
Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement à rupture avec le modèle de Dugdale

Hichème Ferdjani* — Radhi Abdelmoula**
Jean-Jacques Marigo***

* Université Saad Dahlab, Département de Mécanique
Route de Soumaa, Blida, Algérie
h_ferdjani@yahoo.fr

** LPMTM (UPR-CNRS 9001), Université Paris 13
99, avenue Jean Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse
radhi@lpmtm.univ-paris13.fr

*** LMM (UMR-CNRS 7607), Université Paris 6
4, Place Jussieu case 162, 75252 Paris cedex 5
marigo@lmm.jussieu.fr

RÉSUMÉ. Le but du travail est de montrer, dans le cadre de la mécanique de la rupture avec le modèle de forces cohésives de Dugdale, que les défauts de petite taille devant la longueur caractéristique du matériau ont pratiquement peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure. On traite pour cela deux exemples : tout d'abord, de façon purement analytique, le cas d'une plaque préfissurée, puis, en utilisant la méthode des éléments finis, le cas d'une plaque contenant une cavité circulaire.

ABSTRACT. The goal of this work is to prove that, within the framework of Fracture Mechanics with Dugdale model of cohesive forces, the defects the size of which are small compared to the material characteristic length are practically without influence on the limit loads of structures. For that, we treat two cases: first, we solve in a closed form the case of a precracked plate, then we compute by using the finite element method the response of a plate with a circular hole.

MOTS-CLÉS : rupture, modèle de Dugdale, effet d'échelle, charges limites.

KEYWORDS: fracture, Dugdale's model, scale effect, limit loads.

1. Introduction

Le modèle de rupture de Dugdale-Barenblatt ou de façon plus générale les modèles de forces cohésives présentent l'avantage, sur le modèle de Griffith, de rendre compte de l'amorçage de fissure dans une structure saine en termes d'un critère en contraintes, cf. par exemple Del Piero (1999), Del Piero *et al.* (2001), Charlotte *et al.* (2000) ou Laverne *et al.* (2004). De façon générale, les modèles de force cohésive sont de plus en plus employés et il est donc nécessaire de connaître de mieux en mieux leurs propriétés pour pouvoir les utiliser à bon escient. En particulier les effets d'échelle qui les accompagnent du fait de la présence d'une longueur caractéristique sont mal connus. Il ne s'agit évidemment pas ici de valider le modèle de Dugdale, ni de voir pour quel type de matériau il peut être utilisé, mais de voir s'il est assez robuste pour que, grâce aux effets d'échelle qu'il induit, la réponse des structures ne soit pas sensible à des défauts de petite taille. L'étude sera donc essentiellement théorique et numérique. De plus, nous envisagerons seulement des zones cohésives linéiques. La prise en compte de zones cohésives surfaciques nécessiterait des développements théoriques et numériques sortant du cadre de cette étude préliminaire.

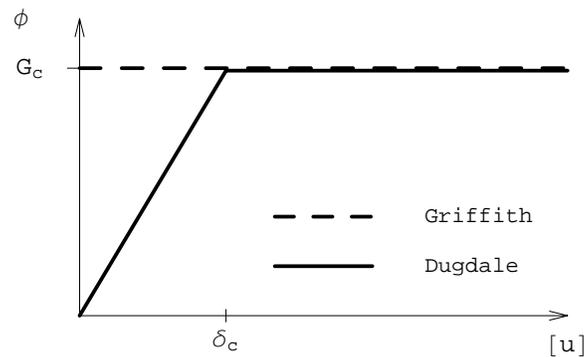


Figure 1. Densités d'énergie de surface dans les modèles de Dugdale et de Griffith

Ces modèles, formulés en termes énergétiques, consistent à supposer que la densité d'énergie de surface ϕ dépend de façon non triviale du saut de déplacement $[u]$, contrairement au modèle de Griffith où elle est constante. Ainsi dans le modèle de Dugdale, en supposant que l'ouverture se fait en mode I pur, elle s'écrit :

$$\phi([u_n]) = \begin{cases} G_c \frac{[u_n]}{\delta_c} & \text{si } [u_n] \leq \delta_c \\ G_c & \text{si } [u_n] \geq \delta_c \end{cases} . \quad [1]$$

Dans [1], $[u_n]$ désigne le saut du déplacement normal, G_c représente le taux de restitution d'énergie critique de la théorie de Griffith, alors que δ_c est une longueur

interne caractéristique des modèles de forces cohésives. Le rapport G_c/δ_c a la dimension d'une contrainte et représente la contrainte critique du matériau :

$$\sigma_c = \frac{G_c}{\delta_c}. \quad [2]$$

En termes de forces cohésives, la contrainte normale σ_{nn} d'interaction entre les lèvres de fissure vaut donc σ_c tant que $\llbracket u_n \rrbracket < \delta_c$ et s'annule dès que $\llbracket u_n \rrbracket > \delta_c$. En pratique, les lèvres des fissures sont donc divisées en deux zones : une zone dite *cohésive* dans laquelle les forces cohésives ne sont pas nulles et une zone dite *non cohésive* dans laquelle il n'y a plus de force cohésive. La zone cohésive se situe près de la pointe, là où l'ouverture ne dépasse pas le seuil critique δ_c .

