour cette configuration. Sur la figure 27, sont donnés l'embouti final et le flan initial correspondant après calcul par le logiciel REFORM®.

La figure 28 montre la variation de l'épaisseur sur l'embouti final avec le contour du flan optimisé, nous remarquons une variation d'épaisseur plus homogène que le cas initial et surtout avec un gain de 90 % de matière.

Sur la figure 29 est représentée la variation de la densité de travail plastique avec la configuration optimale. Nous pouvons remarquer une diminution du maximum de densité de travail plastique par rapport à celui obtenu avant optimisation.

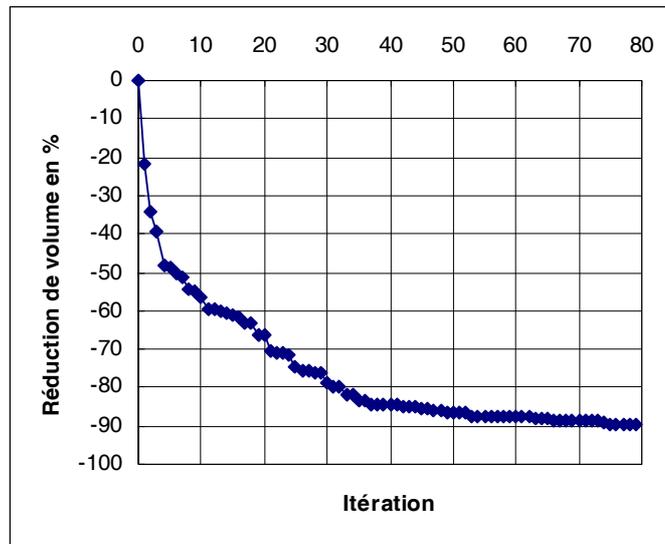


Figure 24. Réduction de volume en %

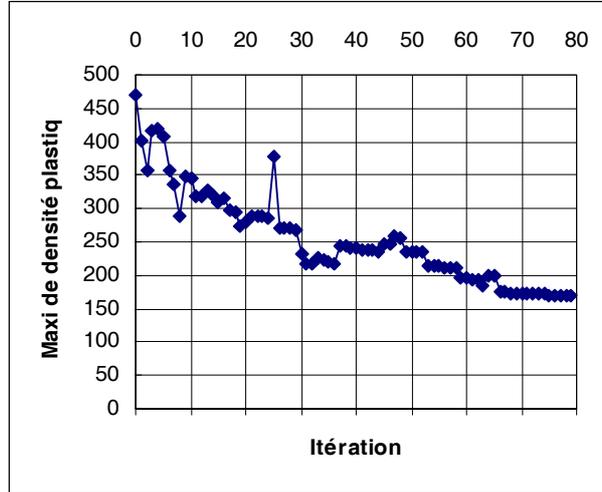


Figure 25. Evolution du maximum de la densité plastique

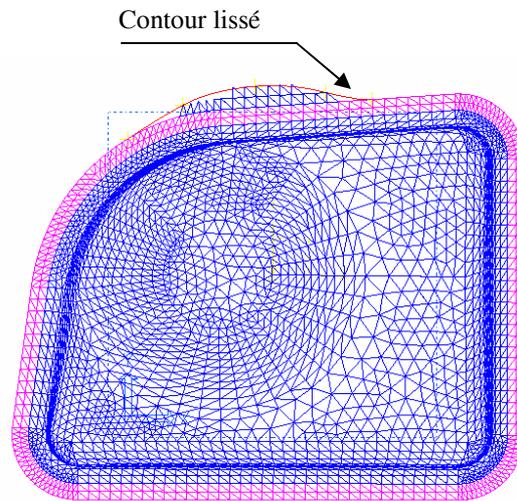


Figure 26. Lissage du contour optimal

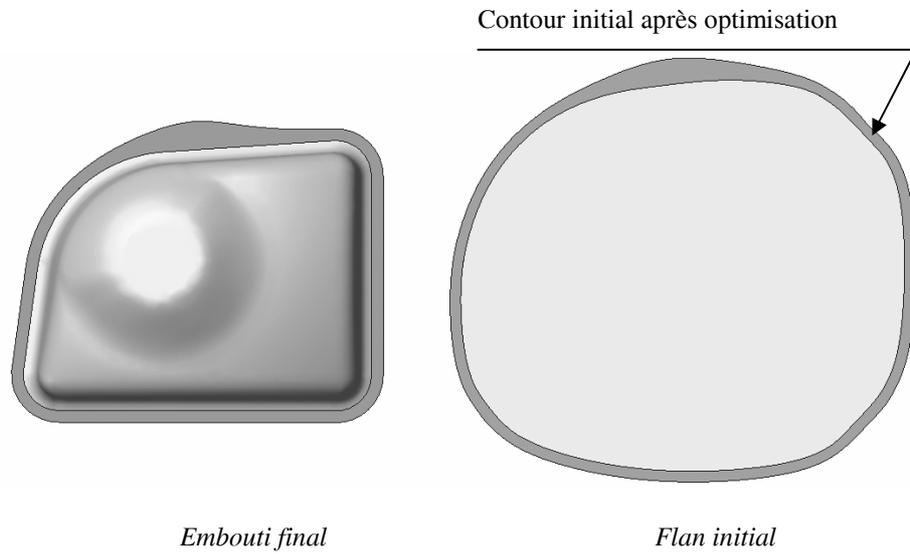


Figure 27. Contours de l'embouti et du flan initial après optimisation

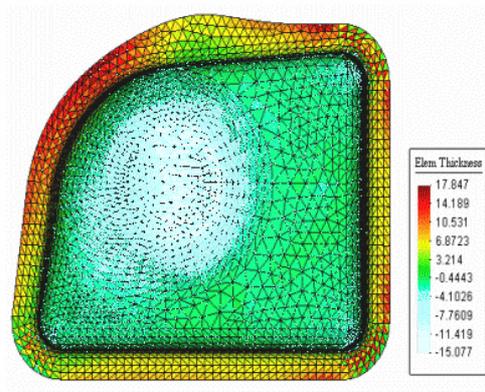


Figure 28. Variation de l'épaisseur en pourcentage

