
Etude dynamique linéaire et non linéaire d'une poutre couplée avec un fluide

Jean-François Sigrist* — Christian Lainé* — Bernard Peseux**

* *Service Scientifique et Technique*
DCN Propulsion, F-44620 La Montagne
jean-francois.sigrist@dcn.fr

** *GéM. Equipe Structures et Couplages*
Ecole Centrale de Nantes, F-44321 Nantes cedex

RÉSUMÉ. Nous proposons dans cet article une étude dynamique d'une poutre élastique couplée avec un fluide incompressible, contenu dans une cavité cylindrique et présentant une surface libre. Dans un premier temps, nous conduisons une analyse modale du système couplé, en mettant en œuvre une technique éléments finis basée sur une description en déplacement de la structure et en pression du fluide. Une étude numérique permet de décrire les effets du couplage fluide/structure. Dans un second temps, on s'intéresse au problème temporel en formulant les équations dynamiques au second ordre de la poutre couplée avec le fluide, l'ensemble du système étant soumis à une accélération donnée. L'intégration en temps du problème utilise un algorithme implicite, nécessitant le calcul de la matrice tangente du problème. Une étude numérique est ensuite exposée et met en évidence l'apparition des non-linéarités avec l'augmentation de l'amplitude de la sollicitation dynamique appliquée à l'ensemble. Une étude de l'influence respective des non-linéarités et des interactions fluide/structure sur la dynamique du problème est exposée.

ABSTRACT. This paper deals with dynamic study of an elastic beam coupled to an incompressible fluid with free surface. To begin with, a modal analysis of the coupled fluid-structure problem by finite element coupling is carried out. Fluid-structure interaction effects are highlighted. Then, a dynamic analysis is performed, using a non-linear model in which the geometric non-linearity due to the axial force generated by stretching of the middle surface is taken into account. The coupled fluid-structure system is subjected to an imposed transverse acceleration. The problem is solved with a finite element method with a non-linear implicit scheme, the fluid effects are taken into account with an added mass operator which is discretised with a finite element technique. A numerical study is then carried out and shows the effect of geometrical non linearity as the imposed acceleration amplitude is increased. A comparison of non-linear behavior with fluid coupling is then investigated.

MOTS-CLÉS : couplage fluide/structure, couplage éléments finis/éléments finis, analyse modale, analyse temporelle non linéaire, couplage de modes, masse ajoutée.

KEYWORDS: fluid-structure interaction, finite element coupling, modal analysis, non linear temporal analysis, mode coupling, added mass.

1. Introduction

On s'intéresse dans le présent article à l'étude dynamique d'une poutre élastique couplée avec un fluide, l'ensemble étant soumis à une accélération transversale de durée et d'amplitude données. Le problème étudié est représenté de façon schématique par la figure 1. Il s'agit d'une poutre verticale de section circulaire, encastree à une extrémité, libre à l'autre, partiellement immergée dans un fluide lourd incompressible, contenu dans une cavité cylindrique rigide. Des études précédentes ont été menées sur le problème générique d'étude, dans le cas d'une approche linéaire de la structure et du fluide, avec ou sans surface libre (Sigrist *et al.*, 2003, Sigrist *et al.*, 2004) ; la présente étude propose une extension au cas non linéaire du problème structure.

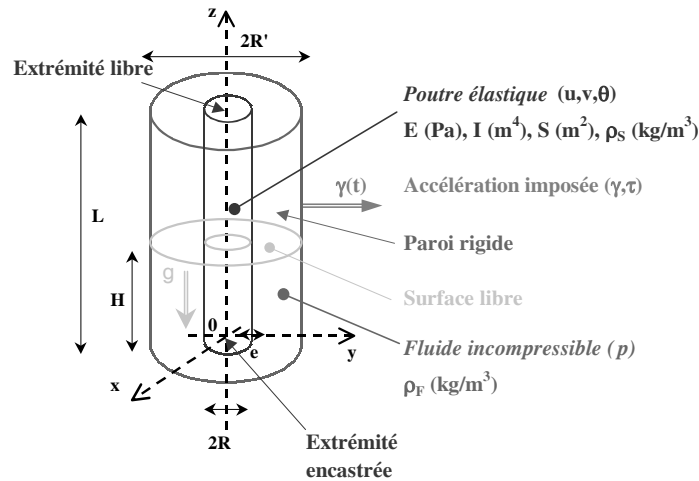


Figure 1. Problème couplé fluide structure : poutre élastique encastree/libre couplée avec un fluide limité par une cavité cylindrique, avec surface libre

L'étude proposée s'inscrit dans le cadre général de modélisation problèmes d'interactions fluide/structure pour lesquels il existe une littérature abondante (Makerle, 1999) et pour lesquels les méthodes numériques sont bien connues et formalisées (Morand Ohayon, 1995). Cependant, la très grande majorité des études référencées s'intéressent à l'analyse modale de systèmes couplés fluide/structure, et l'étude de problèmes transitoires reste relativement rare. Un exemple récent d'analyse transitoire est cependant proposé dans (Larbi *et al.*, 2005), en formulation non symétrique (\mathbf{u}, p) , dans le cas d'un fluide contenu dans une structure élastique. On considère dans notre étude un problème couplé formulé en pression/déplacement, où la structure est non linéaire et couplée avec un fluide externe et borné, avec surface libre, l'ensemble du système étant soumis à une

sollicitation dynamique, ce qui constitue un cas générique n'ayant pas fait l'objet d'études exhaustives en transitoire.

On propose dans cette étude de déterminer la base modale du système couplé et de caractériser la réponse du système couplé en dynamique. Les calculs proposés serviront de cas de référence pour le développement de procédures de couplage faible entre un code fluide et un code structure (Sigrist *et al.*, 2005).

Les équations du problème modal sont rappelées, ainsi que les équations non linéaires du problème temporel, écrites dans le référentiel relatif lié au système en translation. La discrétisation en espace utilise une méthode éléments finis pour le problème fluide (formulé en pression) et pour le problème structure (formulé en déplacement). Le couplage fluide/structure est décrit par un opérateur de masse ajoutée, dont on rappelle l'expression. Dans l'analyse modale, le problème aux valeurs propres est non symétrique ; il est résolu à l'aide de l'algorithme de Lanczos non symétrique. Dans le problème temporel, l'intégration du système différentiel matriciel non linéaire obtenu est conduite à l'aide de l'algorithme de Newmark non linéaire, qui nécessite le calcul de la matrice tangente du système.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la détermination des modes propres du système couplé, en mettant en évidence les phénomènes gouvernant le couplage fluide/structure dans le cas étudié (phénomène de masse ajoutée et de couplage de modes). La formulation mathématique du problème permet de mettre en évidence le couplage possible entre les modes de structure hydroélastiques et les modes fluide de ballotement. Le nombre de Froude dynamique construit à partir des données géométriques du problème permet de quantifier l'importance du phénomène.