Le fait que σ_c joue le rôle de contrainte critique se vérifie dans l'étude d'une barre en traction simple. En raisonnant comme Del Piero (1999) ou Charlotte *et al.* (2000) à partir d'un principe de minimisation d'énergie, on montre que la réponse élastique (le champ de déplacement est de la forme $u(x) = \sigma x/E$, E étant le module d'Young) cesse d'être un minimum relatif de l'énergie (totale) de la barre lorsque la contrainte appliquée σ dépasse la contrainte critique σ_c . La conséquence directe de cette présence d'une contrainte critique dans le modèle est qu'une structure donnée ne pourra pas supporter n'importe quel niveau de chargement conformément aux résultats classiques des théories de calcul à la rupture ou d'analyse limite, cf. Salençon (1983). Cependant il y a lieu de distinguer les charges limites élastiques, *i.e.* les charges à partir desquelles la réponse élastique cesse d'être un minimum relatif de l'énergie et où donc la structure doit développer une fissuration, des charges limites proprement dites, *i.e.* des charges maximales que peut supporter la structure même en se fissurant. Dans la suite nous désignons les premières comme *charges d'amorçage* et les secondes comme *charges de rupture*.

L'objectif de ce travail est d'étudier l'influence de la *forme* et de la *taille* de défauts sur la valeur des charges d'amorçage et de rupture d'une plaque en traction simple. Les défauts considérés sont une fissure rectiligne préexistante et un trou circulaire.

Rappelons tout d'abord ce qu'il en est de la charge d'amorçage dans le cas du modèle de Griffith. Notons que seuls les défauts du type fissure, *i.e.* les défauts présentant une singularité « forte » en \sqrt{r} pour le champ des déplacements, sont susceptibles de se propager. Les cavités, les entailles et autres défauts non assez « pointus » induisent une singularité trop faible pour donner un taux de restitution d'énergie non nul. Pour une fissure de petite taille ℓ et de normale n , placée en un point x où les contraintes normales en l'absence du défaut seraient d'amplitude σ , le taux de restitution d'énergie est de l'ordre de $\sigma^2 \ell$. Il tend donc vers 0 lorsque ℓ tend vers 0. Donc, dans la théorie de Griffith où les fissures ne se propagent que si le taux de restitution d'énergie atteint la valeur critique G_c , les défauts de petite taille sont inoffensifs. C'est évidemment un atout pour ce modèle. Mais en contrepartie, le modèle de Griffith est trop conservatif puisqu'il ne sait pas rendre compte de l'amorçage de fissures en dehors de points de fortes singularités, cf. Francfort *et al.* (1998).

Si l'on abandonne le modèle de Griffith au profit du modèle de Dugdale, le critère de propagation d'un défaut ou d'amorçage de fissure ne se formule plus en termes du taux de restitution d'énergie critique G_c , mais en termes de la contrainte critique σ_c , cf. Charlotte *et al.* (2000) et Laverne *et al.* (2004). Ce faisant, on pourrait *a priori* s'attendre à ce que la forme des défauts joue un rôle essentiel et que ceux favorisant les concentrations de contraintes s'avèrent plus nocifs. En particulier les fissures, défauts qui induisent des singularités, devraient être sensiblement plus défavorables que les cavités circulaires, défauts qui par leur forme « parfaite » sont ceux qui engendrent le moins de concentration. Ceci se révèle vrai pour la charge d'amorçage, mais faux pour la charge limite. En effet, il est clair que la charge d'amorçage est très sensible à la forme du défaut puisqu'elle est directement liée aux concentrations de contraintes induites par le défaut sur la réponse élastique. Ainsi, dans le cas d'une fissure préexistante, du fait de la présence d'une singularité de contraintes en pointe de fissure, la charge d'amorçage est nulle, de nouvelles discontinuités apparaissent dès la mise en charge. Par contre, dans le cas d'un trou circulaire dans une plaque, la concentration de contraintes est finie et donc la charge d'amorçage n'est pas nulle.

Nous verrons par contre que la charge de rupture, elle, est beaucoup moins sensible à la forme du défaut qu'à sa taille. En particulier, du fait de la présence de la longueur caractéristique δ_c dans le modèle de Dugdale-Barenblatt, les effets d'échelle sont importants. La charge de rupture dépend de façon essentielle du rapport entre la taille du défaut et la longueur caractéristique δ_c . Un résultat majeur serait de montrer que, *quelle que soit la forme du défaut*, la charge de rupture tend vers la contrainte critique σ_c lorsque la taille du défaut tend vers 0, à longueur caractéristique fixée (ou de façon équivalente, lorsque la longueur caractéristique δ_c tend vers l'infini, à taille du défaut fixée). Ceci signifierait qu'avec le modèle de Dugdale-Barenblatt, les structures sont insensibles aux petits défauts et se comportent comme des structures saines, et ce bien qu'elles développent des zones d'amorçage avant rupture. On se contentera d'étudier ici les deux cas extrêmes et de montrer qu'une plaque en traction simple est insensible à un petit défaut de type fissure ou cavité circulaire justement en raison des effets d'échelle.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 2, le problème est posé. Dans la section 3, on le résout analytiquement dans le cas d'une fissure préexistante. Dans la section 4, on le résout numériquement par la méthode des éléments finis dans le cas d'une cavité circulaire. On synthétise les résultats obtenus et on conclut dans la section 5.

2. Position du problème

On considère un milieu bidimensionnel carré $\Omega = (-L, +L)^2$ contenant un défaut centré \mathcal{D} et soumis sur les faces supérieure $x_2 = +L$ et inférieure $x_2 = -L$ à une traction uniforme d'intensité σ_∞ croissante depuis 0. Le défaut considéré \mathcal{D} sera soit une fissure préexistante perpendiculaire à l'axe de traction et de longueur $2\ell_0$ (section 3, figure 2), soit un trou circulaire de rayon ℓ_0 (section 4, figure 6). L'étude est effectuée

