
Un estimateur d'erreur en relation de comportement pour les problèmes d'impact

François Louf — Laurent Gallimard — Jean-Pierre Pelle

*Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6
61, avenue du Président Wilson
F-94230 Cachan
louf@lmt.ens-cachan.fr*

RÉSUMÉ. Cet article présente un estimateur d'erreur en vue de contrôler la qualité des simulations éléments finis pour les problèmes d'impact. Nous nous intéressons à un problème de contact avec frottement de Coulomb en élastodynamique sous l'hypothèse des petites déformations. La mesure d'erreur proposée est une mesure d'erreur en relation de comportement basée sur une extension de l'erreur de Drucker développée pour les calculs de dynamique rapide, dans laquelle les relations de contact-frottement sont introduites au moyen d'un bipotentiel. Nous présentons dans cet article le principe de construction de cette mesure d'erreur ainsi que sa mise en œuvre sur des exemples simples.

ABSTRACT. In this paper we present an error estimator to control the quality of finite elements impact simulations under small strain assumption. The error measure proposed is based on an extension of the Drucker error developed for transient dynamics problems. The contact with Coulomb friction is modeled using a bipotential. The manner of building the error measure and some examples are presented.

MOTS-CLÉS : impact, frottement, dynamique, estimateur d'erreur, éléments finis.

KEYWORDS: impact, friction, dynamics, error estimator, finite elements.

1. Introduction

La simulation numérique des problèmes de contact unilatéral avec frottement en dynamique rapide utilise, le plus souvent, une discrétisation en espace de type éléments finis, une discrétisation temporelle associée à un schéma d'intégration et des algorithmes itératifs pour traiter les non-linéarités dues au contact. Pour l'utilisateur, il importe de pouvoir quantifier les erreurs inhérentes à l'utilisation de l'ensemble de ces approximations numériques. L'objet de ce travail est de proposer et de mettre en œuvre un estimateur d'erreur en relation de comportement pour ce type de simulations. Pour les problèmes linéaires, plusieurs démarches permettent de construire des estimateurs d'erreur de discrétisation :

- la méthode de l'erreur en relation de comportement associée à des techniques adaptées de construction de champs admissibles (Ladevèze, 1975), (Ladevèze *et al.*, 1991) ;
- l'utilisation des résidus d'équilibre (Babuska *et al.*, 1978) ;
- l'utilisation de techniques de lissage (Boroomand *et al.*, 1998), (Zienkiewicz *et al.*, 1987).

Une synthèse de ces différentes méthodes peut être trouvée dans (Ainsworth *et al.*, 1997) ou dans (Ladevèze *et al.*, 2001). Pour les problèmes non linéaires et, notamment pour les non-linéarités de type contact, très peu de travaux existent. Généralement les auteurs ont cherché à étendre les estimateurs proposés dans le cas de la statique linéaire aux problèmes de contact avec ou sans frottement, en y ajoutant un terme spécifiquement adapté au contrôle du contact. Par exemple dans (Wriggers *et al.*, 1998) un estimateur, prenant en compte le frottement et basé sur les résidus d'équilibre, est proposé. Ces travaux ont été étendus au cas de grandes déformations élastiques dans (Wriggers *et al.*, 2003). Toutefois ces estimateurs mesurent une erreur entre la solution exacte d'un problème de référence où la loi de contact est déjà pénalisée, et une solution approchée de ce problème.

Dans (Wriggers *et al.*, 1997), ou plus récemment dans (Rieger *et al.*, 2001), les auteurs montrent qu'il est également possible d'étendre les estimateurs basés sur le lissage des contraintes aux problèmes de contact sans frottement. La procédure de lissage des contraintes nécessite toutefois certaines précautions particulières au voisinage de l'interface de contact.

Enfin, le concept d'erreur en relation de comportement a également permis de construire un premier estimateur d'erreur dans le cas sans frottement (Coorevits *et al.*, 1999), (Coorevits *et al.*, 2000), puis dans le cas avec frottement (Louf *et al.*, 2001).

En dynamique, le concept d'estimateur d'erreur basé sur les résidus d'équilibre a également permis de bâtir des indicateurs d'erreur pour le problème de référence en dynamique linéaire en utilisant le concept d'état adjoint introduit dans (Eriksson *et al.*, 1996). Ces techniques ont été initialement proposées pour des calculs réalisés à l'aide de méthodes types Galerkin discontinues, et n'ont, à notre connaissance, pas été

étendues depuis à des schémas d'intégration classiques. Ces techniques ont également été mises en œuvre dans (Aubry *et al.*, 1999). Par ailleurs, des techniques de lissage en espace et d'interpolation en temps ont été mises en œuvre dans (Wiberg *et al.*, 1994) pour créer une extension des estimateurs basés sur les résidus d'équilibre.

Enfin, un estimateur d'erreur en relation de comportement a également été proposé pour les problèmes de dynamique rapide en élasticité linéaire (Combe *et al.*, 1999), puis en présence d'un comportement matériau fortement non linéaire et de grandes transformations (Pelle *et al.*, 2002).

Dans cet article nous présentons une extension de l'estimateur d'erreur en relation de comportement développé pour les problèmes de dynamique rapide en élasticité linéaire (Combe *et al.*, 1999) aux problèmes de contact-frottement. Cet estimateur d'erreur permet de prendre en compte toutes les sources d'erreur : celles dues aux discrétisations spatiales et temporelles ainsi que celles dues aux algorithmes itératifs utilisés pour la gestion des non-linéarités de contact-frottement. Nous nous limitons ici au cas d'un comportement élastique, sous l'hypothèse de petites perturbations.

Nous présentons, tout d'abord, une modélisation du contact avec frottement de Coulomb en dynamique. Par rapport à la modélisation adoptée dans (Louf *et al.*, 2001), le concept mécanique d'interface de contact est conservé, mais l'inconnue cinématique associée possède désormais la dimension d'une vitesse. L'usage d'un bi-potential introduit dans (Saxce, 1992) nous permet de formuler la relation de comportement du contact avec frottement sous une forme bien adaptée à la construction d'un estimateur d'erreur en relation de comportement.

Après avoir rappelé le problème de référence, nous définissons les champs admissibles et la mesure d'erreur en relation de comportement. Nous détaillons ensuite la stratégie utilisée pour obtenir une solution approchée du problème de référence et nous proposons les constructions de champs admissibles qui y sont associées.

Le premier exemple présenté est un problème d'impact unidimensionnel. Sur ce problème dont la solution exacte est connue, nous pouvons étudier le comportement de l'estimateur en comparant l'erreur estimée à l'écart entre la solution exacte et la solution approchée, écart que nous appelons par la suite erreur de référence.

La mise en œuvre est ensuite présentée dans le cas d'un problème bidimensionnel où nous étudions les influences des discrétisations spatiales puis temporelles sur la qualité de la solution approchée.

2. Modélisation du contact en dynamique

2.1. Notations

On considère ici le problème d'un solide élastique Ω impactant un socle rigide plan S_0 de normale extérieure \mathbf{n}_s . A chaque instant t de l'intervalle d'étude $[0, T]$ où il y a physiquement contact entre le solide élastique Ω et le socle rigide S_0 , on peut

définir une interface de contact Γ^c (figure 1). On suppose que le contact peut se faire avec du frottement sec (loi de Coulomb). Nous supposons que le contact ne peut pas avoir lieu sur les zones à déplacements ou efforts non nuls imposés.

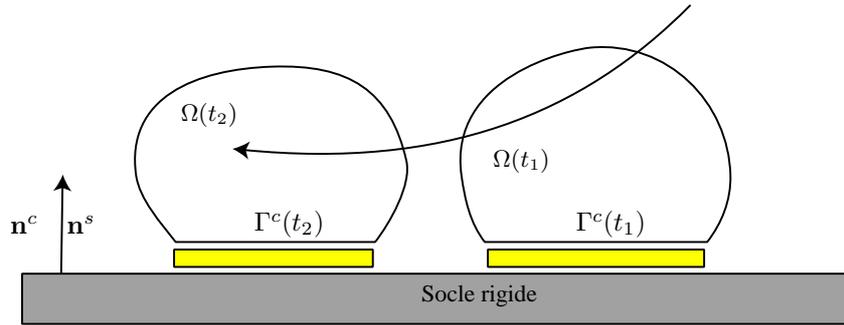


Figure 1. Notations

2.2. Modélisation du contact

Afin de faciliter la définition d'une erreur en relation de comportement, il est commode de considérer l'interface Γ^c comme une entité mécanique à part entière. Orientons Γ^c par le choix du vecteur normal extérieur au socle rigide \mathbf{n}^s , c'est-à-dire $\mathbf{n}^c = \mathbf{n}^s$ (figure 1), et introduisons sur l'interface Γ^c les grandeurs mécaniques \mathbf{w}^c et \mathbf{F}^c , où :

- \mathbf{F}^c est une densité surfacique d'efforts de contact ;
- \mathbf{w}^c est une vitesse.