Le tableau 2 résume les principaux paramètres obtenus avant et après optimisation.

	Epaisseur $\Delta h/h$ %	Amincissement $\Delta h/h$ %	Maxi. de densité de travail plastique	Réduction de volume
Avant optimisation	+17,9	-29,9	470,9	0
Après optimisation	+17,8	-15,1	170,1	-89,5 %

Tableau 2. Bilan des résultats avant et après optimisation

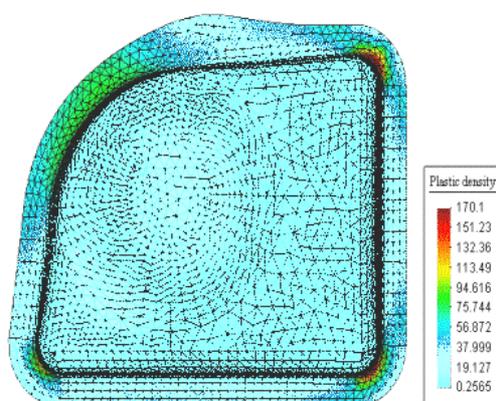


Figure 29. Distribution de la densité de travail plastique

5. Conclusion

L'optimisation de forme de surfaces additionnelles en emboutissage de tôles peut être effectuée de façon simple et efficace en utilisant la méthode d'optimisation évolutionnaire (ESO). Dans notre étude une limitation de volume de matière est imposée, la forme évolutive qui satisfait cette limitation est considérée comme optimale.

L'exemple traité dans ce travail montre l'efficacité de la méthode ESO dans l'optimisation des surfaces additionnelles de tôles embouties, par un simple enlèvement de la matière dans la zone où elle n'est pas nécessaire par rapport à un critère fixé par l'utilisateur (dans notre cas c'est le critère de densité de travail plastique).