Dans un second temps, on s'intéresse au comportement dynamique du système couplé, lorsque ce dernier est soumis à une sollicitation de type « choc », définie par

$$\text{son profil d'accélération temporelle } \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_o \times \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } \tau < t \end{cases} \text{ avec } \gamma_o$$

l'amplitude maximale et τ la durée du choc. Une étude numérique est d'abord conduite sur la structure seule et permet de mettre en évidence les effets des non-linéarités géométriques. Pour un temps de choc τ fixé, les non-linéarités apparaissent avec l'augmentation de l'amplitude du choc γ_o . Le couplage avec le fluide se traduit par une diminution de la fréquence propre du système (effet de masse d'eau ajoutée) et par une diminution du déplacement sous choc (effet de masse d'eau déplacée) ; le comportement linéaire et non linéaire de la structure en présence de fluide est étudié pour différents niveaux d'accélération γ_o , en comparant les effets non linéaires et les effets du couplage fluide/structure.

2. Analyse modale

2.1. Equations du problème

Les équations du problème couplé sont formulées dans l'espace des fréquences, en utilisant une formulation en déplacement pour la structure et en pression pour le fluide.

Les équations du problème structure sont celles d'une poutre en flexion, avec les hypothèses de Bernouilli (Gibert, 1986). L'équation locale est ainsi :

$$-\omega^2 \rho_s S \times \hat{v}(\omega) + EI \frac{\partial^4 \hat{v}(\omega)}{\partial z^4} = \hat{\phi}_h(\omega) \quad [1]$$

avec $\hat{v}(\omega)$ déplacement transverse de la poutre (dans la direction du choc) et $\hat{\phi}_h(\omega)$ la répartition d'efforts linéiques fluide dans la direction transverse. L'équation locale [1] est assortie des conditions aux limites pour l'extrémité encastree en $z = 0$ et l'extrémité libre en $z = L$:

$$\hat{v}|_{z=0} = 0 \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial z}|_{z=0} = 0 \quad \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2}|_{z=L} = 0 \quad \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial z^3}|_{z=L} = 0 \quad [2]$$

Les équations du problème fluide sont celles d'un fluide parfait incompressible. L'équation locale s'écrit (Morand Ohayon, 1995) :

$$\Delta \hat{p}(\omega) = 0 \quad [3]$$

avec les conditions aux limites traduisant la présence de parois rigides (paroi latérale en $r = R'$, fond en $z = 0$) :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z}|_{z=0} = 0 \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial r}|_{r=R'} = 0 \quad [4]$$

La condition de surface libre prend en compte les petites élévations de niveau fluide et s'écrit :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z}|_{z=H} = \frac{\omega^2}{g} \hat{p}|_{z=H} \quad [5]$$

Les conditions de couplage des deux problèmes s'écrivent :

$$\hat{\phi}_h(\omega) = - \int_0^{2\pi} \hat{p}(R, \theta, z, \omega) R \cos \theta d\theta \quad [6]$$

$$\left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right|_{r=R} = \omega^2 \rho_f v(\omega) \cos \theta \quad [7]$$

L'équation [6] donne le calcul des efforts de pression sur une tranche cylindrique de la poutre à une cote z donnée. L'équation [7] traduit la continuité de l'accélération normale au niveau de l'interface fluide/structure.

2.2. Résolution numérique. Formulation du problème aux valeurs propres

La discrétisation du problème structure utilise des éléments finis poutre à deux nœuds et deux degrés de liberté par nœud $v_i, \theta_i = \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z_i}$ (voir figure 2), avec des fonctions d'interpolation cubique. Les matrices élémentaires du problème structure sont alors calculées analytiquement (Dubigeon, 1998).

Compte tenu de la géométrie du problème fluide et de la condition de couplage avec le problème structure, on utilise une représentation de l'inconnue p sous forme d'un développement en série de Fourier, ce qui permet de ramener la résolution du problème couplé dans le plan (r, z) , comme représenté par la figure 2. Le développement fait apparaître les termes axisymétriques $p_0(r, z)$, les termes symétriques $p_n(r, z)$ ¹ et les termes antisymétriques $p_m(r, z)$ (Morand Ohayon, 1995) :

$$p(r, \theta, z) = p_0(r, z) + \sum_{n \geq 1} p_n(r, z) \cos(n\theta) + \sum_{m \geq 1} p_m(r, z) \sin(m\theta) \quad [8]$$

On discrétise le problème fluide avec des éléments finis à quatre nœuds et un degré de liberté par nœud $p_{i,j}$ (voir figure 2), avec des fonctions de forme linéaires définies sur l'élément fluide pour tout nœud $e \in [1,4]$:

$$N_e^F(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi_e \xi)(1 + \eta_e \eta)}{4} \quad [9]$$

avec ξ_e, η_e les coordonnées locales du nœud e .

1. Compte tenu de la condition de couplage avec la structure donnée par l'équation [7], on s'intéressera aux modes fluide symétriques d'ordre $n = 1$.

Sur chaque élément fini fluide, on définit ainsi une matrice masse et raideur élémentaire, obtenue à partir de la formulation faible de Galerkin du problème fluide. Ces matrices sont notées respectivement par : \mathbf{m}^F et $\mathbf{k}^F = \mathbf{k}'^F + n^2 \mathbf{k}''^F$, où n est l'ordre de l'harmonique dans le développement donné par l'équation [8]. Les matrices \mathbf{m}^F , \mathbf{k}'^F et \mathbf{k}''^F sont données respectivement par (Peseux, 1989, Sigrist, 2004) :

$$\mathbf{m}_{ij}^F = \frac{a}{g} \left[r_0 + \frac{r_0 \xi_i \xi_j}{3} + \frac{a(\xi_i + \xi_j)}{3} \right] \times [(1 + \eta_i)(1 + \eta_j)] \quad [10]$$

$$\mathbf{k}'_{ij}{}^F = abr_0 \left[\frac{\xi_i \xi_j}{4a^2} (1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3}) + \frac{\eta_i \eta_j}{4a^2} (1 + \frac{\xi_i \xi_j}{3}) \right] + \frac{a^2 \eta_i \eta_j}{12b} (\xi_i + \xi_j) \quad [11]$$

$$\mathbf{k}''_{ij}{}^F = \frac{b}{8} \left[1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3} \right] \times \left[2(\xi_i + \xi_j) - \frac{2r_0 \xi_i \xi_j}{a} + \left(1 - \frac{r_0(\xi_i + \xi_j)}{a} + \frac{r_0^2 \xi_i \xi_j}{a^2} \right) \times \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \right) \right] \quad [12]$$

La discrétisation des termes de couplage fluide/structure met en évidence une matrice de couplage fluide/structure définie sur l'interface fluide/structure à partir des fonctions de forme fluide et structure et de la normale locale (*i.e.* sur les degrés de liberté en déplacement transversal de la poutre). Cette matrice a pour expression (Peseux, 1989) :

$$\mathbf{R} = \int_0^H \{N_F(z)\} \{N_S(z) \cdot \mathbf{n}\} dz \quad [13]$$

Avec les fonctions de forme utilisées, la matrice élémentaire de couplage fluide/structure s'exprime comme :

$$\mathbf{r} = \pi R \cdot \begin{bmatrix} 7l/20 & 0 & 0 & 3l/20 \\ l^2/20 & 0 & 0 & l^2/30 \\ 3l/20 & 0 & 0 & 7l/20 \\ -l^2/30 & 0 & 0 & -l^2/20 \end{bmatrix} \quad [14]$$

où l est la longueur de l'élément fini poutre.

La figure 2 donne une représentation du couplage des maillages structure 1D et fluide 2D axi-symétrique au niveau de l'interface fluide/structure dans le plan (r, z) . La technique de couplage sera utilisée également dans le cas du problème temporel, étudié au paragraphe 3.