dans le cadre des déformations planes. Le matériau est linéairement élastique, homogène et isotrope, de tenseur de rigidité \mathbf{A} , de module de Young E et de coefficient de Poisson ν . Pour des raisons de symétrie, on supposera que la fissuration se développe sur l'axe $x_2 = 0$ et de façon symétrique depuis les points $(\pm\ell_0, 0)$ du défaut initial. Les pointes des fissures créées sont situées aux points $x_1 = \pm\ell_a$. L'évolution de la fissuration suit la loi de Dugdale-Barenblatt, autrement dit les lèvres $(-\ell_a, -\ell_0)$ et $(+\ell_0, +\ell_a)$ (de l'axe $x_2 = 0$) peuvent comporter deux parties : une zone, proche de la pointe et dite *zone cohésive*, où les lèvres sont soumises à des forces cohésives de traction d'intensité constante σ_c , et une autre zone, proche du défaut initial et dite *zone non cohésive*, où les lèvres n'interagissent plus. La limite entre ces deux zones sont les points $x_1 = \pm\ell_c$. Les valeurs de ℓ_a et ℓ_c dépendent évidemment de la valeur de la charge σ_∞ . Compte tenu de la symétrie du problème, toutes les évolutions se feront en mode I pur. Notons que pour certaines valeurs de σ_∞ certaines zones peuvent ne pas exister. On a donc en général $\ell_a \geq \ell_c \geq \ell_0$, les égalités étant possibles. Lors de la mise en charge ($\sigma_\infty = 0$), les conditions initiales sont $\ell_a = \ell_c = \ell_0$. Les différents critères d'apparition et de propagation de ces zones sont les suivants :

1) Une zone cohésive apparaît et dès lors $\ell_a > \ell_0$, lorsque la contrainte σ_{22} , obtenue à partir d'un calcul purement élastique, atteint la valeur σ_c aux points $x_1 = \pm\ell_0$ de l'axe $x_2 = 0$.

2) Les pointes $x_1 = \pm\ell_a$ de la zone cohésive avancent de façon à ce que la contrainte σ_{22} ne dépasse jamais la valeur critique σ_c dans la structure. Cela oblige donc à ce que les contraintes ne soient pas singulières aux points $x_1 = \pm\ell_a$ de l'axe $x_2 = 0$ et par conséquent que le facteur d'intensité des contraintes (FIC) K_I et le taux de restitution d'énergie G soient nuls.

3) Une zone non cohésive apparaît et dès lors $\ell_a > \ell_c > \ell_0$, lorsque l'ouverture $\llbracket u_2 \rrbracket$ atteint la valeur δ_c aux points $x_1 = \pm\ell_0$.

4) La pointe $x_1 = \pm\ell_c$ de la zone non cohésive avance de façon à ce que l'on ait $\llbracket u_2 \rrbracket(\pm\ell_c) = \delta_c$.

On peut *a priori* distinguer trois phases d'évolution de la fissuration lors du processus de chargement :

1) *Phase élastique* : $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_a$. Durant cette phase, la réponse de la structure est purement élastique. La structure ne contient que le défaut initial, il n'y a pas de fissure supplémentaire. Le champ des déplacements u et le champ des contraintes σ sont donc solution du problème élastique suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{D} \\ \sigma = A\varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{D} \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \\ \sigma n = \sigma_\infty n_2 e_2 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad [3]$$

n désignant la normale unitaire sortante au domaine avec défaut initial $\Omega \setminus \mathcal{D}$ et e_2 est le vecteur unitaire dans la direction 2. On doit en outre vérifier que partout dans

la structure la contrainte principale maximale est inférieure ou égale à la contrainte critique :

$$\sup_{x \in \Omega \setminus \mathcal{D}} \max\{\sigma_1(x), \sigma_2(x)\} \leq \sigma_c, \quad [4]$$

σ_1 et σ_2 désignant les deux contraintes principales.

Cette phase cesse lorsque la contrainte de traction maximale dans la structure atteint la valeur critique σ_c . La valeur de la charge correspondante est la charge d'amorçage σ_a .

2) *Phase d'amorçage* : $\sigma_a < \sigma_\infty \leq \sigma_r$. Durant cette phase, une fissure se crée mais ne comporte qu'une zone cohésive. Au fur et à mesure que l'on augmente le chargement, cette zone grandit et le saut de déplacement normal croît. Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale dans la zone cohésive atteint la valeur critique δ_c . La valeur de la charge correspondante est la charge de rupture σ_r . Durant cette phase le champ des déplacements u et le champ des contraintes σ sont donc solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{dans} & \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \Gamma_a) \\ \text{dans} & \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \Gamma_a) \\ \text{sur} & \partial\mathcal{D} \\ \text{sur} & \partial\Omega \\ \text{sur} & \Gamma_a \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{div } \sigma = 0 \\ \sigma = A\varepsilon(u) \\ \sigma n = 0 \\ \sigma n = \sigma_\infty n_2 e_2 \\ \sigma e_2 = \sigma_c e_2 \end{array}, \quad [5]$$

Γ_a désignant la zone cohésive, *i.e.* la réunion $[-\ell_a, -\ell_0] \cup [\ell_0, \ell_a]$. La valeur de ℓ_a est telle que le facteur d'intensité des contraintes soit nul en $(\pm\ell_a, 0)$:

$$K_I(\ell_a) = 0. \quad [6]$$

On doit en outre vérifier que partout dans la structure la contrainte principale maximale est inférieure ou égale à la contrainte critique et que dans la zone cohésive l'ouverture est inférieure à l'ouverture critique δ_c :

$$\sup_{x \in \Omega \setminus \mathcal{D}} \max\{\sigma_1(x), \sigma_2(x)\} \leq \sigma_c, \quad \sup_{x \in \Gamma_a} \llbracket u_2 \rrbracket(x) \leq \delta_c. \quad [7]$$

Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale dans la zone cohésive atteint la valeur critique δ_c . La valeur de la charge correspondante est la charge de rupture σ_r .