La méthode ESO possède deux avantages très importants. Le premier est qu'elle ne nécessite pas de calcul de gradients, en effet on a besoin uniquement d'informations sur le maillage (coordonnées et connectivités) et des résultats de

post-traitement classique tels que : contraintes, densité de travail plastique, etc. Le deuxième avantage est que cette méthode est complètement indépendante de la simulation d'emboutissage (il n'y a aucune interaction directe entre le solveur d'optimisation et le solveur d'emboutissage). D'où l'intérêt de coupler cette méthode avec des codes industriels de simulation d'emboutissage tels que PAMSTAMP ou RADIOSS.

6. Bibliographie

- Batoz J.L., Duroux P., Guo Y.Q., Detraux J.M., "An efficient algorithm to estimate the large strains in deep drawing", *NUMIFORM 89*, 1989, p. 383-388.
- Batoz J.L., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, vol. 3, Coques Ed. Hermès, Paris 1992.
- Batoz J.L., Guo Y.Q., "Analysis and design of sheet forming parts using a simplified inverse approach", *COMPLAS V*, Barcelona, Spain, 1997, p. 178-185.
- Batoz J.L., Guo Y.Q., Mercier F., "The inverse approach with simple triangular shell elements for large strain predictions of sheet metal forming parts", *Engineering Computations*, vol. 15, 1998, p. 864-892.
- Bendsøe MP, Kikuchi N., "Generating optimal topologies in structural design using a homogenisation method", *Comput Meth Appl Mech Engng*, vol.71, 1998, p. 197-224.
- Ben-Elechi S., Analyse et conception rapides de paramètres du procédé d'emboutissage pour le contrôle du retour élastique, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, Déc. 2004.
- Gelin J.C., Picart P., "4th Int. Conf. Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming processes", *NUMISHEET'99*, Besançon, France, 1999.
- Gerdeen J.C., Chen P., "Geometric mapping method of computer modeling of sheet metal forming", *NUMIFORM 89*, 1989, p. 437-444.
- Ghouati O., Joannic D., Gelin J.C., "Optimisation of process parameters for the control of springback in deep drawing", *NUMIFORM'98*, Balkema, 1998.
- Guo Y.Q., Batoz J.L., Detroux J.M., Duroux P., "Fine element procedures for strain estimation of sheet metal forming parts", *IJNME*, vol. 39, 1990, p. 1385-1401.
- Ken-Ichiro M., "Simulation of material processing: theory, methods and applications", *Numiform'2001, 7th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, Toyohashi, Japan 2001.
- Liu S.D., Assempoor A., "Development of FAST 3D. A design-oriented one step FEM in sheet metal forming", *COMPLAS IV*, Part II, 1995, 1515-1526.
- Makinouchi A., Nakamachi E., Onate E., Wagoner R.H., "2nd Int. Conf. on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming processes - Verification of Simulation with Experiment", *NUMISHEET'93*, 1993.

- Naceur H., Optimisation de forme de structures minces en presence de non linéarités géométriques et matérielles, Thèse de l'Université de Technologie de Compiègne, 1998.
- Ohata T., Nakamura Y., Katayama T., Nakamachi E., NAKANO K., "Development of optimum process design system by numerical simulation", *Journal of Materials Process. Technol.*, 60, 1996, p. 543-548.
- Pourboghraat F., Smith L.M., Stoughton T.B., Yoon J.W., *Proceeding of the 6nd Int. Conf. on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming processes*, Numisheet 2005, Detroit, Mi., USA, 2005.
- Querin O.M., Young V., Steven G.P., Xie Y.M., "Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation", *Comput Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 189, 2000, p. 559-573.
- Sklad M.P., Yungblud B.A., "Analysis of multi-operation sheet forming processes", *NUMIFORM 92*, 1992, p. 543-547.
- Xie YM, Steven GP., "A simple evolutionary procedure for structural optimisation", *Comput. Struct.*, vol. 49, 1993, p. 885-896.
- Xie YM, Steven GP., "Evolutionary structural optimisation for dynamic problems", *Comput. Struct.*, vol. 58, 1996, p. 1067-1073.
- Xie YM, Steven GP., *Evolutionary Structural Optimisation*. Berlin, Germany: Edition Springer Verlag, 1997.
- Yang R.J., Chuang CH., "Optimal topology design using linear programming", *Comput Struct.*, vol. 52, 1994, p. 265-275.