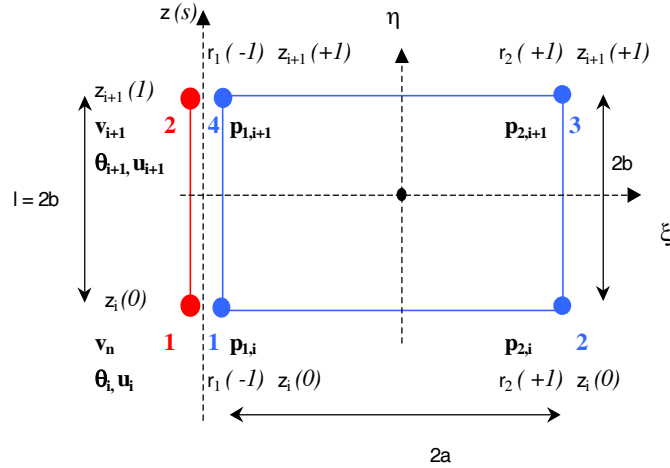


Figure 2. Couplage de la discrétisation structure avec une discrétisation fluide dans le plan (r, z) . Élément poutre 1D couplé avec un élément fluide 2D axi-symétrique

Compte tenu de ces éléments, la formulation du problème couplé est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{V}}(\omega) \\ \hat{\mathbf{P}}(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R} & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{V}}(\omega) \\ \hat{\mathbf{P}}(\omega) \end{Bmatrix} \quad [15]$$

Cette formulation est non symétrique. Différents auteurs proposent des méthodes permettant d'obtenir une formulation symétrique du problème (Everstine, 1981, Ohayon Valid, 1983, Sandberg Goransson, 1988). On choisit de travailler avec la formulation non symétrique précédente : l'utilisation de l'algorithme de Lanczos non symétrique permet alors d'extraire les éléments propres du système couplé (Rajakumar Rogers, 1991).

On note $\langle \mathbf{P} \rangle = \langle \mathbf{P}_o, \mathbf{P}' \rangle$ le vecteur des inconnues nodales du problème fluide, en distinguant les valeurs nodales pour les points de la surface libre P_o et les valeurs nodales des autres points du maillage fluide P' . L'équation [15] s'écrit alors après partition :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}_o & \tilde{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F^o & \tilde{\mathbf{K}}_F^o \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT} & \tilde{\mathbf{K}}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{V}}(\omega) \\ \hat{\mathbf{P}}_o(\omega) \\ \hat{\mathbf{P}}'(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R}_o^T & \mathbf{M}_F^o & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{V}}(\omega) \\ \hat{\mathbf{P}}_o(\omega) \\ \hat{\mathbf{P}}'(\omega) \end{Bmatrix} \quad [16]$$

En éliminant la variable \mathbf{P}' dans l'équation [16], on peut écrire le problème couplé sous la forme condensée suivante (Sigrist, 2004) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}_o - \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_F^{oT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F^o - \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT}\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_F^o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{V}}(\omega) \\ \hat{\mathbf{P}}_o(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \rho_F \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^T & \mathbf{0} \\ -\rho_F(\mathbf{R}_o^T - \tilde{\mathbf{K}}_F^o\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^T) & \mathbf{M}_F^o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{V}}(\omega) \\ \hat{\mathbf{P}}_o(\omega) \end{Bmatrix} \quad [17]$$

2.3. Masse ajoutée et couplage de modes

L'équation [17] donne une formulation non symétrique du problème couplé, qui s'exprime uniquement en fonction des degrés de liberté en pression de la surface libre et les degrés de liberté en flexion de la poutre. Cette formulation fait apparaître les deux sous-problèmes suivants :

– modes propres de ballonnement du fluide, obtenus par résolution du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K}_o - \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT}\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_F^o) \times \hat{\mathbf{P}}_o(\omega) = \omega^2 \mathbf{M}_F^o \times \hat{\mathbf{P}}_o(\omega) \quad [18]$$

– modes propres de flexion de la poutre en présence de fluide incompressible sans prise en compte d'effets de surface libre (modes hydroélastiques), obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{K}_S \times \hat{\mathbf{V}}(\omega) = \omega^2 (\mathbf{M}_S + \rho_F \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^T) \times \hat{\mathbf{V}}(\omega) \quad [19]$$

Les modes hydroélastiques sont calculés à partir des caractéristiques de la structure et de la prise en compte du terme de masse de fluide ajoutée $\rho_F \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^T$, traduisant l'effet du fluide sur la dynamique structure.

La formulation [17] montre ainsi que la prise en compte des effets de surface libre dans le problème fluide/structure engendre un couplage entre les modes de ballonnement du fluide et les modes hydroélastiques de la structure. La matrice de couplage des deux sous-problèmes est $\mathbf{R}_o - \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_F^{oT}$.

L'importance du couplage peut être évaluée en fonction du nombre de Froude dynamique, construit à partir des caractéristiques physiques et géométriques du problème couplé (Axisa, 2001). La définition proposée dans notre cas pour ce nombre sans dimension est :

$$F_D = \frac{e}{R} \times \sqrt{\frac{E}{\rho_S g L}} \quad [20]$$

REMARQUE. — Les phénomènes de couplage sont également pilotés par les nombres sans dimension suivants, définis pour la géométrie étudiée : le nombre de masse

$M_A = \frac{\rho_S}{\rho_F}$, le ratio de confinement $\alpha = \frac{R'}{R}$ et le ratio de remplissage $\lambda = \frac{H}{L}$. Le nombre F_D est le rapport entre deux célérités caractéristiques : célérité des ondes élastiques de la structure $\sqrt{E/\rho_S}$ d'une part et célérité des ondes de ballonnement \sqrt{gL} d'autre part. Les effets de couplage de modes dépendent du rapport de ces deux grandeurs (De Langre, 2001). Ce terme est corrigé par le rapport d'aspect de la structure e/R qui tient compte du fait qu'on travaille sur un modèle de poutre, au facteur M_A près, le ratio e/R est le rapport entre la masse de structure et la masse de fluide déplacée par tranche.

Les tableaux 1 et 2 donnent les fréquences propres pour le système couplé fluide/structure dans le cas de deux nombres de Froude dynamique².

Fréquences (Hz)	f_1	f_2	f_3	f_4
Fluide sans structure	1.2905	2.8761	4.0789	5.1344
Structure sans fluide	34.71	217.49	608.98	1193.4
Structure avec fluide (sans ballonnement)	27.2966	136.706	404.423	869.101
Structure avec fluide (avec ballonnement)	27.3250	136.707	404.423	869.110

Tableau 1. Fréquences propres des problèmes fluide et structure couplés et découplés pour un nombre de Froude dynamique $F_D \sim 10$, nombre de masse $M_A = 8$, ratio de remplissage $\lambda = 75\%$

Dans le cas d'un grand nombre de Froude ($F_D \sim 10$), les modes structure hydroélastiques et les modes fluide de ballonnement sont assez éloignés. Le couplage des modes entre eux est négligeable : les fréquences propres des modes fluide de ballonnement (donnés par l'équation [18]) et des modes de structure hydroélastiques (donnés par l'équation [19]) ne varient quasiment pas après couplage complet (problème formulé par l'équation [17]). Une analyse découplée des deux problèmes peut être conduite (Cho Song, 2001). L'influence du fluide sur la structure se traduit

2. Les données géométriques et physiques du problème sont ajustées dans ce cas pour obtenir les nombres de Froude désirés. La géométrie du problème étant fixée, le passage de $F_D \sim 10$ à $F_D \sim 1$ se fait dans notre cas en ajustant la raideur du problème structure.

uniquement par l'effet de masse ajoutée : les fréquences propres des modes de structure hydroélastiques sont inférieures aux fréquences des modes élastiques.