3) *Phase de propagation*. Une fois la charge de rupture atteinte, l'équilibre de la structure ne peut plus être assuré sans que se développe une zone de fissuration non cohésive. En tenant compte de la présence de cette zone, notée $\Gamma_r = [-\ell_c, -\ell_0] \cup [\ell_0, \ell_c]$, le champ des déplacements u et le champ des contraintes σ devront donc être solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{dans} & \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \Gamma_a \cup \Gamma_r) \\ \text{dans} & \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \Gamma_a \cup \Gamma_r) \\ \text{sur} & \partial\mathcal{D} \cup \Gamma_r \\ \text{sur} & \partial\Omega \\ \text{sur} & \Gamma_a = (-\ell_a, -\ell_c) \cup (\ell_c, \ell_a) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{div } \sigma = 0 \\ \sigma = A\varepsilon(u) \\ \sigma n = 0 \\ \sigma n = \sigma_\infty n_2 e_2 \\ \sigma e_2 = \sigma_c e_2 \end{array}. \quad [8]$$

La valeur de ℓ_a est toujours déterminée de façon à ce que le facteur d'intensité des contraintes soit nul en $(\pm\ell_a, 0)$, alors que ℓ_c l'est de façon à ce que l'ouverture vaille δ_c en $(\pm\ell_c, 0)$:

$$K_I(\ell_a) = 0, \quad \llbracket u_2 \rrbracket(\ell_c) = \delta_c. \quad [9]$$

On doit toujours vérifier que partout dans la structure la contrainte principale maximale est inférieure ou égale à la contrainte critique et que dans la zone cohésive l'ouverture est inférieure à l'ouverture critique δ_c , cf. [7].

3. Cas d'une fissure préexistante

3.1. Position du problème

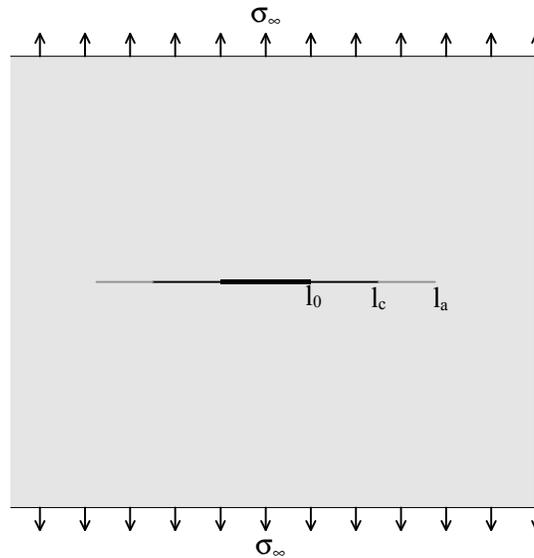


Figure 2. Géométrie de la plaque fissurée avec les zones cohésive et non cohésive

Le défaut initial est ici une fissure non cohésive de longueur $2\ell_0$, placée sur l'axe $x_2 = 0$, centrée et orientée donc perpendiculairement à l'axe de traction. Pour notre étude, on se servira de la solution donnée par Bui (1978) pour une fissure non cohésive de longueur $2\ell_c$ placée dans un milieu infini, soumise à l'infini à une traction simple d'intensité σ_∞ dans la direction 2 et ayant à ses extrémités $x_1 = \pm\ell_c$ une zone cohésive dont les pointes sont en $x_1 = \pm\ell_a$. Les lèvres des zones cohésives sont soumises à une contrainte normale de traction d'intensité constante σ_c . Le milieu a un comportement linéairement élastique isotrope. La solution de ce problème ne vérifie

pas exactement les conditions aux limites sur le bord de Ω en raison des dimensions finies de celui-ci. Toutefois, on peut considérer que l'approximation ainsi construite est d'autant meilleure que la taille du défaut est petite devant la taille du domaine. Comme c'est le comportement asymptotique de la solution, lorsque la taille du défaut tend vers zéro, qui nous intéresse, on se satisfera de cette solution approchée.

Le problème se réduit donc à un problème d'élasticité plane posé sur un domaine infini fissuré avec des lèvres de fissure soumises à une distribution donnée de forces. Il se résout classiquement à l'aide de potentiels complexes suivant les techniques développées dans Muskhelishvili (1963). En notant $q(x_1)$ la répartition des contraintes normales exercées sur les lèvres de la fissure, $x_1 \in (-\ell_a, +\ell_a)$:

$$q(x_1) = \begin{cases} \sigma_\infty, & \text{si } |x_1| < \ell_0 \\ \sigma_\infty - \sigma_c, & \text{si } \ell_0 < |x_1| < \ell_a \end{cases}, \quad [10]$$

le FIC à la pointe ℓ_a s'écrit :

$$K_I(\ell_a) = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell_a}} \int_{-\ell_a}^{+\ell_a} q(x_1) \sqrt{\frac{x_1 + \ell_a}{\ell_a - x_1}} dx_1. \quad [11]$$

3.2. Phase d'amorçage

Si l'on prend $\ell_a = \ell_0$, alors, comme $q(x_1) = \sigma_\infty$, on trouve $K_I(\ell_0) > 0$ dès lors que $\sigma_\infty > 0$, ce qui signifie que les contraintes sont singulières dans la réponse élastique de la structure initiale dès la mise en charge. Autrement dit, ici la charge d'amorçage est nulle :

$$\sigma_a = 0.$$

Pour que la condition [4] soit vérifiée, il faut donc qu'une zone d'amorçage se développe dès la mise en charge. Sa longueur s'obtient en écrivant que $K_I(\ell_a) = 0$. On obtient :

$$\ell_a = \frac{\ell_0}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}\right)}. \quad [12]$$

Le graphe représentant la charge appliquée σ_∞ en fonction de la position de la pointe d'amorçage ℓ_a est tracé figure 3. On voit que la charge croît de 0 à σ_c quand la zone cohésive croît de ℓ_0 à l'infini.