Pour tout vecteur \mathbf{v} , introduisons sa composante normale :

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^c \text{ et } \mathbf{v}_t = \mathbf{v} - v_n \mathbf{n}^c \quad [1]$$

La relation de comportement du contact avec frottement peut alors être formulée en force-vitesse de la façon suivante :

$$\begin{aligned} w_n^c \geq 0 \quad F_n^c \geq 0 \quad F_n^c w_n^c = 0 \quad [2] \\ \|\mathbf{F}_t^c\| \leq \mu F_n^c \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{F}_t^c\| < \mu F_n^c \Rightarrow \mathbf{w}_t^c = 0 \\ \|\mathbf{F}_t^c\| = \mu F_n^c \Rightarrow \exists \lambda > 0 \quad \text{tel que} \quad \mathbf{w}_t^c = -\lambda \mathbf{F}_t^c \end{aligned}$$

où μ désigne le coefficient de frottement. Utilisons la démarche proposée dans (Saxe, 1992) et introduisons le bipotentiel :

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{F}) = \chi_B(\mathbf{v}) + \chi_{C(\mu)}(\mathbf{F}) + \mu F_n \|\mathbf{v}_t\|$$

où χ_B et $\chi_{C(\mu)}$ sont les fonctions indicatrices des convexes :

$$B = \{\mathbf{v} / v_n \leq 0\}$$

$$C(\mu) = \{\mathbf{F} / F_n \geq 0 \text{ et } \|\mathbf{F}_t\| \leq \mu F_n\}$$

Ces fonctions indicatrices $\chi_B(\mathbf{v})$ et $\chi_{C(\mu)}$ sont respectivement nulles si $\mathbf{v} \in B$ et $\mathbf{F} \in C(\mu)$, et infinies sinon. La relation de comportement [2] est alors équivalente à la condition :

$$b(-\mathbf{w}^c, \mathbf{F}^c) + \mathbf{w}^c \cdot \mathbf{F}^c = 0$$

On a par ailleurs la propriété suivante :

$$b(-\mathbf{w}^c, \mathbf{F}^c) + \mathbf{w}^c \cdot \mathbf{F}^c \geq 0 \quad \forall (\mathbf{w}^c, \mathbf{F}^c)$$

3. Formulation du problème de référence

On considère quatre types d'interaction entre le solide Ω et son environnement (figure 2) :

- sur la partie $\partial_1\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$ du solide Ω , des déplacements \mathbf{u}_d sont imposés ;
- sur la partie $\partial_2\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$ du solide Ω , des efforts linéiques \mathbf{F}_d sont imposés ;
- sur la partie complémentaire à $\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$ du solide Ω , un contact avec le socle rigide S_0 , de normale extérieure \mathbf{n}_s , peut avoir lieu au cours de l'intervalle de temps considéré ;
- à l'intérieur du domaine Ω , des efforts volumiques \mathbf{f}_d connus sont imposés.

Les équations du problème de référence peuvent alors être séparées en trois groupes :

- les équations de liaison et les conditions initiales ;
- les équations d'équilibre ;
- les relations de comportement.

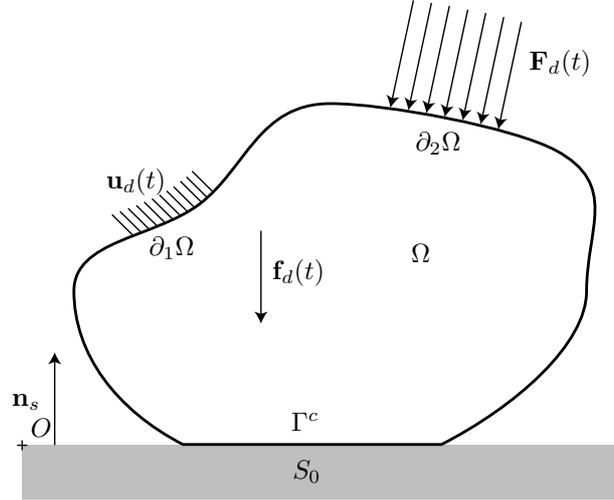


Figure 2. Type de problème étudié

3.1. Les équations de liaison et les conditions initiales

On définit tout d'abord la zone de contact effective Γ^c par :

$$\Gamma^c = \{M \in (\partial\Omega - \partial_1\Omega - \partial_2\Omega) / \mathbf{u}(M,t) \cdot \mathbf{n}_s = -\mathbf{OM}|_{t=0} \cdot \mathbf{n}_s\} \quad [3]$$

où O est un point du socle rigide (figure 2). Un champ de déplacement \mathbf{u}_d est imposé sur la partie $\partial_1\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$:

$$\mathbf{u}|_{\partial_1\Omega} = \mathbf{u}_d \quad \forall t \in [0, T] \quad [4]$$

Sur la zone de contact identifiée à partir du champ de déplacement \mathbf{u} , conformément à ce qui a été dit à la section précédente, l'inconnue d'interface \mathbf{w}^c est reliée au champ de vitesse par :

$$\dot{\mathbf{u}}|_{\Gamma^c} = \mathbf{w}^c \quad \forall t \in [0, T] \quad [5]$$

Le champ de déplacement \mathbf{u} doit également vérifier les conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \forall M \in \Omega \quad [6]$$

$$\dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \forall M \in \Omega \quad [7]$$

REMARQUE. — Bien entendu, les conditions initiales [6], [7] et les conditions aux limites [4] doivent être cohérentes. De même, on suppose qu'à $t = 0$, le solide ne pénètre pas dans le socle rigide.

3.2. Les équations d'équilibre

Elles lient le champ de contrainte σ , les efforts de contact \mathbf{F}^c et la quantité d'accélération $\mathbf{\Gamma}$ qui est une nouvelle inconnue introduite afin de faciliter la définition d'un estimateur d'erreur (Combe *et al.*, 1999) :

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(\mathbf{u}^*)] d\Omega + \int_{\Gamma^c} \mathbf{F}^c \mathbf{u}^* ds + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_d \mathbf{u}^* ds = \int_{\Omega} \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}^* d\Omega \quad [8] \\
 \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathbf{U}_0 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{U} \mid \mathbf{u}|_{\partial_1 \Omega} = \mathbf{0} \right\}
 \end{aligned}$$

où \mathbf{U} est l'espace des champs de déplacement à énergie finie dans lequel la solution est cherchée.

3.3. Les relations de comportement

Pour le problème considéré, on distingue trois relations de comportement :

– la relation de comportement matériau est de type élastique :

$$\sigma = \mathbf{K} \varepsilon(\mathbf{u}) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall M \in \Omega \quad [9]$$

– la relation de comportement dynamique :

$$\mathbf{\Gamma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall M \in \Omega \quad [10]$$

– les relations de comportement du contact avec frottement de Coulomb écrites sur la zone de contact effective Γ^c :

$$b(-\mathbf{w}^c, \mathbf{F}^c) + \mathbf{w}^c \cdot \mathbf{F}^c = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall M \in \Gamma^c \quad [11]$$

REMARQUE. — L'utilisation de $\mathbf{\Gamma} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$ en tant que relation de comportement permet de considérer la quantité d'accélération $\mathbf{\Gamma}$ comme une grandeur indépendante du champ de déplacement \mathbf{u} , le lien étant établi par la relation de comportement [10]. L'intérêt de cette approche est qu'elle permet de séparer la grandeur cinématique \mathbf{u} qui vérifie les liaisons cinématiques et les conditions initiales des grandeurs dynamiques σ et $\mathbf{\Gamma}$ qui vérifient l'équilibre. Ce type d'approche a notamment également été utilisé dans (Bui, 1993).

4. Erreur en relation de comportement

4.1. Champs admissibles

Le concept d'erreur en relation de comportement consiste à considérer comme solution approchée du problème de référence une solution admissible :

$$s_{Ad} = (\mathbf{u}_{CA}, \mathbf{w}_{CA}^c, \mathbf{\Gamma}_{DA}, \sigma_{DA}, \mathbf{F}_{DA}^c)$$

où la zone de contact admissible est définie à partir du champ de déplacement cinématiquement admissible \mathbf{u}_{CA} de façon identique à [3] :

$$\Gamma_{CA}^c = \{M \in (\partial\Omega - \partial_1\Omega - \partial_2\Omega) / \mathbf{u}_{CA}(M, t) \cdot \mathbf{n}_s = -\mathbf{OM}|_{t=0} \cdot \mathbf{n}_s\}$$

Les champs $s_{Ad} = (\mathbf{u}_{CA}, \mathbf{w}_{CA}^c, \mathbf{\Gamma}_{DA}, \sigma_{DA}, \mathbf{F}_{DA}^c)$ sont dits admissibles si :

- \mathbf{u}_{CA} et \mathbf{w}_{CA}^c vérifient les équations de liaison [4] à [7] ;
- $(\mathbf{\Gamma}_{DA}, \sigma_{DA}, \mathbf{F}_{DA}^c)$ vérifient les équations d'équilibre [8].

REMARQUE. — Les grandeurs indicées \bullet_{CA} désignent des champs cinématiquement admissibles, *i.e.* qui vérifient les équations de liaison. Les grandeurs indicées \bullet_{DA} désignent des champs dynamiquement admissibles, *i.e.* qui vérifient les équations d'équilibre.