Dans le cas d'un petit nombre de Froude ($F_D \sim 1$), les modes structure hydroélastiques et les modes fluide de ballonnement sont très proches. Le couplage se caractérise par une diminution de fréquence du mode structure couplé avec le fluide (par rapport à la fréquence du mode structure seule) moins importante que dans le cas précédent (abaissment de 21 % dans le cas $F_D \sim 10$ et de 10 % dans le cas $F_D \sim 1$). Dans ce cas, une analyse découpée des deux problèmes n'est plus valable.

Fréquences (Hz)	f_1	f_2	f_3	f_4
Fluide sans structure	1.2905	2.8761	4.0789	5.1344
Structure sans fluide	3.4705	21.7493	60.90	119.34
Structure avec fluide (sans ballonnement)	2.7297	13.6706	40.4423	86.9110
Structure avec fluide (avec ballonnement)	3.1352	13.6925	40.4485	86.9158

Tableau 2. Fréquences propres des problèmes fluide et structure couplés et découplés pour un nombre de Froude dynamique $F_D \sim 1$, nombre de masse $M_A = 8$, ratio de remplissage $\lambda = 75\%$

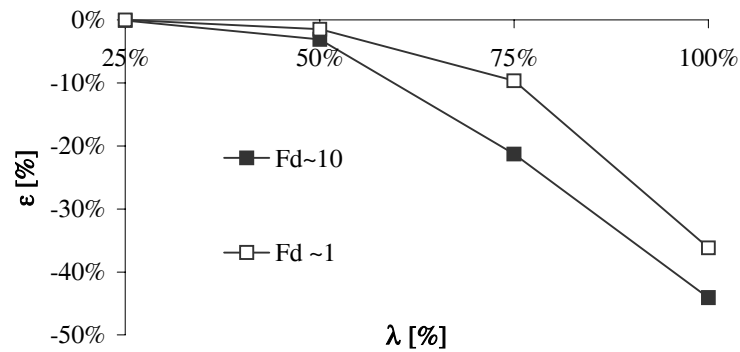


Figure 3. Evolution du ratio d'abaissement en fréquence ϵ pour le premier mode structure en fonction du ratio de remplissage λ pour $F_D \sim 1$ et $F_D \sim 10$ avec $M_A = 8$

La figure 3 donne l'évolution de l'abaissement en fréquence du premier mode de structure couplé avec fluide (avec prise en compte du ballonnement) en fonction du ratio de remplissage λ , ce qui permet de visualiser l'effet du couplage en basse fréquence : l'abaissement en fréquence est plus important pour un grand nombre de Froude dynamique.

Le tableau 3 montre l'influence du nombre de masse sur les phénomènes de couplage : les effets sont plus marqués pour un petit nombre de masse, mais les tendances observées entre deux nombres de Froude dynamique sont les mêmes (abaissement en fréquence moindre pour une structure en présence de fluide avec ballonnement pour des petits nombres de Froude).

ε [%]	$F_D \sim 1$	$F_D \sim 10$
$M_A \sim 1$	-41%	-62%
$M_A \sim 10$	-9%	-21%

Tableau 3. Abaissement en fréquence pour le premier mode structure en fonction du nombre de Froude dynamique F_D et du nombre de masse M_A (ratio de confinement $\alpha = 2$, ratio de remplissage $\lambda = 75$ %)

Le tableau 4 met en évidence l'influence du ratio de remplissage sur le couplage de modes. Les écarts d'abaissement en fréquence entre les deux situations de calcul (nombre de Froude dynamique grand ou petit) sont plus marqués pour un ratio de confinement petit. On vérifie là un phénomène physique classique de l'interaction fluide/structure : les effets de couplage sont amplifiés dans des situations de grand confinement (De Langre, 2001).

ε [%]	$F_D \sim 1$	$F_D \sim 10$
$\alpha = 2$	-9%	-21%
$\alpha = 5$	-13%	-18%

Tableau 4. Abaissement en fréquence pour le premier mode structure en fonction du nombre de Froude dynamique F_D et du ratio de confinement α (nombre de masse $M_A = 8$, ratio de remplissage $\lambda = 75$ %)

La figure 4 illustre le phénomène du couplage de modes entre les modes structure hydroélastiques et les modes fluide de ballonnement. Le couplage de mode se fait entre le premier mode poutre hydroélastique (2.7297 Hz) et le premier mode

fluide de ballonnement (2.8761 Hz) ; le mode couplé (3.1352 Hz) a une forme modale qui hérite des formes modales des deux modes découplés.

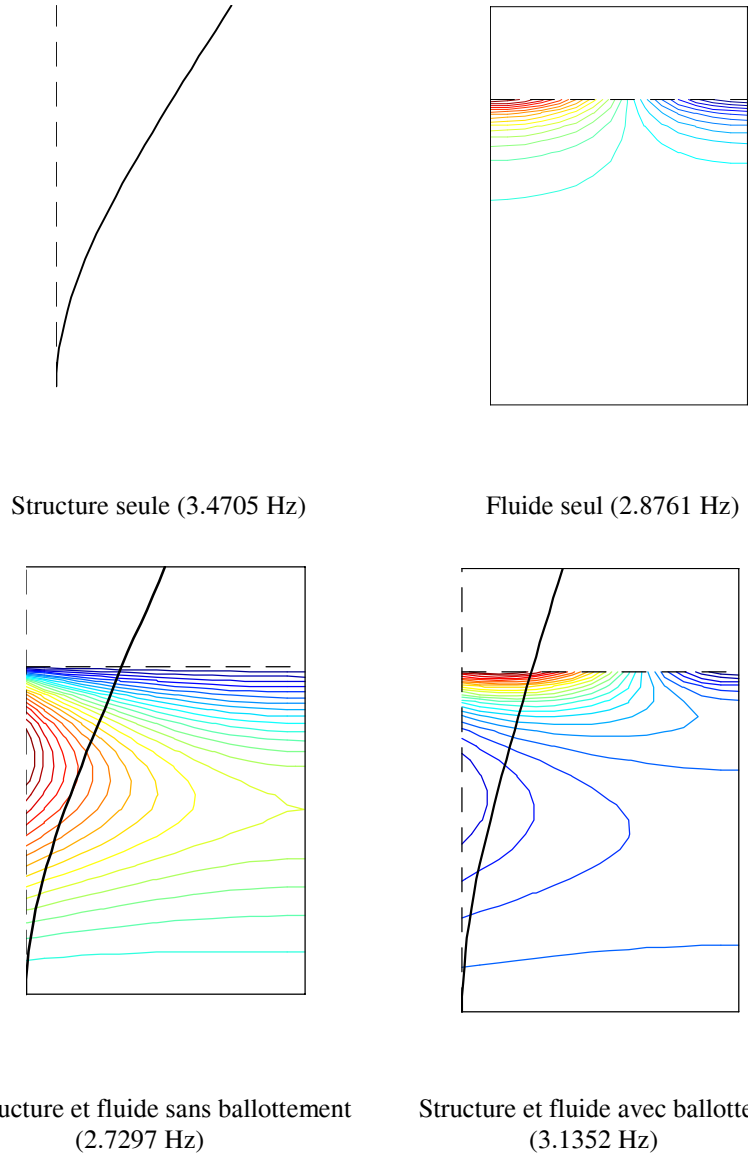


Figure 4. Illustration du couplage de modes ($F_D \sim 1$, $M_A = 8$, $\alpha = 2$, $\lambda = 75\%$). Représentation du comportement en flexion de la poutre et des iso-valeurs de pression pour le fluide dans le plan (r,z) pour $\theta = 0$, harmonique symétrique d'ordre $n = 1$