Ces expressions ne sont valables que dans la phase d'amorçage, *i.e.* tant que l'ouverture en $x_1 = \ell_0$ n'atteint pas la valeur critique δ_c . Or la valeur de cette ouverture est donnée par :

$$\llbracket u_2 \rrbracket(\ell_0) = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\sigma_c}{E} \ln\left(\frac{\ell_a}{\ell_0}\right) \ell_0 \quad [13]$$

ou encore en utilisant [12] :

$$[[u_2]](\ell_0) = -\frac{8(1-\nu^2)\sigma_c}{\pi E} \ln \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}\right) \ell_0. \quad [14]$$

La charge de rupture s'obtient donc en écrivant que $[[u_2]](\ell_0) = \delta_c$, d'où :

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\exp\left(-\frac{\lambda_c}{\ell_0}\right)\right) \sigma_c \quad [15]$$

où λ_c est la longueur caractéristique du matériau qui se déduit de l'ouverture critique δ_c et des constantes matérielles par :

$$\lambda_c \equiv \frac{\pi}{8(1-\nu^2)} \frac{E}{\sigma_c} \delta_c. \quad [16]$$

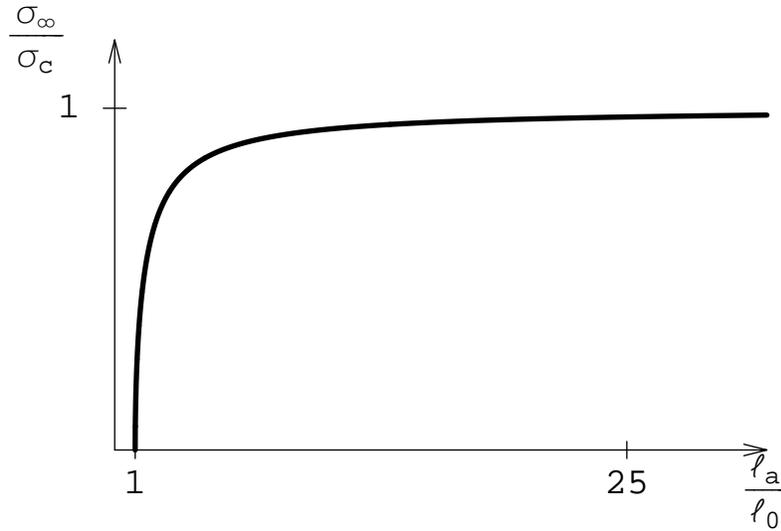


Figure 3. Relation entre la charge appliquée et la position de la zone cohésive lors de la phase d'amorçage

3.3. Phase de propagation

Lors de la phase de propagation, la position des pointes ℓ_c et ℓ_a doivent vérifier [9]. La répartition de la contrainte normale sur les lèvres de la fissure s'écrit maintenant :

$$q(x_1) = \begin{cases} \sigma_\infty, & \text{si } |x_1| < \ell_c \\ \sigma_\infty - \sigma_c, & \text{si } \ell_c < |x_1| < \ell_a \end{cases}. \quad [17]$$

La relation entre ℓ_a et ℓ_c s'obtient en écrivant que $K_I(\ell_a) = 0$, d'où :

$$\ell_a = \frac{\ell_c}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}\right)}. \quad [18]$$

La relation entre la charge appliquée σ_∞ et la position de la pointe ℓ_c s'obtient en écrivant que $[[u_2]](\ell_c) = \delta_c$, d'où :

$$\sigma_\infty = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\exp\left(-\frac{\lambda_c}{\ell_c}\right)\right) \sigma_c \quad [19]$$

et en tenant compte de [18] la relation entre σ_∞ et ℓ_a devient :

$$\ell_a = \frac{\lambda_c}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}\right) \left| \ln \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}\right) \right|}. \quad [20]$$

On voit donc que l'on doit diminuer la charge si l'on veut que la propagation de la pointe soit stable et vérifie l'ensemble des relations [8]. Ceci signifie que la charge de rupture σ_r est en fait la charge limite que peut supporter la structure. La figure 4 représente dans un diagramme $\sigma_\infty - \ell_a$ l'évolution de la fissuration avec la charge à partir des relations [2] et [20] obtenues pour chaque phase. On notera que la longueur interne δ_c n'intervient que dans la phase de propagation (et donc évidemment dans la charge de rupture). La phase de propagation est représentée pour $\ell_0 = \lambda_c$, la charge de rupture valant alors $\sigma_r = 0.76 \sigma_c$.

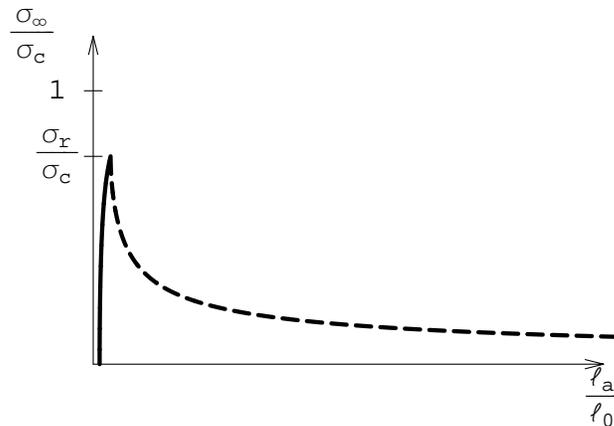


Figure 4. Relation entre la charge appliquée et la position de la zone cohésive : En trait plein, lors de la phase d'amorçage, en pointillés lors de la phase de propagation

3.4. Charge de rupture

La dépendance de la charge de rupture selon la taille de la fissure initiale est donnée par [15] et est représentée graphiquement dans la figure 5. On voit que la charge de rupture dépend en fait de façon essentielle du rapport entre la longueur ℓ_0 du défaut initial et la longueur caractéristique λ_c du matériau : plus la taille relative du défaut est petite et plus la charge de rupture se rapproche de la contrainte critique σ_c du matériau. Et ce, bien qu'il y ait amorçage d'une nouvelle fissure dès la mise en charge. On peut donc en conclure qu'avec la loi de fissuration de Dugdale, la plaque (qui peut aussi être vue comme un volume élémentaire représentatif du matériau) est pratiquement insensible aux défauts initiaux de petite taille de type fissure.