4.2. Construction de l'estimateur

On introduit tout d'abord des quantités additionnelles, le champ de contrainte cinématiquement admissible et le champ de vitesse dynamiquement admissible, images des quantités admissibles *via* les relations de comportement :

$$\sigma_{CA} = \mathbf{K}\varepsilon(\mathbf{u}_{CA}) \quad [12]$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{DA} \text{ tel que } \ddot{\mathbf{u}}_{DA} = \frac{1}{\rho}\mathbf{\Gamma}_{DA} \text{ et } \dot{\mathbf{u}}_{DA}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad [13]$$

On pose alors, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \eta_{RdC}(t, s_{Ad}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{u}}_{DA} - \dot{\mathbf{u}}_{CA})^2 d\Omega + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr[(\sigma_{DA} - \sigma_{CA})\mathbf{K}^{-1}(\sigma_{DA} - \sigma_{CA})] d\Omega + \\ & 2 \int_0^t \int_{\Gamma_{CA}^c} [b(-\mathbf{w}_{CA}^c, \mathbf{F}_{DA}^c) + \mathbf{w}_{CA}^c \cdot \mathbf{F}_{DA}^c] dsd\tau \end{aligned} \quad [14]$$

Le coefficient 2 devant le dernier terme permet, en statique, et sans frottement, de retrouver le lien entre l'erreur en relation de comportement et les erreurs en solution comme indiqué dans (Coorevits *et al.*, 1999). Une mesure de l'erreur sur l'intervalle d'étude $[0, T]$ peut enfin être définie par :

$$e_{RdC}(s_{Ad}) = \left[\sup_{\tau \in [0, T]} \eta_{RdC}(\tau, s_{Ad}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad [15]$$

ou par :

$$e_{RdC}(s_{Ad}) = \left[\frac{1}{T} \int_0^T \eta_{RdC}(\tau, s_{Ad}) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \quad [16]$$

REMARQUE. — Comme en statique, les champs admissibles définis en section 4.1 peuvent conduire à une erreur infinie du fait de la présence de fonctions indicatrices dans celle-ci. En pratique, on cherche donc à construire des champs satisfaisant, outre les conditions d'admissibilité définies en section 4.1, deux conditions permettant d'annuler les fonctions indicatrices contenues dans le bipotentiel :

$$-\mathbf{w}_{CA}^c \in B \quad [17]$$

$$\mathbf{F}_{DA}^c \in C(\mu) \quad [18]$$

Ces champs seront dans la suite appelés « strictement admissibles ».

Propriété. L'erreur en relation de comportement satisfait la propriété suivante :

$$\{e_{RdC}(s_{Ad}) = 0\} \iff s_{Ad} \text{ est solution du problème de référence.} \quad [19]$$

4.3. Contributions élémentaires

On définit également les contributions élémentaires à l'erreur globale par :

$$e_{RdC,E}(s_{Ad}) = \left[\frac{1}{T} \int_0^T \eta_{RdC,E}(\tau, s_{Ad}) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \quad [20]$$

avec, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \eta_{RdC,E}(t, s_{Ad}) = & \frac{1}{2} \int_E \rho(\dot{\mathbf{u}}_{DA} - \dot{\mathbf{u}}_{CA})^2 dE + \\ & \frac{1}{2} \int_E \text{Tr}[(\sigma_{DA} - \sigma_{CA}) \mathbf{K}^{-1}(\sigma_{DA} - \sigma_{CA})] dE + \\ & 2 \int_0^t \int_{\Gamma_{CA}^c \cap \partial E} [b(-\mathbf{w}_{CA}^c, \mathbf{F}_{DA}^c) + \mathbf{w}_{CA}^c \cdot \mathbf{F}_{DA}^c] ds d\tau \end{aligned} \quad [21]$$

Nous présentons des cartes de contributions élémentaires dans la figure 9.

4.4. Erreur relative

Afin de pouvoir comparer les erreurs obtenues pour des problèmes différents, il est utile de définir une erreur relative notée $\varepsilon(s_{Ad})$:

$$\varepsilon(s_{Ad}) = \frac{e_{RdC}(s_{Ad})}{D(s_{Ad})} \quad [22]$$

avec

$$D(s_{Ad}) = \left[\sup_{t \in [0, T]} d(t, s_{Ad}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad [23]$$

et

$$\begin{aligned} d(t, s_{Ad}) &= \int_{\Omega} \rho(\dot{\mathbf{u}}_{DA} + \dot{\mathbf{u}}_{CA})^2 d\Omega \quad [24] \\ &+ \int_{\Omega} Tr[(\sigma_{DA} + \sigma_{CA})\mathbf{K}^{-1}(\sigma_{DA} + \sigma_{CA})] d\Omega \\ &+ 2 \int_0^t \int_{\Gamma_{CA}^c} [b(-\mathbf{w}_{CA}^c, \mathbf{F}_{DA}^c) + \mathbf{w}_{CA}^c \cdot \mathbf{F}_{DA}^c] ds d\tau \end{aligned}$$

5. Stratégie de résolution utilisée

Le calcul d'une solution approchée du problème de référence, passe par la définition d'un modèle numérique. L'obtention de ce modèle se fait en trois étapes principales :

- une discrétisation spatiale de type éléments finis ;
- une discrétisation temporelle associée à un schéma d'intégration en temps ;
- un traitement adapté des conditions de contact avec ou sans frottement.

5.1. Discrétisation spatiale

On définit tout d'abord un maillage Ω_h de la structure Ω . Dans le cas unidimensionnel, on utilise N_s segments à deux nœuds répartis uniformément sur la barre. Dans le cas bidimensionnel, la structure Ω est maillée à l'aide d'éléments triangulaires à trois nœuds. On cherche le champ de déplacement de type éléments finis défini par :

$$\mathbf{u}_h(M, t) = \mathbf{N}_h(M)[u(t)] \quad [25]$$

où $[u(t)]$ est le vecteur des inconnues nodales et où \mathbf{N}_h est la matrice des fonctions de forme éléments finis.

Soit \mathbf{M} la matrice de masse définie par :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_h} \rho \mathbf{N}_h^T \mathbf{N}_h d\Omega$$

Soit $[\sigma(t)]$ le vecteur des efforts intérieurs dont la i^e composante $\sigma_i(t)$ est définie par :

$$\sigma_i(t) = - \int_{\Omega_h} Tr[\sigma \varepsilon(\phi_i)] d\Omega$$

où ϕ_i est la i^e fonction de forme.

Soit $[F(t)]$ le vecteur des efforts extérieurs généralisés défini par :

$$[F(t)] = \int_{\Omega_h} \mathbf{N}_h^T \mathbf{f}_d(t) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega_h} \mathbf{N}_h^T \mathbf{F}_d(t) ds$$

En affaiblissant les conditions d'équilibre [8], en prenant en compte la relation de comportement [10], et en l'absence de contact, l'équation d'équilibre éléments finis peut alors s'écrire :

$$\mathbf{M}[\ddot{u}(t)] + [\sigma(t)] = [F(t)] \quad \forall t \in [0, T] \quad [26]$$

Les conditions initiales s'écrivent enfin :

$$[u(0)] = [u_0] \text{ et } [\dot{u}(0)] = [v_0] \quad [27]$$

Nous verrons par la suite que, finalement, la présence de conditions de contact revient à des résolutions successives de problèmes du type de [26].

5.2. Discrétisation temporelle

La résolution numérique de [26] et [27] est réalisée à l'aide d'un schéma d'intégration en temps. Pour cela, l'intervalle d'étude $[0, T]$ est découpé en N_t pas de temps. Pour simplifier, nous supposons que le pas de temps est constant :

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad \forall n \in \{0, \dots, N_t - 1\}$$

mais la méthode peut être étendue à des pas non constants.

Les trois suites $([u_n], [v_n], [a_n])$ représentent les approximations des valeurs aux instants t_n du déplacement, de la vitesse, et de l'accélération.

Parmi les nombreux schémas d'intégration en temps, nous avons choisi le schéma des différences centrées. Ce schéma est le plus utilisé dans les codes de calcul de dynamique rapide tels que LS-DYNA, RADIOSS, ABAQUS EXPLICIT, EUROPLEXUS.

Ce schéma du second ordre fait intervenir les valeurs aux piquets de temps et aux demi-pas de temps :

$$t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2} \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N_t - 1\}$$

Le vecteur déplacement $[u_n]$, le vecteur vitesse $[v_{n+\frac{1}{2}}]$, et le vecteur accélération $[a_n]$ sont définis par les relations :

$$[u_{n+1}] = [u_n] + \Delta t [v_{n+\frac{1}{2}}] \quad [28]$$

$$[v_{n+\frac{1}{2}}] = [v_{n-\frac{1}{2}}] + \Delta t [a_n] \quad [29]$$

et par une équation d'équilibre éléments finis du type :

$$\mathbf{M}[a_{n+1}] + [\sigma_{n+1}] = [F_{n+1}] \quad [30]$$

Les trois suites sont initialisées par le déplacement initial $[u_0]$, la vitesse $[v_{\frac{1}{2}}]$ donnée par :

$$[v_{\frac{1}{2}}] = [v_0] + \frac{\Delta t}{2} [a_0] \quad [31]$$

et l'accélération initiale $[a_0]$ donnée par la résolution de :

$$\mathbf{M}[a_0] + [\sigma_0] = [F_0] \quad [32]$$

REMARQUE. — Ce schéma est conditionnellement stable. En 1D avec une discrétisation spatiale régulière à N_s éléments, la condition de stabilité sur le pas de temps s'écrit simplement :

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{L}{N_s c} \quad [33]$$

où c est la célérité des ondes dans le milieu. Pour un problème à deux dimensions, et pour un comportement linéaire, la condition de stabilité de Courant (Belytschko *et al.*, 1986) est donnée plus généralement par :

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{2}{\omega} \quad [34]$$

où ω est la plus grande des pulsations propres ω_n de la structure discrétisée. En présence de contact, ces conditions peuvent être modifiées selon le choix de l'algorithme retenu. Par exemple, dans le cas d'une loi de contact pénalisée, augmenter la rigidité d'interface afin de limiter les interpénétrations conduira à une réduction du pas de temps critique. Par contre, l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange ne conduit pas à une baisse du pas de temps critique. Un résumé de ces résultats peut être trouvé dans (Raous *et al.*, 1996).