3. Analyse temporelle

3.1. Equations du problème

Dans le cadre de l'analyse temporelle, les équations du problème structure sont celles d'une poutre élastique prenant en compte les termes non linéaires décrivant l'effort axial généré par les déformations de la section médiane de la poutre (Washizu, 1982). Les équations dynamiques sont formulées dans le référentiel relatif et font apparaître un couplage entre les degrés de liberté en déplacement longitudinal u et transversal v ; ces équations sont formulées de la façon suivante :

– déplacement longitudinal

$$\rho_s S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ ES \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad [21]$$

– déplacement transversal

$$\rho_s S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ ES \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial z} \right\} = -\rho_s S \gamma - \int_0^{2\pi} p(R, \theta, z) R \cos \theta d\theta \quad [22]$$

Le comportement de la poutre élastique prend en compte la présence du fluide. La dynamique longitudinale n'est pas affectée par la présence du fluide ; la dynamique transversale tient compte des efforts de pression intégrés sur une tranche circulaire à z donné.

REMARQUE. — Les interactions fluide/structure sont formulées dans le cadre d'une approximation linéaire. En particulier, on néglige dans le calcul des efforts exercés par le fluide sur la structure la variation de la normale dans le champ de pression. Cette hypothèse revient à ne pas modéliser dans la présente étude les effets de raideur ajoutée par le fluide (Morand Ohayon, 1995). Ce point fera l'objet d'une étude ultérieure dans laquelle les effets des non-linéarités structure mis en évidence dans cet article seront comparés aux effets de non-linéarités fluide.

Les conditions aux limites données dans le paragraphe 2.1 pour le déplacement transverse (équation [3]) sont réécrites afin de tenir compte du déplacement longitudinal. Pour l'extrémité encastree, elles s'expriment :

$$u|_{z=0} = 0 \quad v|_{z=0} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0} = 0 \quad [23]$$

et pour l'extrémité libre :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right|_{z=L} = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=L} = 0 \quad \left. \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right|_{z=L} = 0 \quad [24]$$

Le problème fluide est régi par l'équation d'évolution de la pression :

$$\Delta p = 0 \quad [25]$$

avec les conditions aux limites (respectivement pour le fond rigide, la paroi extérieure rigide) :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R'} = -\rho_F \gamma \cos \theta \quad [26]$$

On néglige dans l'étude dynamique les phénomènes de surface libre³, la condition de surface libre est :

$$p|_{z=H} = 0 \quad [27]$$

La condition de couplage avec la structure déformable s'écrit :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = -\rho_F \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \right) \cos \theta \quad [28]$$

3.2. Discrétisation spatiale éléments finis

La méthode de discrétisation du problème structure est identique à celle proposée au paragraphe 2 et permet d'écrire le problème fluide dynamique discrétisé avec les matrices de masse et de raideur élémentaires définies par les équations [10] à [12].

La discrétisation du problème structure est également basée sur une technique éléments finis, que nous détaillons dans le cas du problème non couplé (*i.e.* en omettant dans le second membre de l'équation [22] le terme dû aux efforts de pression). La formulation variationnelle du problème est obtenue en multipliant les équations [21] et [22] par des fonctions test cinématiquement admissibles,

3. Compte tenu des caractéristiques physiques et géométriques du problème étudié dans cette analyse temporelle (voir ci-après), le nombre de Froude dynamique est très supérieur à l'unité. Ceci justifie l'hypothèse de représentation de la surface libre, d'après l'étude modale conduite au paragraphe précédent.

respectivement notées δu et δv , et en intégrant sur la longueur de la poutre. Après intégration par parties et prise en compte des conditions aux limites [23] et [24], on obtient la formulation intégrale suivante (Barshyam Prathap, 1972) :

$$\int_0^L \rho_s S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dz + \int_0^L ES \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \int_0^L \frac{ES}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial \delta u}{\partial z} dz = 0 \quad [29]$$

$$\int_0^L \rho_s S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v dz + \int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial z^2} dz + \int_0^L ES \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial z} dz = - \int_0^L \rho_s S \gamma \delta v dz \quad [30]$$

La discrétisation de la formulation variationnelle donnée par les équations [29] et [30] est réalisée au moyen des éléments finis poutre à deux nœuds et trois degrés de liberté par nœuds $u_i, v_i, \theta_i = \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_i$ (voir figure au paragraphe 2). L'interpolation des degrés de liberté en déplacement longitudinal et transversal s'écrit $u = \langle N_u \rangle \{U\}$ et $v = \langle N_v \rangle \{V\}$ avec des fonctions de forme linéaires pour u , et cubiques pour v , soit $N_u = \langle 1-s, s \rangle$ et $N_v = \langle 1-3s^2+2s^3, l(s-2s^2+s^3), 3s^2-2s^3, l(-s^2+s^3) \rangle$, avec $s \in [0,1]$ l'abscisse locale dans le référentiel de l'élément (Zienkiewicz, 1989).

La formulation variationnelle discrète (formulation faible de Galerkin) s'écrit alors de la façon suivante. Pour tout δU et δV , on a :

$$\begin{aligned} \langle \delta U \rangle \int_0^L \rho_s S \{N_u\} \langle N_u \rangle \{\ddot{U}\} dz + \langle \delta U \rangle \int_0^L ES \left\{ \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\} \{U\} dz + \\ \langle \delta U \rangle \int_0^L \frac{ES}{2} \left\{ \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\} \langle V \rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \{V\} dz = 0 \end{aligned} \quad [31]$$

et :

$$\begin{aligned} \langle \delta V \rangle \int_0^L \rho_s S \{N_v\} \langle N_v \rangle \{\ddot{V}\} dz + \langle \delta V \rangle \int_0^L EI \left\{ \frac{\partial^2 N_v}{\partial z^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 N_v}{\partial z^2} \right\} \{V\} dz + \\ \langle \delta V \rangle \int_0^L ES \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left[\left\{ \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\} \{U\} + \frac{1}{2} \langle V \rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \{V\} \right] \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \{V\} dz = \\ - \langle \delta V \rangle \int_0^L \rho_s S \gamma \{N_v\} dz \end{aligned} \quad [32]$$

On écrit ainsi le système matriciel :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}(t) \\ \dot{\mathbf{V}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_u(\mathbf{V}(t)) \\ \mathbf{R}_v(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Phi_v(t) \end{Bmatrix} \quad [33]$$

avec les matrices de masse données par $\mathbf{M}_u = \int_0^L \rho_s S \{N_u\} \langle N_u \rangle dz$,