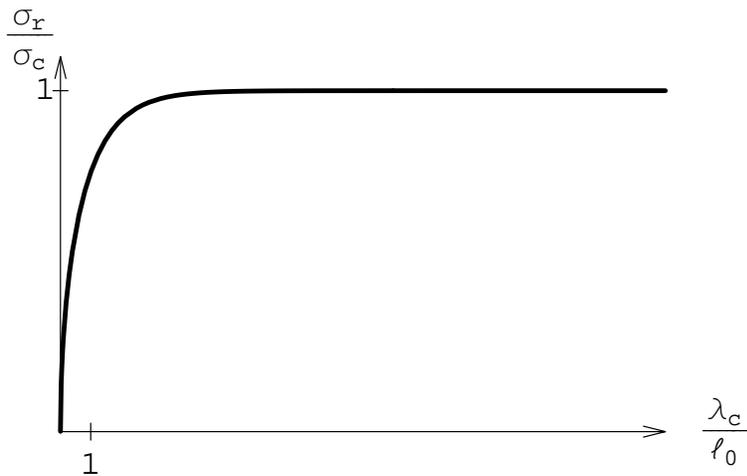


Figure 5. Dépendance de la charge de rupture avec la taille relative de la fissure initiale

4. Cas d'une cavité circulaire

4.1. Données du problème

Le défaut initial est ici une cavité circulaire de rayon ℓ_0 centrée en $(0, 0)$, cf. figure 6. Le domaine troué est maillé par des éléments finis triangulaires à 3 nœuds (pour des raisons de symétrie, seul un quart du domaine est maillé). Pour des facilités de mise en œuvre numérique, nous avons choisi d'étudier l'influence de l'effet d'échelle, *i.e.* du rapport λ_c/ℓ_0 , en gardant un rayon constant du trou et en faisant varier l'ouverture critique δ_c . Les dimensions de la plaque sont 20×20 mm, *i.e.* $L = 10$ mm, le rayon du trou est de 1 mm, *i.e.* $\ell_0 = 1$ mm.

Dans les applications numériques, on choisit pour les données matériau celles d'un polymère PMMA :

$$\sigma_c = 72 \text{ MPa}, E = 3000 \text{ MPa}, \nu = 0.36.$$

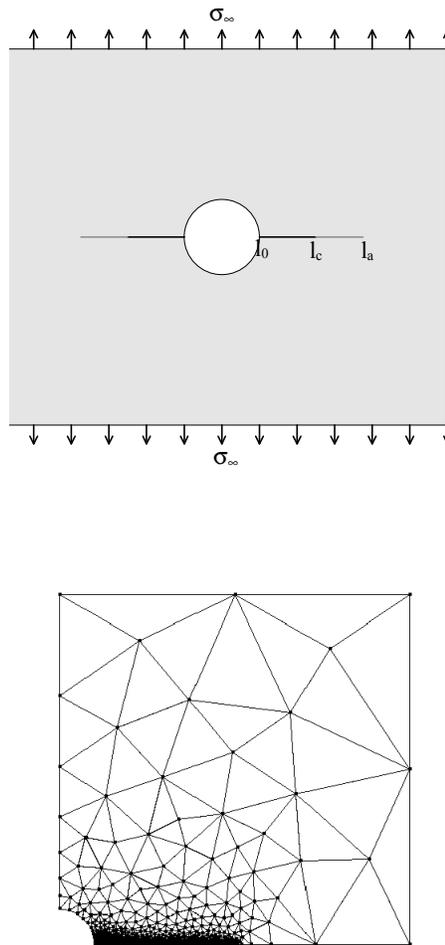


Figure 6. Géométrie de la plaque trouée avec les zones cohésive et non cohésive

4.2. Charge d'amorçage

On commence par faire un calcul purement élastique pour déterminer la charge d'amorçage σ_a , *i.e.* la charge σ_∞ à partir de laquelle la plus grande contrainte principale atteint la valeur critique σ_c en un point de la structure. Pour des raisons évidentes de symétrie et de conditions aux limites, la concentration de contraintes a lieu au bord du trou, aux points $(x_1 = \pm \ell_0, x_2 = 0)$. Si la plaque était de dimension infinie, la contrainte σ_{22} en ces points serait exactement égale à $3\sigma_\infty$ et la charge d'amorçage serait de ce fait exactement égale à $\sigma_c/3 = 24$ MPa. En raison des dimensions finies de la plaque et des approximations numériques, la charge d'amorçage calculée σ_a est égale à 22.2 MPa.