Le schéma d'intégration choisi ici utilise une matrice de masse diagonale \mathbf{M}^D au lieu de \mathbf{M} . Les résolutions répétées de [30] sont ainsi évitées. Pour les types d'éléments utilisés ici, la matrice de masse diagonale \mathbf{M}^D est définie de la façon suivante :

$$m_{i,i}^D = \sum_{j=1}^{N_n} m_{i,j} \quad \text{et} \quad m_{i,j}^D = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad [35]$$

où N_n est le nombre de degrés de liberté du problème éléments finis.

5.3. Traitement du contact

5.3.1. Cas à un seul degré de liberté sur Γ^c (cas 1D)

Le contact est traité par un multiplicateur de Lagrange portant sur le nœud impactant le socle rigide. La condition étant unilatérale, on se ramène à la résolution d'un problème linéaire en testant le statut du nœud considéré. A chaque piquet de temps t_n , on calcule la solution du problème de dynamique sans condition de contact [30]. On connaît alors un déplacement prédicteur \tilde{u}_{n+1} donnant l'état du nœud impactant :

- si \tilde{u}_{n+1} est tel que le nœud impactant n'est pas en contact au piquet t_{n+1} , on passe au piquet de temps suivant, avec $u_{n+1} = \tilde{u}_{n+1}$;
- si \tilde{u}_{n+1} est tel que le nœud impactant pénètre dans le socle rigide, on calcule une nouvelle solution du problème [30], en imposant que le déplacement du nœud impactant soit égal au jeu initial j . En pratique cette condition est imposée à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange.

5.3.2. Cas à plusieurs degrés de liberté sur Γ^c (cas 2D)

Pour traiter le contact, l'esprit de l'algorithme proposé à la section précédente est conservé. Toutefois, la zone de contact potentielle n'étant plus réduite à un seul point, il est nécessaire d'itérer à chaque pas de temps pour identifier la zone de contact effective.

La prise en compte du frottement introduit des itérations supplémentaires et se fait à l'aide de l'algorithme du point fixe proposé par (Raous *et al.*, 1988) et déjà utilisé dans (Louf *et al.*, 2001) pour le cas statique. Ainsi, à chaque piquet de temps, on effectue un certain nombre d'itérations, correspondant chacune à un problème de contact avec frottement de type Tresca. A chaque piquet de temps t_n , on calcule la solution du problème de dynamique sans condition de contact du type [30]. On connaît alors un déplacement prédicteur \tilde{u}_{n+1} donnant l'état de chaque nœud potentiellement impactant (tout ou partie du contour $\partial\Omega - \partial_1\Omega - \partial_2\Omega$) :

- si \tilde{u}_{n+1} est tel qu'aucun nœud n'impacte le socle au piquet t_{n+1} , on passe au piquet de temps suivant, avec $u_{n+1} = \tilde{u}_{n+1}$;
- si \tilde{u}_{n+1} est tel que certains nœuds potentiellement impactant pénètrent dans le socle rigide, on calcule une nouvelle solution du problème [30] *via* l'algorithme itératif précisé ci-après :

- on impose des efforts tangentiels compatibles avec les efforts normaux sur la zone de contact identifiée et on impose une condition de non-pénétration sur les nœuds ayant pénétré le socle dans la configuration définie par \tilde{u}_{n+1} , à l'aide de multiplicateurs de Lagrange ;

- les réactions normales au contact permettent de définir de nouveaux efforts tangentiels compatibles pour l'itération suivante, c'est-à-dire vérifiant l'inégalité :

$$\|F_t^c\| \leq \mu F_n^c$$

- les itérations sont stoppées lorsque les efforts tangentiels sont suffisamment peu modifiés.

REMARQUE. — A chaque pas de temps, à la première itération de l'algorithme traitant le contact avec frottement, les efforts normaux ne sont pas connus. Par conséquent, les efforts tangentiels sont obtenus en calculant les réactions dans des blocages tangentiels imposés sur les nœuds impactant.

6. Mise en œuvre de la mesure d'erreur

Le calcul éléments finis fournit, à chaque piquet de temps t_i :

- un champ de déplacement $\mathbf{u}_{h,i}$, un champ de vitesse $\mathbf{v}_{h,i-\frac{1}{2}}$, un champ d'accélération $\mathbf{a}_{h,i}$;
- une zone de contact Γ_h^c , un champ de vitesse au contact $\mathbf{w}_{h,i-\frac{1}{2}}^c$, un champ d'effort de contact $\mathbf{F}_{h,i}^c$;
- un champ de contrainte $\sigma_{h,i}$;

Ces champs issus de la simulation numérique ne sont pas strictement admissibles. En effet, à chaque piquet de temps, l'équilibre entre le champ de contrainte $\sigma_{h,i}$, l'accélération $\mathbf{a}_{h,i}$, les efforts de contact $\mathbf{F}_{h,i}^c$ et les efforts imposés n'est vérifié qu'au sens faible des éléments finis, et avec une matrice de masse diagonale. De plus, les efforts $\mathbf{F}_{h,i}^c$ et les vitesses $\mathbf{w}_{h,i-\frac{1}{2}}^c$ ne vérifient pas nécessairement :

$$\mathbf{F}_{h,i}^c \in C(\mu) \quad [36]$$

$$-\mathbf{w}_{h,i-\frac{1}{2}}^c \in B \quad [37]$$

Afin de mettre en œuvre l'estimateur d'erreur proposé en section 4.2, il est donc nécessaire de reconstruire, à partir de cette solution éléments finis, et en exploitant ses propriétés, un jeu de champs strictement admissible s_{Ad} . Cette construction se fait en trois étapes :

- construction de champs de déplacement et de vitesse cinématiquement admissibles et vérifiant [17] sur tout l'intervalle d'étude ;
- construction d'un triplet dynamiquement admissible $(\sigma_{DA,i}, \Gamma_{DA,i}, \mathbf{F}_{DA,i}^c)$ et vérifiant [18] à chaque piquet t_i de la discrétisation temporelle ;
- interpolation linéaire sur le temps de ces quantités dynamiquement admissibles.

6.1. Construction de champs cinématiquement admissibles

6.1.1. Rappel sur le cas des problèmes sans contact

Dans (Combe *et al.*, 1999), une construction des champs cinématiquement admissibles $\tilde{\mathbf{u}}_{CA}$ et $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{CA}$ est proposée. Elle est adaptée au schéma d'intégration des différences centrées qui fait jouer un rôle particulier aux points milieux des pas de temps. En particulier, la vitesse éléments finis au pas est donnée en fonction des vitesses éléments finis aux demi-pas par :

$$\mathbf{v}_{h,n} = \frac{\mathbf{v}_{h,n+\frac{1}{2}} + \mathbf{v}_{h,n-\frac{1}{2}}}{2} \quad [38]$$

Dans la suite, on note M_j un nœud du maillage. Le champ de vitesse cinématiquement admissible $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{CA}$ est alors défini comme suit :

pour $t \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}]$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{CA}(M_j, t) = 2 \frac{\mathbf{v}_{h,n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{h,n}}{\Delta t} (t - t_n) + \mathbf{v}_{h,n} \quad [39]$$

pour $t \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}]$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{CA}(M_j, t) = 2 \frac{\mathbf{v}_{h,n+1} - \mathbf{v}_{h,n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} (t - t_{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{v}_{h,n+\frac{1}{2}} \quad [40]$$

Aux nœuds M_j , le champ $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{CA}$ vérifie les conditions initiales puisque le champ de vitesse éléments finis vérifie ces conditions.

Les déplacements cinématiquement admissibles sont ensuite calculés en intégrant le champ de vitesse cinématiquement admissible $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{CA}$, en tenant compte de la condition initiale en déplacement, et en écrivant la continuité du déplacement entre les pas de temps. La condition initiale en déplacement est donc prise en compte et le champ $\tilde{\mathbf{u}}_{CA}$ est cinématiquement admissible.