$\mathbf{M}_v = \int_0^L \rho_s S \{N_v\} \langle N_v \rangle dz$, les matrices de raideur données par

$\mathbf{K}_u = \int_0^L ES \left\{ \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\rangle dz$ et $\mathbf{K}_v = \int_0^L EI \left\{ \frac{\partial^2 N_v}{\partial z^2} \right\} \left\langle \frac{\partial^2 N_v}{\partial z^2} \right\rangle dz$, le terme de

chargement donné par $\Phi_v = - \int_0^L \rho_s S \gamma \{N_v\} dz$. Les termes linéaires se calculent de

façon analytique avec les fonctions de formes choisies (Dubigeon, 1998). Les termes non linéaires s'écrivent :

$$\mathbf{R}_u(\mathbf{V}) = \int_0^L \frac{ES}{2} \left\{ \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\} \langle V \rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\rangle \{V\} dz \quad [34]$$

$$\mathbf{R}_v(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_0^L ES \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left[\left\langle \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\rangle \{U\} + \frac{1}{2} \langle V \rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\rangle \{V\} \right] \left\langle \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\rangle \{V\} dz \quad [35]$$

3.3. Intégration temporelle : algorithme implicite non linéaire

Le système dynamique matriciel non linéaire s'écrit sous la forme générale :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{X}(t)) = \Phi(t) \quad [36]$$

L'intégration temporelle de ce système est conduite avec une méthode implicite non linéaire (Bathe Wilson, 1976, Hughes Belytschko, 1983). Le schéma numérique utilisé est le schéma de (Newmark, 1954, Subbaraj, Dokainish, 1989), basé sur les approximations suivantes de l'accélération et de la vitesse :

$$\ddot{\mathbf{X}}_{n+1} = \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{\beta \delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_n}{\beta \delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_n \quad [37]$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{n+1} = \dot{\mathbf{X}}_n + \delta t \left[\gamma \ddot{\mathbf{X}}_{n+1} + (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_n \right] \quad [38]$$

avec $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}(t_{n+1})$, $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}(t_n)$.

En reportant dans l'équation du mouvement, on établit l'équation implicite suivante, dont l'inconnue est \mathbf{X}_{n+1} :

$$\frac{\mathbf{M}}{\beta\delta t^2} \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{K}(\mathbf{X}_{n+1}) = \Phi_{n+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\delta t^2} \mathbf{X}_n + \frac{\mathbf{M}}{\beta\delta t} \dot{\mathbf{X}}_n + \mathbf{M}\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{X}}_n \quad [39]$$

La résolution de cette équation non linéaire utilise une méthode itérative, basée sur un algorithme de point fixe. Une estimation du déplacement \mathbf{X}_{n+1}^0 est obtenue en résolvant l'équation précédente en ne retenant que la partie linéaire de $\mathbf{K}(\mathbf{X})$. On écrit alors (Belytschko *et al.*, 2000) :

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}_{n+1}^{q+1}) = \mathbf{K}(\mathbf{X}_{n+1}^q) + \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}_{n+1,q}} \right) \cdot (\mathbf{X}_{n+1}^{q+1} - \mathbf{X}_{n+1}^q) \quad [40]$$

pour obtenir le schéma itératif suivant, donnant des mises à jour successives \mathbf{X}_{n+1}^{q+1} du déplacement au temps t_{n+1} :

$$\mathbf{X}_{n+1}^{q+1} = \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta\delta t^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}_{n+1,q}} \right) \right]^{-1} \times \left[\Phi_{n+1} + \mathbf{K}(\mathbf{X}_{n+1}^q) + \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}_{n+1,q}} \right) \cdot \mathbf{X}_{n+1}^q + \frac{\mathbf{M}}{\beta\delta t^2} \mathbf{X}_n + \frac{\mathbf{M}}{\beta\delta t} \dot{\mathbf{X}}_n + \mathbf{M}\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{X}}_n \right] \quad [41]$$

Le processus s'arrête lorsqu'un critère de convergence est vérifié. Ce critère

s'écrit $\frac{\|\mathbf{X}_{n+1}^{q+1} - \mathbf{X}_{n+1}^q\|}{\|\mathbf{X}_{n+1}^i\|} \leq \varepsilon$ avec $\|\cdot\|$ une norme euclidienne donnée.

L'expression de la matrice tangente est :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{V}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_v}{\partial \mathbf{U}} & \mathbf{K}_v + \frac{\partial \mathbf{R}_v}{\partial \mathbf{V}} \end{bmatrix} \quad [42]$$

avec :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{V}} = \int_0^L ES \left\{ \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\} \langle V \rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\rangle dz \quad [43]$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_v}{\partial \mathbf{U}} = \int_0^L ES \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \langle V \rangle dz \quad [44]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_v}{\partial \mathbf{V}} = & \int_0^L ES \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \langle V \rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\rangle \langle V \rangle dz + \int_0^L ES \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N_u}{\partial z} \right\rangle \langle U \rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} dz \\ & + \int_0^L \frac{ES}{2} \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \langle V \rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\rangle \langle V \rangle \left\{ \frac{\partial N_v}{\partial z} \right\} dz \end{aligned} \quad [45]$$

Les matrices précédentes sont calculées numériquement en utilisant une méthode de Gauss-Legendre (Dhatt Touzot, 1984) ; on utilise un schéma d'intégration numérique du type :

$$\int_{-1}^{+1} \psi(\zeta) d\zeta \approx \sum_{l=1}^{l=L} w_l \psi(\zeta_l) \quad [46]$$

avec ζ_l abscisses points d'intégration de Gauss et w_l poids d'intégration. Le schéma numérique [46] à L points est exact pour les polynômes de degré $2L-1$: on utilisera donc un schéma à 5 points.

Dans le schéma itératif donné par l'équation [41], la matrice $\frac{\mathbf{M}}{\beta \delta t^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}_{n+1,q}} \right)$ est inversée à chaque pas de temps avec une méthode directe, basée sur une décomposition LU (Lascaux Théodor, 1987).

La méthodologie de résolution du problème structure ayant été exposée, on s'intéresse maintenant à la prise en compte du couplage fluide/structure : la discrétisation du terme d'interaction est conduite sur les principes identiques à ceux de l'analyse modale. Le couplage des problèmes est pris en compte par la matrice d'interaction fluide/structure \mathbf{R} . On pose $\mathbf{W}(t) = \langle \mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) \rangle$, le problème couplé discrétisé s'écrit alors sous la forme matricielle non symétrique suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{W}}(t) \\ \mathbf{P}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W}(t) \\ \mathbf{P}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_S(\mathbf{W}(t)) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_S(t) \\ \Phi_F(t) \end{Bmatrix} \quad [47]$$

En éliminant la variable pression, on peut formuler le problème structure :

$$(\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H) \ddot{\mathbf{W}}(t) + \mathbf{K}_S \mathbf{W}(t) + \mathbf{R}_S(\mathbf{W}(t)) = \Phi_S - \Phi_H \quad [48]$$

avec :

– $\mathbf{M}_H = \rho_F \mathbf{R}^T \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}$ terme de masse d'eau ajoutée. Ce terme rend compte des effets de couplage entre la structure élastique et le fluide incompressible avec surface libre ;

– $\Phi_H = \rho_F \mathbf{R}^T \mathbf{K}_F^{-1} \Phi_F$ terme de masse d'eau déplacée. Ce terme rend compte du chargement fluide sur la structure résultant de la création d'un champ de pression dû à la mise en accélération du fluide⁴.