4.3. Phase d'amorçage

Une zone cohésive apparaît et s'étend si l'on augmente la charge au-delà de σ_a . La longueur de cette zone est telle que la singularité des contraintes au point ℓ_a soit nulle et donc que le facteur d'intensité des contraintes $K_I(\ell_a) = 0$. D'un point de vue numérique, cela nécessiterait d'itérer sur la valeur de ℓ_a et de calculer, à chaque itération, la valeur de $K_I(\ell_a)$, les itérations finissant lorsque l'on a approximativement trouvé la valeur de ℓ_a annulant le K_I . Le calcul du K_I pouvant se révéler imprécis, on a opté pour une autre stratégie numérique basée sur l'interprétation cinématique du K_I . Comme K_I est proportionnel à la discontinuité du déplacement normal au voisinage de la pointe de la fissure, cf. Bui (1978), chercher la position ℓ_a telle que K_I soit nul revient pratiquement à chercher la position ℓ_a telle que l'ouverture $[[u_2]]$ au nœud le plus proche soit approximativement nulle. De plus tant que la zone cohésive est trop courte, *i.e.* tant que ℓ_a est trop faible, le F.I.C. est strictement positif, alors que quand la zone cohésive est trop longue, *i.e.* dès que ℓ_a est trop grande, le F.I.C. devient strictement négatif. Il suffit donc de déterminer, en itérant sur ℓ_a , la valeur de ℓ_a à partir de laquelle l'ouverture du nœud voisin change de signe. En résumé, pour déterminer la position de la zone cohésive (pour une valeur du chargement σ_∞ donnée) on procède comme suit :

- 1) on itère sur la valeur de ℓ_a en partant de la valeur obtenue au pas précédent ;
- 2) on calcule l'ouverture $[[u_2]]$ au nœud du maillage le plus proche de la pointe ℓ_a .
- 3) si cette ouverture est positive, alors on incrémente ℓ_a et on arrête les itérations quand elle est devenue négative.

4.4. Charge de rupture

Pour déterminer la charge de rupture, pour une longueur caractéristique λ_c donnée, on procède de la façon suivante :

- 1) on itère sur la valeur de σ_∞ en partant de σ_a ;

2) on détermine la valeur de ℓ_a correspondante en suivant le procédé itératif décrit dans le paragraphe précédent de façon à ce que $K_I(\ell_a) = 0$. Si jamais il n'existe pas de telle valeur de ℓ_a , *i.e.* si la zone cohésive fait toute la largeur de la plaque, alors la charge actuelle σ_∞ est prise comme la charge de rupture.

3) si $\ell_a < L$, alors on calcule l'ouverture $\llbracket u_2 \rrbracket$ au point ℓ_0 ;

4) si cette ouverture est inférieure à δ_c , alors on incrémente la charge σ_∞ et on arrête les itérations dès que $\llbracket u_2 \rrbracket(\ell_0)$ dépasse δ_c . La valeur actuelle de σ_∞ est la charge de rupture σ_r .

Ce procédé itératif est suivi pour chaque valeur de λ_c . Les valeurs numériques calculées sont représentées dans la figure 7 dans un diagramme $\sigma_r - \lambda_c$.

Comme attendu, la charge de rupture est une fonction croissante de λ_c , mais on notera que la charge de rupture n'atteint jamais la valeur σ_c quelle que soit la valeur de λ_c . C'est dû au caractère fini des dimensions de la plaque. En effet, en utilisant un raisonnement élémentaire de calcul à la rupture, il est facile de voir que la plaque trouée ne peut pas supporter une charge plus grande que $(1 - \frac{\ell_0}{L})\sigma_c$ qui correspond à la charge d'équilibre de la plaque lorsque la zone cohésive occupe toute la largeur $\Gamma_a = (-L, -\ell_0) \times (\ell_0, L)$. Compte tenu des valeurs numériques choisies, la charge de rupture ne peut donc dépasser $0.9 \sigma_c$. On voit que cette valeur est pratiquement atteinte lorsque $\lambda_c = 3\ell_0$. Notons enfin que si l'on faisait tendre la longueur du défaut vers 0 ou la largeur de la plaque vers l'infini, alors la charge de rupture tendrait vers σ_c .

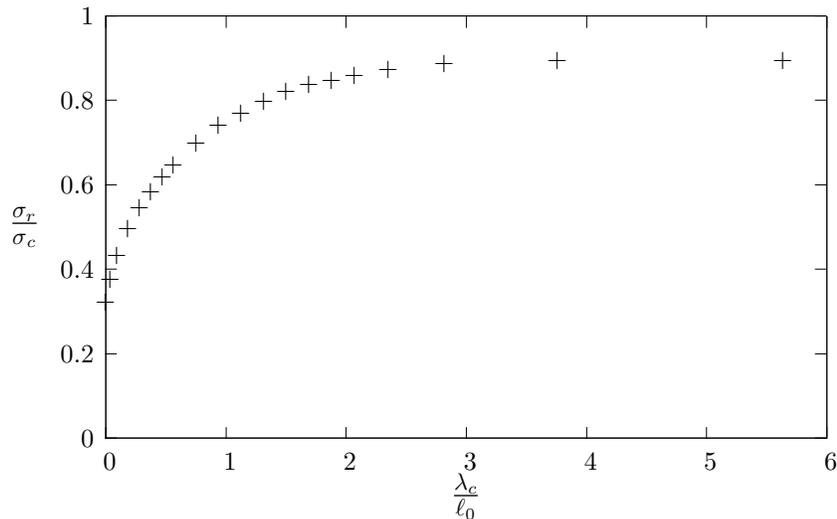


Figure 7. Dépendance de la charge de rupture avec la taille relative de la fissure initiale

4.5. Phase de propagation

Pour vérifier que le σ_r obtenu précédemment est bien la charge limite de la structure trouée pour une longueur caractéristique donnée, on fait des calculs de la phase de propagation en se donnant la position de la zone cohésive. Plus précisément, le procédé itératif de détermination de la charge σ_∞ équilibrant la structure fissurée avec la pointe de la zone cohésive en ℓ_a est le suivant :

- 1) λ_c est fixé ;
- 2) on incrémente ℓ_a (en partant de ℓ_0) ;
- 3) on incrémente σ_∞ (en partant de 0) ;
- 4) on détermine la pointe de la zone non cohésive ℓ_c de façon à ce que $K_I(\ell_a) = 0$, en procédant comme dans la phase d'amorçage (la valeur de ℓ_c obtenue dépend de ℓ_a et de σ_∞) ;
- 5) on calcule l'ouverture $[[u_2]](\ell_c)$;
- 6) si cette ouverture est inférieure à δ_c , on va en 3 (pour augmenter σ_∞). Si cette ouverture est supérieure à δ_c , on garde cette valeur de σ_∞ et on continue ;
- 7) on revient en 2 jusqu'à ce que ℓ_a atteigne le bord de la plaque, *i.e.* $\ell_a = 20$ mm.