6.1.2. Cas des problèmes avec conditions unilatérales

Par rapport à un problème de dynamique sans contact, la principale difficulté provient du fait que des conditions supplémentaires doivent être vérifiées afin de garantir que les champs cinématiquement admissibles ne conduisent pas à une erreur infinie. En particulier, on doit vérifier sur la zone de contact cinématiquement admissible Γ_{CA}^c définie par le déplacement \mathbf{u}_{CA} :

$$-\mathbf{w}_{CA}^c \in B, \text{ c'est-à-dire } \mathbf{w}_{CA}^c \cdot \mathbf{n}^c \geq 0 \quad [41]$$

La principale difficulté du problème provient du fait que la zone de contact admissible Γ_{CA}^c , sur laquelle est écrite la condition unilatérale, est inconnue, puisqu'elle est déterminée par le champ de déplacement \mathbf{u}_{CA} , lui-même inconnue du problème.

Afin de lever cette difficulté, nous imposons que la zone de contact Γ_{CA}^c définie par le champ de déplacement admissible \mathbf{u}_{CA} soit identique à la zone de contact éléments finis Γ_h^c .

On impose donc quelques points de rendez-vous entre la configuration éléments finis et la configuration admissible.

Une fois Γ_{CA}^c déterminée il est aisé de construire un champ \mathbf{w}_{CA} vérifiant [41]. Une solution simple qui conduit à la résolution d'un problème linéaire est d'imposer :

$$\mathbf{w}_{M,CA}^c(t) \cdot \mathbf{n}^c = 0 \text{ sur } \Gamma_{CA}^c \quad [42]$$

Finalement, nous cherchons donc les champs \mathbf{w}_{CA}^c et \mathbf{u}_{CA} solutions du problème linéaire suivant :

Problème P_{CA} : trouver $\mathbf{w}_{CA}(M,t)$ et $\mathbf{u}_{CA}(M,t)$ tels que :

- $\dot{\mathbf{u}}_{CA}(M,0) = \mathbf{v}_0$;
- $\mathbf{u}_{CA}(M,0) = \mathbf{u}_0$;
- $\Gamma_{CA}^c = \Gamma_h^c$ pour tout $t \in [0,T]$;
- $\mathbf{w}_{CA}^c(M,t) = \dot{\mathbf{u}}_{CA}(M,t)$ sur $\Gamma_{CA}^c = \Gamma_h^c$;
- $\mathbf{w}_{CA}^c(M,t) \cdot \mathbf{n}^c = 0$ sur $\Gamma_{CA}^c = \Gamma_h^c$;
- $\dot{\mathbf{u}}_{CA}(M,t)$ minimise un écart J au sens des moindres carrés avec le champ de vitesses $\tilde{\mathbf{u}}_{CA}(M,t)$.

En pratique, étant donné que les champs \mathbf{u}_{CA} , \mathbf{w}_{CA}^c cherchés sont définis par leurs valeurs nodales, la résolution du problème P_{CA} se fait nœud par nœud et en distinguant deux cas :

- le nœud M_i considéré vient impacter le socle rigide au cours de l'intervalle d'étude et on doit résoudre le problème P_{CA} ; il faut minimiser J sous contraintes linéaires :

- conditions initiales en vitesse et déplacement ;
- vitesses normales nulles sur la zone de contact ;

Puisque J est quadratique, on peut se ramener à la résolution d'un système linéaire dont les inconnues sont les vitesses aux différents pas de temps et demi pas de temps ;

- le nœud M_i considéré n'impacte jamais le socle rigide et la solution du problème P_{CA} est triviale :

$$\mathbf{u}_{CA}(M_i,t) = \tilde{\mathbf{u}}_{CA}(M_i,t) \quad [43]$$

6.2. Construction de champs dynamiquement admissibles

La construction des champs dynamiquement admissibles se fait en deux temps :

- calcul d'un triplet $(\mathbf{F}_{DA}^c(t_i), \sigma_{DA,i}, \Gamma_{DA,i})$ en équilibre à chaque piquet de temps t_i de la discrétisation temporelle ;
- interpolation linéaire sur chaque pas de temps de ces grandeurs.

6.2.1. Efforts de contact dynamiquement admissibles \mathbf{F}_{DA}^c au piquet t_i

Les efforts de contact dynamiquement admissibles $\mathbf{F}_{DA}^c(t_i)$ doivent vérifier certaines conditions :

$$\mathbf{F}_{DA}^c(t_i) \in C(\mu) \quad [44]$$

de sorte que l'erreur ne soit pas infinie du fait de l'utilisation du bipotentiel. On se base sur l'effort de contact éléments finis noté \mathbf{F}_h^c . A chaque piquet de temps, les techniques utilisées pour les problèmes de statique dans (Louf *et al.*, 2001) sont reprises. On se base sur l'effort de contact éléments finis noté \mathbf{F}_h^c . En pratique \mathbf{F}_h^c ne vérifie pas les conditions précitées. Il est donc nécessaire, comme en statique, de le modifier pour obtenir un champ d'effort au contact strictement admissible.

6.2.1.1. Première étape : pour chaque nœud M_k sur $[0, T]$

Dans un premier temps, pour chaque nœud M_k considéré impactant le socle rigide au piquet de temps t_i , et décollant au piquet de temps $t_{i'}$, on impose :

$$\overline{\mathbf{F}}_{DA}^c(M_k, t_n) = \mathbf{F}_h^c(M_k, t_n) \text{ pour } n \in T_c = \{i + 1, \dots, i' - 1\} \quad [45]$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{DA}^c(M_k, t_n) = \mathbf{0} \text{ pour } n \notin T_c \quad [46]$$

Cela évite d'avoir un effort non nul sur les pas de temps précédant l'impact et suivant le décollement.

6.2.1.2. Seconde étape : à chaque piquet de temps t_i

A chaque piquet de temps t_i , on impose tout d'abord que les efforts $\overline{\mathbf{F}}_{DA}^c(M_k, t_i)$ précédemment définis soient nuls en dehors de la zone de contact Γ_{CA}^c conformément à la figure 3. On obtient alors les champs d'efforts au contact $\tilde{\mathbf{F}}_{DA}^c$:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{DA}^c(M_k, t_i) = \overline{\mathbf{F}}_{DA}^c(M_k, t_i), \text{ si } M_k \in \Gamma^c - \partial\Gamma^c \quad [47]$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{DA}^c(M_k, t_i) = \mathbf{0}, \text{ sinon} \quad [48]$$

Enfin, on impose que ces efforts vérifient les conditions induites par [44] de sorte que l'erreur associée demeure finie. En pratique les composantes normales et tangentielles des efforts de contact dynamiquement admissibles \mathbf{F}_{DA}^c sont donc définies pour chaque nœud M_k par :

$$F_{DA,n}^c(M_k, t_i) = \sup(0, \tilde{F}_{DA,n}^c(M_k, t_i)) \quad [49]$$

$$\mathbf{F}_{DA,t}^c(M_k, t_i) = \frac{\tilde{\mathbf{F}}_{DA,t}^c}{\|\tilde{\mathbf{F}}_{DA,t}^c\|} \inf \left[\|\tilde{\mathbf{F}}_{DA,t}^c\|, \mu F_{DA,n}^c(M_k, t_i) \right] \quad [50]$$

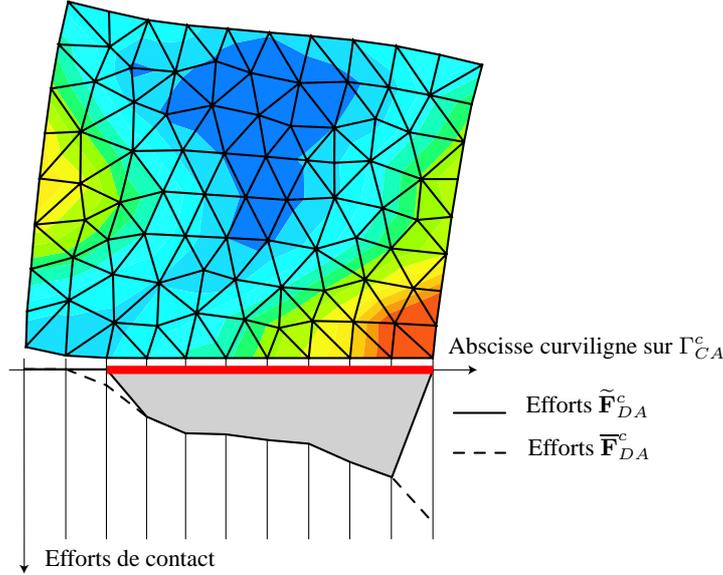


Figure 3. Modifications des efforts de contact sur Γ_{CA}^c

REMARQUE. — Dans le cas 1D, où la zone de contact est réduite à un nœud impactant, noté M_0 , et où il n’y a pas de frottement, la construction de F_{DA}^c est plus simple puisqu’elle se réduit à :

$$\overline{F}_{DA}^c(M_0, t_n) = F_h^c(M_0, t_n) \text{ pour } n \in T_c = \{i + 1, \dots, i' - 1\} \quad [51]$$

$$\overline{F}_{DA}^c(M_0, t_n) = 0 \text{ pour } n \notin T_c \quad [52]$$

et

$$F_{DA}^c(M_0, t_i) = \sup(0, \overline{F}_{DA}^c(M_0, t_i)) \quad [53]$$

6.2.2. Couple $(\sigma_{DA,i}, \Gamma_{DA,i})$

Par rapport aux techniques présentées dans (Combe *et al.*, 1999), la présence de contact ne modifie rien dans la construction du couple dynamiquement admissible $(\sigma_{DA,i}, \Gamma_{DA,i})$. En effet, comme en statique, les efforts de contact admissibles \mathbf{F}_{DA}^c précédemment reconstruits sont vus dans cette section comme de nouveaux efforts

imposés sur la frontière Γ_{CA}^c de Ω . Il est toutefois nécessaire de disposer d'un triplet d'efforts de contact admissibles-accélération-contrainte en équilibre au sens faible des éléments finis. C'est l'objet des préliminaires.