L'équation [48] prend la forme générale [36] : l'algorithme implicite décrit précédemment est alors utilisé pour intégrer en temps l'équation dynamique du problème structure avec prise en compte des effets du fluide incompressible.

3.4. Résultats numériques

Les procédures numériques détaillées ci-avant sont implémentées dans l'outil MATLAB (Mokthari Meshba, 1997), afin de conduire une étude numérique et de quantifier les effets des non-linéarités et du couplage fluide/structure. Les caractéristiques géométriques et physiques du système couplé sont les suivantes : $R = 0.1$ m, $R' = 0.2$ m, $L = 1$ m, $H = 0.75$ m, $e = 0.02$ m, $E = 6.04 \times 10^8$ Pa, $\rho_s = 7800$ kg/m³, $\rho_F = 1000$ kg/m³.

Une caractérisation des non-linéarités peut être conduite en résolvant un problème aux valeurs propres à partir des termes de masse et de raideur non linéaires du problème (Barshyam Prathap, 1972). Dans notre cas, on cherche à caractériser les non-linéarités en fonction de l'amplitude de l'accélération imposée pour un temps de choc donné. Le temps de choc imposé est $\tau = 0.1$ s, de l'ordre de grandeur de la période propre du premier mode couplé fluide/structure. On calcule alors la réponse temporelle du système et on détermine la flexion maximale $V_m = \max_{t>0} \{V(L, t, \gamma)\}$ de la poutre soumise à un choc d'amplitude γ_o .

La figure 5 donne la réponse temporelle du système pour un choc d'amplitude $\gamma_o \tau^2 / R = 5$, avec et sans couplage fluide/structure et dans le cadre d'une analyse non linéaire. Le couplage avec le fluide permet de mettre en évidence :

4. Ce terme est caractéristique du comportement dynamique du système couplé fluide et structure sur lequel est appliquée la sollicitation dynamique. La mise en accélération du fluide incompressible crée un champ de pression dont la résultante au niveau de la structure est l'effort Φ_H , qui tend à soulager cette dernière ; en statique, ce terme est équivalent à une poussée d'ARCHIMÈDE. L'étude du modèle simple de Fritz (Fritz, 1972) permet de proposer un modèle analytique simple de comportement du système couplé et de mettre en évidence les notions de masse ajoutée et masse déplacée. Il est à noter que dans le cas où la sollicitation dynamique est appliquée uniquement à la structure couplée avec le fluide, l'équation transitoire du système ne ferait cette fois-ci intervenir qu'un terme de masse d'eau ajoutée au aux deux membres de l'équation [48] (Sturm Song, 1980).

- les effets de masse d'eau ajoutée : la fréquence propre du système couplé est inférieure à la fréquence propre du système non couplé ;
- les effets de masse d'eau déplacée : la flèche maximale du système couplé est inférieure à la flèche du système non couplé, pour une même sollicitation, à cause des efforts hydrodynamiques.

La figure 6 donne la flèche maximale calculée par une analyse linéaire et non linéaire, avec et sans couplage fluide/structure en fonction de l'amplitude de l'accélération.

Les calculs permettent de mettre en évidence l'apparition de non-linéarités géométriques à partir d'une amplitude d'accélération de l'ordre de $\gamma_o \tau^2 / R \sim 3$, ce qui correspond à une flèche maximale représentant $V_m / e \sim 2$, avec e épaisseur de la poutre : e est la plus petite dimension caractéristique du système. L'effet des non-linéarités se caractérise par une rigidification de la structure, la flèche maximale donnée par une approche non linéaire étant inférieure à la flèche maximale déterminée par une analyse linéaire (Hino *et al.*, 1985).

Ces observations sont valables pour le problème linéaire comme pour le problème non linéaire. L'effet des non-linéarités géométriques et du couplage fluide/structure conduit à une diminution de la flèche maximale de l'extrémité libre de la poutre. Dans le cas d'un modèle linéaire, l'écart entre la valeur calculée sans fluide et avec fluide est de 13.42 % pour toutes les valeurs de $\gamma_o \tau^2 / R$. Dans le cas d'une étude non linéaire, cette valeur devient 12.31 % pour $\gamma_o \tau^2 / R \sim 4$ et 10.48 % pour $\gamma_o \tau^2 / R \sim 8$: pour le problème étudié, les effets de non-linéarités géométriques deviennent prépondérants devant les effets de couplage fluide/structure pour des valeurs croissantes de l'accélération imposée.

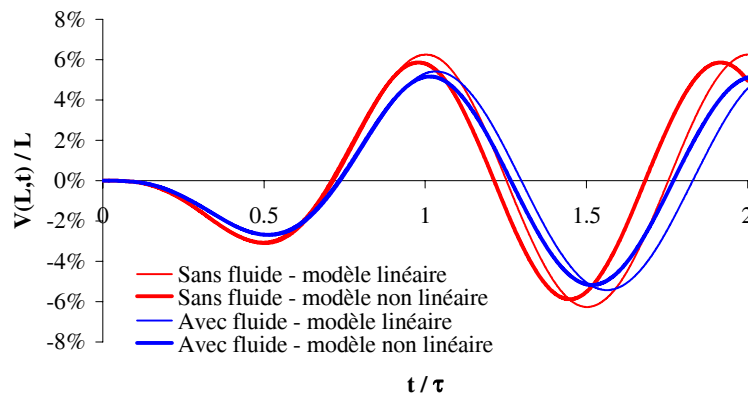


Figure 5. Réponse en déplacement de l'extrémité libre de la poutre avec et sans couplage fluide/structure. Comparaison des modèles poutre linéaire et non linéaire

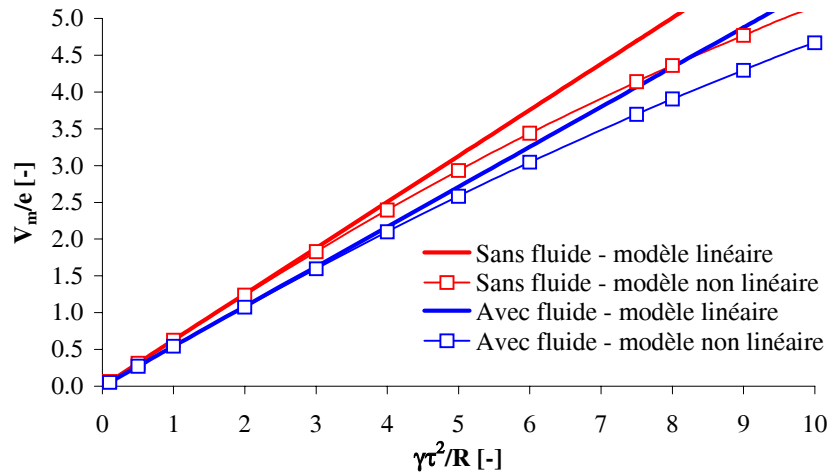


Figure 6. Déplacement maximum de l'extrémité libre de la poutre en fonction de l'amplitude de l'accélération imposée. Comparaison des calculs linéaires et non linéaires avec et sans couplage avec le fluide

4. Conclusion

Nous avons présenté une étude numérique relative au comportement dynamique d'une poutre élastique couplée avec un fluide parfait incompressible présentant une surface libre, en utilisant une méthode de discrétisation spatiale basée sur une méthode de couplage fort éléments finis/éléments finis. Une analyse modale est d'abord conduite sur le problème formulée en pression/déplacement. Le problème aux valeurs propres est résolu à l'aide d'un algorithme non symétrique. Une analyse temporelle est ensuite réalisée pour un problème prenant en compte des non-linéarités géométriques côté structure. L'intégration temporelle est effectuée avec un algorithme non linéaire implicite.