On obtient finalement ainsi σ_∞ en fonction de ℓ_a pour un λ_c donné. Lorsque $\ell_c = \ell_0$ on a évidemment $\sigma_\infty = \sigma_r$. Il s'avère que dans tous les tests effectués σ_∞ est une fonction *décroissante* de ℓ_a , ce qui prouve bien que σ_r est une charge limite et donc la charge de rupture de la structure trouée. À titre d'exemple, on a représenté sur la figure 8 la relation entre σ_∞ et ℓ_a pour une valeur de δ_c de 0.01 mm, la charge de rupture valant $0.450 \sigma_c$.

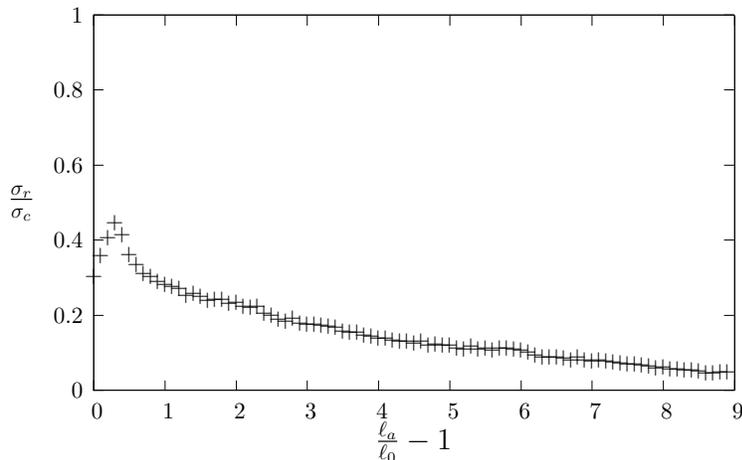


Figure 8. Relation entre la charge et la longueur de la fissure

5. Conclusion

En comparant les réponses obtenues pour la plaque fissurée et la plaque trouée, on voit que la charge d'amorçage est très sensible à la forme du défaut, mais pas à sa taille. Elle est nulle dans le cas d'une fissure et pratiquement égale au tiers de la contrainte critique du matériau pour un trou circulaire. Par contre, la charge limite de la structure est très sensible à la taille du défaut, mais peu à sa forme. De plus, on voit que plus le défaut est petit, la longueur de référence étant la longueur caractéristique du matériau introduite dans le modèle de Dugdale, plus la charge limite se rapproche de la contrainte critique du matériau. Autrement dit, ceci semble indiquer que les défauts de petite taille ont peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure si l'on adopte le modèle de Dugdale. Il serait évidemment intéressant de généraliser ce résultat à n'importe quel type de défaut, n'importe quel type de structure et n'importe quel modèle de force cohésive. Cela nécessitera le développement d'outils théoriques et numériques adaptés. Mais on peut considérer que les deux cas traités, extrêmes de par la forme du défaut choisie, sont un gage du caractère générique du résultat.

Remerciements

Ce travail a été partiellement effectué avec le soutien financier de l'OTAN dans le cadre de l'accord PST.MD.CLG 980960.

6. Bibliographie

- Barenblatt G. I., "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture", *Adv. Appl. Mech.*, vol. 7, 1962, p. 55-129.
- Bourdin B., Francfort G. A., Marigo J.-J., "Numerical experiments in revisited brittle fracture", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, n° 4, 2000, p. 797-826.
- Bui H. D., *Mécanique de la Rupture Fragile*, Masson, Paris, 1978.
- Chaboche J. L., Girard R., Levasseur P., "On the interface debonding models.", *Int. J. Damage Mech.*, vol. 6, 1997, p. 220-257.
- Charlotte M., Francfort G., Marigo J.-J., Truskinovsky L., "Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models", in A. Benallal (ed.), *Proceedings of the Symposium on "Continuous Damage and Fracture"*, Elsevier, Paris, 2000, p. 7-12.
- Del Piero G., "One-dimensional ductile-brittle transition, yielding, and structured deformations", *Variations of domain and free-boundary problems in solid mechanics (Paris, 1997)*, vol. 66 of *Solid Mech. Appl.*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, p. 203-210.
- Del Piero G., Truskinovsky L., "Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, n° 6, 2001, p. 1135-1138.
- Francfort G. A., Marigo J.-J., "Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 46, n° 8, 1998, p. 1319-1342.

- Griffith A. A., "The phenomena of rupture and flow in solids", *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, vol. CCXXI-A, 1920, p. 163-198.
- Irwin G. R., "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, vol. 24, 1957, p. 361-364.
- Laverne J., Marigo J.-J., « Approche globale, minima relatifs et Critère d'Amorçage en Mécanique de la Rupture », *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 332, 2004, p. 313-318.
- Marigo J.-J., Truskinovsky L., "Initiation and propagation of fracture in the models of Griffith and Barenblatt", *Contin. Mech. Thermodyn.*, vol. 16, n° 4, 2004, p. 391-409.
- Muskhelishvili N. I., *Some basic problems of mathematical theory of elasticity*, 2nd ed., P. Noordhoff Ltd, Groningen, 1963.
- Salençon J., *Calcul à la rupture et analyse limite*, Cours de Calcul des Structures Anélastiques, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.