6.2.2.1. Préliminaires

Dans le cas général où les efforts de contact $\mathbf{F}_{DA}^c(t_i)$ ne sont pas égaux aux efforts $\mathbf{F}_h^c(t_i)$, le couple $(\sigma_{hi}, \Gamma_{hi})$ n'est plus en équilibre au sens faible des éléments finis avec $\mathbf{F}_{DA}^c(t_i)$. En effet, au piquet de temps t_i , l'équilibre éléments finis peut s'écrire :

$$\mathbf{M}^D[a_i] + [\sigma_i] = [F_i] \quad [54]$$

où $[F_i]$ est calculé à partir des efforts imposés et des efforts de contact $\mathbf{F}_h^c(t_i)$. Afin de calculer une accélération et un champ de contraintes en équilibre faible avec les efforts de contact admissibles $\mathbf{F}_{DA}^c(t_i)$, il est nécessaire de réécrire l'équilibre éléments finis au piquet de temps t_i , et donc de résoudre :

$$\mathbf{M}^D[\tilde{a}_i] + [\sigma_i] = [\tilde{F}_i] \quad [55]$$

où $[\tilde{F}_i]$ est calculé à partir des efforts imposés et des efforts de contact admissibles $\mathbf{F}_{DA}^c(t_i)$. On obtient ainsi une accélération $\tilde{\mathbf{a}}_{h,i}$ en équilibre avec les efforts intérieurs et les efforts de contact admissibles. Dans le cas particulier où l'on a $\mathbf{F}_{DA}^c(t_i) = \mathbf{F}_h^c(t_i)$, on aura bien entendu :

$$\tilde{\mathbf{a}}_{h,i} = \mathbf{a}_{h,i} \quad [56]$$

6.2.2.2. Démarche générale

Le principe général de la construction du couple $(\sigma_{DA,i}, \Gamma_{DA,i})$ est le suivant, à chaque piquet de temps t_i :

- calcul de densités d'efforts sur les contours des éléments permettant par la suite d'assurer la continuité du vecteur contrainte ;
- calcul de l'accélération dynamiquement admissible $\Gamma_{DA,i}$ sur chaque élément ;
- calcul de $\sigma_{DA,i}$ sur chaque élément en équilibre avec les densités et en considérant $\Gamma_{DA,i}$ comme une charge volumique intérieure.

La reconstruction de $(\sigma_{DA,i})$ utilise donc de nouveau les acquis des problèmes de statique. Pour de plus amples informations sur ces techniques, le lecteur pourra se reporter à (Ladevèze *et al.*, 2001) et (Ladevèze *et al.*, 1991). La construction de $\Gamma_{DA,i}$ est par ailleurs détaillée dans (Combe *et al.*, 1999).

6.2.3. Interpolation sur le temps

Les champs dynamiquement admissibles sont obtenus, sur l'intégralité de l'intervalle d'étude $[0, T]$, par interpolation linéaire des champs admissibles obtenus précédemment aux différents piquets de temps. Sur l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$, on a :

$$\sigma_{DA}(t) = \frac{\sigma_{DA,i+1} - \sigma_{DA,i}}{\Delta t}(t - t_i) + \sigma_{DA,i} \quad [57]$$

$$\Gamma_{DA}(t) = \frac{\Gamma_{DA,i+1} - \Gamma_{DA,i}}{\Delta t}(t - t_i) + \Gamma_{DA,i} \quad [58]$$

$$\mathbf{F}_{DA}^c(t) = \frac{\mathbf{F}_{DA,i+1}^c - \mathbf{F}_{DA,i}^c}{\Delta t}(t - t_i) + \mathbf{F}_{DA,i}^c \quad [59]$$

Le triplet dynamiquement admissible $(\sigma_{DA}, \Gamma_{DA}, \mathbf{F}_{DA}^c)$ ainsi défini est strictement admissible, à tout instant de l'intervalle d'étude, sous réserve que les efforts imposés soient linéaires en temps, ce qui, en pratique, n'est pas très contraignant.

7. Quelques exemples de mise en œuvre

7.1. Problème inidimensionnel

7.1.1. Solution exacte d'un impact unidimensionnel

Dans le cas unidimensionnel présenté sur la figure 4, la solution exacte du problème de référence est connue. On peut trouver dans (Gibert, 1988) des détails concernant l'obtention de la solution. Les conditions initiales sont données par $\mathbf{u}(M, t = 0) = \mathbf{u}_0$ et $\dot{\mathbf{u}}(M, t = 0) = \mathbf{v}_0$, $\forall M \in \Omega$. Par ailleurs, aucun effort extérieur n'est imposé.

On a introduit les grandeurs géométriques et mécaniques communément utilisées pour les problèmes 1D. La longueur et la section de la barre sont notées L , S . Le module d'Young et l'effort normal sont quant à eux désignés par E et N .

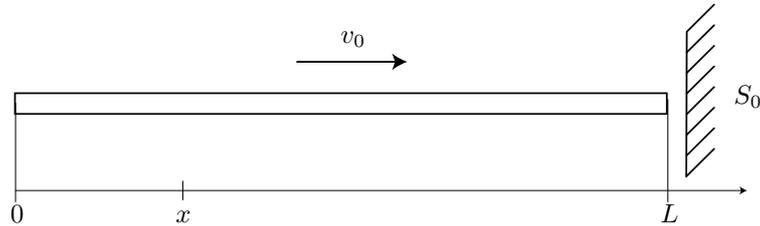


Figure 4. Problème d'impact dont la solution exacte est connue

Pratiquement, il est possible de décomposer la solution exacte en trois phases :

– à l’approche du socle rigide la barre a un mouvement de corps rigide de vitesse v_0 , jusqu’à l’instant de l’impact noté t_c ;

– une onde de compression se propage alors à la célérité $-c = -\left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ dans le solide, séparant distinctement une zone comprimée, où les points sont à vitesse nulle, et une zone non comprimée, toujours animée d’un mouvement de solide rigide. Au bout d’un temps $\tau = \frac{L}{c}$, c’est-à-dire à la date $t = t_c + \frac{L}{c}$, l’onde se réfléchit sur le bord libre. Une onde de traction se propage alors à la vitesse c dans la barre, annulant ainsi la compression. Lorsque le front d’onde atteint l’extrémité en contact, il y a décollement : $t = t_c + \frac{2L}{c}$;

– la barre retrouve alors un mouvement de solide rigide, à la vitesse $-v_0$.

7.1.2. Erreur de référence

La connaissance de la solution exacte du problème de référence dans le cas uni-dimensionnel nous permet de définir une erreur de référence. Elle permet donc de connaître l’erreur réellement commise entre la solution du problème de référence et la solution éléments finis :

$$e_{Ex}^2(t) = \sup_{\tau \in [0, t]} \left[\frac{1}{2ES} \int_0^L (N_{ex} - N_h)^2 dx + \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}_{ex} - \dot{u}_h)^2 dx \right] \quad [60]$$

REMARQUE. — De la même façon qu’en [16], l’erreur de référence peut être obtenue en calculant une moyenne et non pas en prenant un maximum sur le temps.

7.1.3. Indice d’efficacité

Un indice d’efficacité peut être défini comme le rapport de l’erreur estimée et de l’erreur de référence :

$$\xi = \frac{e_{RdC}}{e_{Ex}}$$

Cet indice d’efficacité permet d’obtenir une bonne image du niveau de performance global de l’estimateur d’erreur. En particulier, si ξ est proche de 1, l’erreur estimée est proche de l’erreur de référence et l’estimateur d’erreur est fiable.

7.1.4. Paramètres de l’étude

Pour l’ensemble des études menées dans cette section, nous utilisons les paramètres mécaniques suivants (nuance d’aluminium) :

- module d’Young : $E = 70\,000 \text{ MPa}$;
- longueur : $L = 0,1 \text{ m}$;
- coefficient de Poisson : $\nu = 0$;
- section : $S = 0,02 \text{ m}^2$;
- masse volumique : $\rho = 2\,700 \text{ kg/m}^3$;
- vitesse d’impact : $v_0 = 400 \text{ m/s}$.

La solution éléments finis est obtenue à l’aide d’un logiciel prototype écrit au sein du code de calcul CASTEM 2000.