L'analyse modale permet de mettre en évidence les phénomènes de couplage fluide/structure, caractérisés par les notions de masse ajoutée et couplage entre les modes structure hydroélastiques et les modes fluide de ballonnement. L'influence de différents nombres sans dimension (nombre de masse, nombre de Froude dynamique, ratio de remplissage) sur le phénomène est alors détaillée.

L'analyse temporelle a mis en évidence sur le cas étudié les effets des non-linéarités géométriques du problème structure et les effets de couplage avec le fluide. Dans le cas d'un système couplé soumis à une accélération donnée, les non-linéarités sont pilotées par l'amplitude de l'accélération imposée. Les effets non linéaires et les effets de couplage se traduisent par une diminution du déplacement

de la structure sous accélération imposée, les effets non linéaires devenant prépondérants devant les effets de couplage pour des accélérations importantes.

Le travail réalisé dans le cadre de cette étude permet de donner une solution numérique de référence pour le problème étudié. Cette solution de référence permet de valider le développement d'une méthode numérique de résolution du problème couplé non linéaire, conduite avec un algorithme de couplage faible entre un code fluide volumes finis, couplé de façon explicite décalée avec un code structure éléments finis (Sigrist *et al.* 2004, Sigrist, 2004). L'approche numérique est actuellement complétée par une approche expérimentale dans laquelle une maquette du système couplé défini par la figure 1 est instrumentée sur une table de choc (Sigrist Conessa, 2005).

5. Bibliographie

- Axisa F., *Modélisation des systèmes mécaniques, Interactions fluide/structure*, Hermès, 2001.
- Barshyam G.R., Prathap G., "Galerkin Finite Element Method for Non-Linear Beam Vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 72, 1972, p. 191-203.
- Bathe K.J., Wilson E.L., *Numerical methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1976.
- Belytchko T., Liu W.K., Morand B., *Non-Linear Finite Element for Continua and Structures*, Wiley & Sons, 2000.
- Cho J.R., Song J.M., "Assessment of Classical Numerical Models for the Separate Fluid Structure Modal Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 239, 2001, p. 995-1012.
- Crisfield M., *Non Linear Finite Element Analysis of Solid and Structures*, Wiley & Sons, 1991.
- De Langre E., *Fluides et Solides*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2001.
- Dhatt G., Touzot G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, 1984.
- Dubigeon S., *Mécanique des milieux continus*, Lavoisier, 1998.
- Everstine G.C., "A Symmetric Potential Formulation for Fluid-Structure Interaction", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 79, n° 1, 1981, p. 157-190.
- Fritz R.J., "The Effects of Liquids on the Dynamic Motion of Immersed Solids", *Journal of Engineering for the Industry*, 1972, p. 167-173.
- Gibert R.J., *Vibration des structures, Interaction avec les fluides, Sources d'excitation aléatoires*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 69, Eyrolles, 1986.
- Hino J., Yoshimura Y., Ananthanarayana N., "Vibration Analysis of Non-Linear Beams Subjected to a Moving Load Using the Finite Element Method", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 100, 1985, p. 477-491.

- Hughes T.J.R., Belytschko T., "A Précis of Developments in Computational Methods for Transient Analysis", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, 1983, p. 1033-1041.
- Larbi W., Deü J.F., Ohayon R., « Réponse transitoire de structures couplées avec un liquide interne », *7^e Colloque national en calcul des structures*, vol. 1, 2001, p. 271-276.
- Lascaux P., Theodor R., *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Masson, 1987.
- Makerle J., "Fluid-Structure Interaction Problems, Finite Element Approach and Boundary Elements Approaches. A Bibliography" *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 31, 1999, p. 231-240.
- Mokthari M., Meshba A., *Apprendre et maîtriser Matlab*, Springer Verlag, 1997.
- Morand H. J.P., Ohayon R., *Fluid Structure Interaction*, Wiley & Sons, 1995.
- Newmark M.N., « A Method of Computation for Structural Dynamics », *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 85, 1954, p. 67-94.
- Ohayon R., Valid R., "True Symmetric Formulation for Fluid-Structure Interaction in Bounded Domains, Finite Elements Results", *Numerical Methods in Coupled Systems*, Ed. Lewis R.W., Bettes P., Hinton E., 1983, p. 293-325.
- Peseux B., Contribution à l'étude de structures partiellement ou totalement immergée en matériau homogène ou en composite, Thèse de Doctorat d'état, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1989.
- Rajakumar C., Rogers C.G., "The Lanczos Algorithm Applied to Unsymmetric Generalized Eigenvalue Problem", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 1991, p. 1009-1026.
- Sandberg G., Göransson P.A., "A Symmetric Finite Element Formulation for Acoustic Fluid-Structure Interaction Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 123, n° 3, 1988, p. 507-515.
- Sigrist J.-F., Lainé C., Peseux B., "Choice and Limits of a Linear Fluid Model for the Numerical Study in Dynamic Fluid Structure Interaction", *Pressure Vessel and Piping*, Cleveland, 24-27 July 2003.
- Sigrist J.-F., Lainé C., Peseux B., « Méthodes numériques linéaires et non linéaires pour la simulation d'un problème couplé fluide/structure avec surface libre », *14^e colloque Vibrations, chocs et bruit*, Lyon, 16-18 juin 2004.
- Sigrist J.-F., Lainé C., Peseux B., "Dynamic Analysis of a Coupled Fluid Structure Problem with Fluid Sloshing", *Pressure Vessel and Piping*, Sans Diego, 26-29 July 2004.
- Sigrist J.-F., Modélisation et simulation numérique d'un problème couplé fluide/structure non linéaire, Application au dimensionnement de structures nucléaires de propulsion navale, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2004.
- Sigrist J.-F., Lainé C., Peseux B., "Dynamic Analysis of a Coupled Fluid-Structure Problem by Explicit Finite Element-Finite Volume Coupling", *Pressure Vessel and Piping*, Denver, 17-22 July 2005.

Sigrist J.-F., Conessa, V., “Experimental and Numerical Analysis of a Coupled Fluid-Structure System Subjected to Dynamic Acceleration”, *Pressure Vessel and Piping*, Denver, 17-22 July 2005.

Sturm A.J., Song C., “The Effect of Submergence on Structural response in Confined Pools”, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 60, 1980, p. 287-296.

Subbaraj K., Dokainish M.A., “A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics-I: Implicit Methods”, *Computers & Structures*, vol. 32, 1989, p. 1387-1401.

Washizu K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon, 1982.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method*, Basic Formulation and Linear Problems, Mac Graw Hill, 1989.