7.1.5. Influence des discrétisations spatiale et temporelle

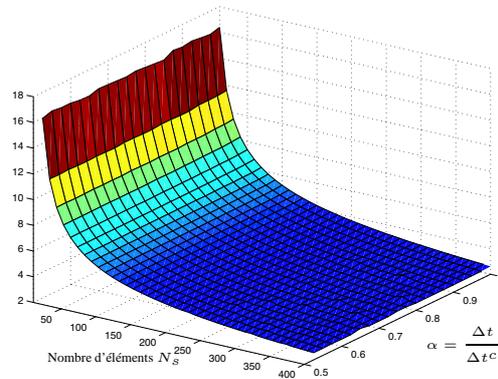


Figure 5. Erreur estimée relative fonction de N_s et α

Dans un premier temps, nous présentons sur la figure 5, l'erreur estimée relative en fonction du nombre d'éléments N_s dans la barre et du rapport :

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta t^c}$$

En pratique, nous nous sommes fixés les bornes suivantes pour α et N_s :

$$\alpha \in [0,5; 1]$$

$$N_s \in [10; 400]$$

Nous rappelons ici que la discrétisation spatiale demeure uniforme.

REMARQUE. — Les calculs avec $\frac{\Delta t}{\Delta t^c} > 1$ ne peuvent être menés puisque dans ce cas, le schéma d'intégration utilisé est instable.

La figure 5 montre que, pour une discrétisation spatiale donnée, abaisser la taille du pas de temps ne permet pas d'améliorer la qualité de la solution approchée de façon significative.

7.1.6. Indices d'efficacité

Nous cherchons ici à comparer l'estimation d'erreur fournie par l'erreur en relation de comportement à l'erreur de référence [60], et ce pour différentes discrétisations spatiales et temporelles. Pour cela, nous traçons les indices d'efficacité, en faisant varier le rapport α et le nombre d'éléments N_s , comme précédemment.

Nous obtenons ainsi les cartes données sur la figure 6. On constate que les indices d'efficacité calculés sont compris entre 0.7 et 1.8. Ces résultats montrent que l'estimateur d'erreur en relation de comportement conduit à une erreur du bon ordre de grandeur. Le fait que l'indice d'efficacité puisse être inférieur à 1 lorsque α devient

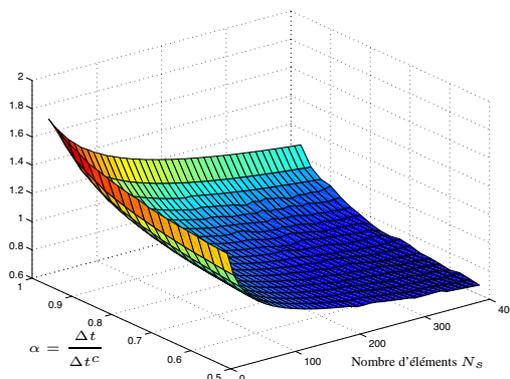


Figure 6. Indice d'efficacité ξ_{E_x} fonction de N_s et α

petit est par contre pénalisant. Dans ce cas la dispersion liée au schéma d'intégration devient importante et se manifeste par la présence d'oscillations parasites autour du front d'onde qui conduisent à une erreur rapidement importante. Dès lors, un léger défaut de cumul de l'erreur sur le temps provoque une chute importante de l'indice d'efficacité.

De très récents travaux ont montré, dans le cas de problèmes d'évolutions plus simples qu'une erreur en dissipation pouvait donner de meilleurs résultats sur ce point (Ladevèze *et al.*, 2005).

7.2. Problème bidimensionnel

7.2.1. Présentation du problème étudié

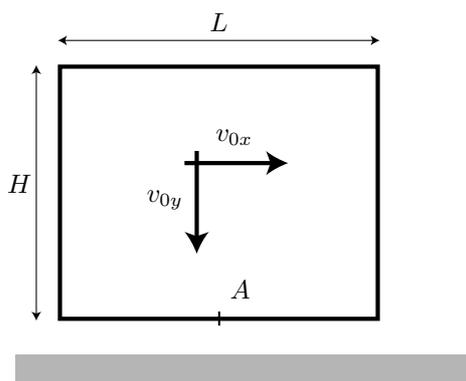


Figure 7. Exemple d'impact élastique 2D

Le problème étudié ici concerne un impact élastique où la vitesse d'impact n'est pas orthogonale à l'obstacle rigide. Dans ce cas, le frottement a une forte influence sur l'allure de la solution. Ce problème a notamment été étudié dans (Kim *et al.*, 1992) et (Vola *et al.*, 1997). Nous avons, dans un premier temps, comparé les résultats obtenus à ceux proposés dans la littérature. En particulier, nous avons pu comparer les déplacements normaux et tangentiels du point *A* (figure 7) et cela nous a permis de valider la stratégie de résolution proposée en section 5. Puis nous avons choisi de traiter ce même exemple avec les paramètres donnés ci-après. Le matériau correspond de nouveau à une nuance d'aluminium :

- module d'Young : $E = 70\,000\text{ MPa}$;
- coefficient de Poisson : $\nu = 0,3$;
- masse volumique : $\rho = 2\,700\text{ kg/m}^3$;
- coefficient de friction $\mu = 0,2$;
- hauteur : $H = 40\text{ mm}$;
- largeur : $L = 50\text{ mm}$;
- vitesse initiale : $v_{0x}\mathbf{x} + v_{0y}\mathbf{y}$;
- avec : $v_{0x} = v_{0y} = 400\text{ m/s}$;

7.2.2. Première estimation de l'erreur

Pour ce premier test, nous avons considéré un pas de temps égal à 0,9 fois le pas de temps critique estimé par la condition de stabilité [34]. Les contraintes de Von Mises sont données à différents instants de l'intervalle d'étude sur la figure 8. Les cartes

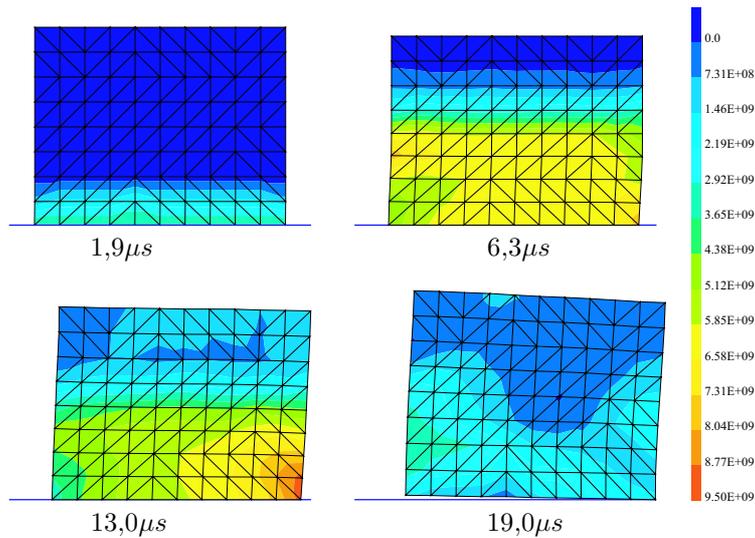


Figure 8. Contraintes de Von Mises en $N.m^{-2}$ à différents instants

des contributions élémentaires à l'erreur globale définies par [20] sont fournies sur la figure 9 aux mêmes instants. Les erreurs globales relatives obtenues sont égales à :

- 23,8 % pour une prise en compte du temps par une moyenne [16] ;
- 29,1 % pour une prise en compte du temps par un maximum [15].

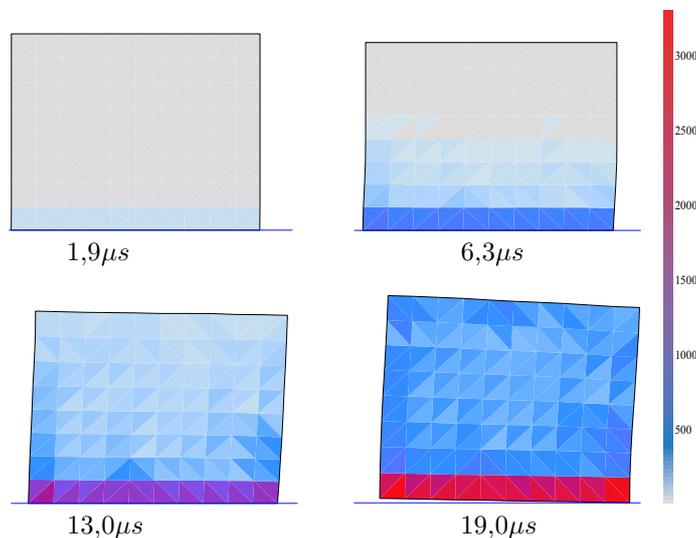


Figure 9. Erreurs élémentaires cumulées sur le temps à différents instants

7.2.3. Influence de la discrétisation spatiale

Nous souhaitons ici mettre en évidence l'influence de la discrétisation spatiale sur la qualité de la solution approchée. Dans cet objectif, nous construisons un premier maillage grossier, que nous sous-découpons 3 fois. Quatre maillages sont ainsi obtenus.

Le pas de temps associé à chacun de ces calculs est fixé à 0,9 fois le pas de temps critique estimé par la condition de Courant. C'est une valeur communément utilisée dans les codes de calculs explicites. Les erreurs absolues et relatives obtenues sont reportées dans le tableau 1.

Nombre		Erreur par «sup»		Erreur par moyenne	
nœuds	éléments	relative	absolue	relative	absolue
30	40	31,6	499	26,6	394
99	160	25,5	396	21,3	313
357	640	22,1	346	17,8	260
1 353	2 560	20,0	312	15,7	228

Tableau 1. Influence de la discrétisation spatiale

Le tableau 1 montre un comportement sain de l'estimateur d'erreur en relation de comportement. En effet, l'erreur diminue lorsque le maillage est raffiné.

7.2.4. Influence de la discrétisation temporelle

Le maillage utilisé comprend 640 éléments TRI3 et 357 nœuds. Le rapport entre le pas de temps et le pas de temps critique varie entre 0,1 et 1,0 valeur au-delà de laquelle le schéma est instable. Enfin, ces expériences numériques ont été menées avec un coefficient de frottement nul.

Les évolutions comparées des erreurs par maximum sur le temps correspondantes sont données sur la figure 10(a).

Celle-ci indique que, lorsque le pas de temps devient très faible, la principale source d'erreur se situe au moment de l'impact. Cela montre qu'il s'agit là, sans doute, d'une erreur d'origine algorithmique. En effet, au piquet de temps précédent l'impact, il est nécessaire de freiner le solide afin que celui-ci ne pénètre pas le socle rigide. En pratique, cela revient à imposer une densité d'efforts sur les éléments qui vont venir en contact. Comme nous l'avons vu en section 6.2.1, un tel effort n'est pas admissible puisqu'il n'y a pas encore physiquement contact. C'est donc là une source d'erreur indépendante de la taille du pas de temps.

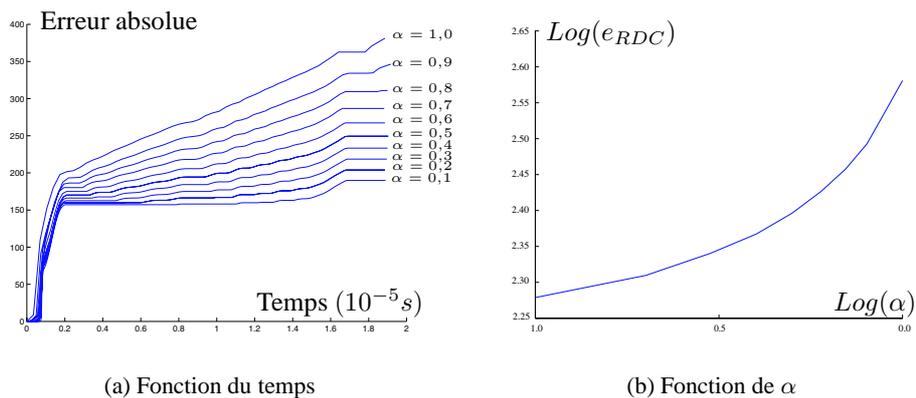


Figure 10. Evolution de l'erreur absolue [15] pour différentes tailles de pas de temps

La figure 10(b) reprend les résultats de cette section. Elle indique le taux de convergence de l'estimateur.

On observe une décroissance de moins en moins rapide de l'erreur. Deux phénomènes sources d'erreur indépendants de la taille du pas de temps peuvent expliquer cette constatation :

- comme il a été dit précédemment, l'erreur commise au moment de l'impact ne dépend pas du pas de temps et constitue donc une première limite à la baisse du niveau d'erreur global ;

– il a été montré dans (Pelle *et al.*, 2002) sur un exemple unidimensionnel que l'utilisation d'une matrice de masse non consistante était également une source d'erreur indépendante de la taille du pas de temps.

Lorsque le pas de temps diminue, les erreurs dues à ces deux défauts deviennent peu à peu prépondérantes, et le niveau d'erreur stagne.

8. Conclusion

Dans cet article, nous avons montré comment il était possible d'étendre les estimateurs d'erreur en relation de comportement proposés dans (Combe *et al.*, 1999) et (Louf *et al.*, 2001) aux problèmes d'impacts élastiques sur socle rigide plan.

Les constructions de champs admissibles ont été adaptées et conduisent à un estimateur d'erreur en relation de comportement fiable. En effet, dans le cas unidimensionnel, nous avons pu mettre en évidence que les indices d'efficacité étaient proches de 1.

Enfin, les comportements de l'estimateur d'erreur face au raffinement du maillage, ou de la discrétisation temporelle semblent tout à fait sains.

Les perspectives à ces travaux sont multiples. Tout d'abord le cas de l'impact de plusieurs solides est en cours d'étude. Pour deux barres unidimensionnelles, ou dans le cas de maillages compatibles à l'interface, la mise en œuvre de la mesure d'erreur s'étend sans difficulté. Le cas général ne pose pas de problème d'un point de vue de la formulation de la mesure d'erreur mais la mise en œuvre des constructions de champs admissibles à l'interface de contact est un point délicat. Par ailleurs, il a été montré dans (Louf *et al.*, 2003) que le cas d'un comportement matériau non linéaire et de grandes transformations peut également être traité par ce type d'estimateur d'erreur.

9. Bibliographie

- Ainsworth M., Oden J.-T., "A posteriori error estimation in finite element analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 142, p. 1-88, 1997.
- Aubry D., Lucas D., Tie B., "Adaptative strategy for transient/coupled problems - Applications to thermoelasticity and elastodynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 176, p. 41-50, 1999.
- Babuska I., Rheinboldt W.-C., "Error estimates for adaptive finite element computations", *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 15, 4, p. 736-754, 1978.
- Belytschko T., Hughes T.-J.-R., *Computational methods for transient analysis*, North-Holland, 1986.
- Boroomand B., Zienkiewicz O.-C., "Recovery procedures in error estimation and adaptivity: adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour", *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, p. 383-410, 1998.
- Bui H., *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*, Eyrolles, 1993.

- Combe J.-P., Ladevèze P., Pelle J.-P., "Constitutive relation error estimator for transient finite element analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 176, p. 165-185, 1999.
- Coorevits P., Hild P., Pelle J.-P., «*Contrôle et adaptation des calculs éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral*», *Revue européenne des éléments finis*, vol. 8, p. 7-29, 1999.
- Coorevits P., Hild P., Pelle J.-P., "A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and nonmatching meshes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 186, p. 65-83, 2000.
- Eriksson K., Estep D., Hansbo P., Johnson C., *Computational differential equations*, Cambridge University Press, 1996.
- Gibert R.-J., *Vibrations des structures, Interactions avec les fluides, Sources d'excitation aléatoires*, Eyrolles, 1988.
- Kim J.-O., Kwak B.-M., "Frictional dynamic contact analysis using finite element nodal displacement description", *Computers and Structures*, vol. 42, p. 797-807, 1992.
- Ladevèze P., Comparaison de modèles de milieux continus, PhD thesis, Université P. et M. Curie, 1975.
- Ladevèze P., Chamoin L., Florentin E., "Strict upper and lower bounds of outputs of interest for linear and nonlinear structural problems", *International Conference on Adaptive Modeling and Simulation*, 2005.
- Ladevèze P., Pelle J.-P., *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermès, 2001.
- Ladevèze P., Pelle J.-P., Rougeot P., "Error estimation and mesh optimization for classical finite elements", *Engineering Computation*, vol. 8, p. 69-80, 1991.
- Louf F., Combe J.-P., Gallimard L., Pelle J.-P., "Error Estimation for Impact Problems", Salerne, Italie, p. 611-615, 2003.
- Louf F., Combe J.-P., Pelle J.-P., «*Estimations d'erreur pour les problèmes de contact unilatéral avec frottement*», *Revue européenne des éléments finis*, vol. 10, p. 907-928, 2001.
- Pelle J.-P., Combe J.-P., Fanget A., "Evaluation des erreurs de discrétisation pour les simulations d'impact", *Revue européenne des éléments finis*, vol. 11, p. 621-650, 2002.
- Raous M., Cescotto S., Curnier A., Millard A., *Modélisation mécanique et numérique du contact et du frottement*, Cours IPSI, 1996.
- Raous M., Chabrand L., Lebon F., "Numerical methods for frictional contact problems and applications", *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. numéro spécial, 1/7, p. 111-128, 1988.
- Rieger A., Wriggers P., "Adaptive methods for frictionless contact", *Computers and Structures*, vol. 79, p. 2197-2208, 2001.
- Saxe. G. de, "Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 314, p. 125-129, 1992.
- Vola D., Pratt E., Raous M., Jean M., «*Programmation mathématique pour des problèmes de contact avec frottement en dynamique*», *Actes du troisième colloque national en calcul des structures*, Giens, France (Var), p. 441-446, 1997.
- Wiberg N.-E., Lie X.-D., "A postprocessed error estimate and an adaptive procedure for the semi-discrete finite element method in dynamic analysis", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, p. 3585-3603, 1994.
- Wriggers P., Fischer K., Rieger A., "Recent New Developments in Contact Mechanics", *VIII International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, Spain, 2003.

- Wriggers P., Scherf O., "Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems", *Mathematics and Computer Modelling*, vol. 28, p. 437-447, 1997.
- Wriggers P., Scherf O., "Adaptive finite element techniques for frictional contact problems involving large elastic strains", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 151, 3-4, p. 593-603, 1998.
- Zienkiewicz O.-C., Zhu J.-Z., "A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, p. 337-357, 1987.

