

---

# Une approche micro-macro pour le suivi de fissure avec enrichissement local

**Pierre-Alain Guidault\*** — **Olivier Allix\*** — **Laurent Champaney\***  
**Christian Cornuault\*\***

\* *Laboratoire de Mécanique et Technologie, ENS de Cachan  
CNRS/Université Pierre et Marie Curie  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex  
{guidault, allix, champaney}@lmt.ens-cachan.fr*

\*\* *Dassault Aviation  
78 quai Marcel Dassault, Cedex 300, F-92552 Saint-Cloud Cedex*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article, une stratégie de calcul multiéchelle pour le suivi de fissure est présentée. Cette stratégie a pour objectif de séparer les effets locaux des effets globaux afin de garder un maillage macro inchangé au cours de la propagation tout en permettant l'utilisation d'une description fine uniquement où cela est nécessaire. Deux points sont discutés : le premier est le choix d'une échelle macro rendant compte de l'effet macro de la fissure ; le second est l'utilisation d'une décomposition du domaine en sous-structures et interfaces permettant de limiter l'utilisation d'une échelle fine uniquement dans le voisinage de la fissure. L'intégration de la X-FEM comme méthode d'enrichissement local pour décrire la fissure est aussi présentée.*

*ABSTRACT. In this paper, a multiscale strategy for the analysis of crack propagation is presented. The purposes of this strategy are, first, to separate the local effects from the global effects in order to keep a macromesh unchanged during the crack's propagation and, second, to enable one to use a proper fine-scale description only where it is required. Two aspects are discussed: the first is the choice of the macroscale in order to include the macroeffect of a crack; the second is the use of a decomposition of the domain into substructures and interfaces in order to limit the use of the refined scale only around the crack. The integration of the X-FEM as a local enrichment method for the description of a crack is also presented.*

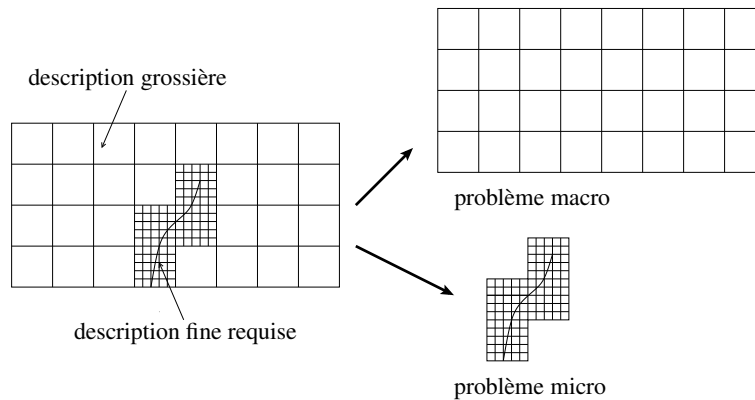
*MOTS-CLÉS : stratégie multiéchelle, propagation de fissure, X-FEM, homogénéisation, enrichissement macro, enrichissement micro.*

*KEYWORDS: multiscale strategy, crack propagation, X-FEM, homogenization, macroenrichment, microenrichment.*

## 1. Introduction

Le calcul des structures avec fissuration est aujourd'hui revisité par des techniques émergentes comme l'approche des fortes discontinuités (SDA) introduite par Oliver (*Oliver et al.* 2002). D'autres approches telles que la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) (Daux *et al.* 2000) et la méthode des éléments finis généralisés (G-FEM) (Strouboulis *et al.* 2001), se basent sur la méthode de la partition de l'unité (PUM) introduite par Melenk et Babuška en 1996 (Melenk 1996). Le maillage n'ayant pas besoin d'être conforme à la géométrie de la fissure, les opérations de maillage sont grandement simplifiées. Cependant, ces techniques n'incorporent pas complètement l'aspect multiéchelle induit par la localisation des déformations dans la zone fissurée. Aussi, la nécessité d'avoir un maillage fin en pointe de fissure conduit à un remaillage global de la structure au cours de la propagation.

Pour pallier cette difficulté liée au remaillage, la stratégie développée en collaboration avec Dassault Aviation a pour objectifs, premièrement, de séparer le traitement des effets locaux des effets globaux afin de ne pas changer le maillage « macro » au cours de la propagation de la fissure et, deuxièmement, de pouvoir utiliser une description à l'échelle fine seulement dans les zones pertinentes (figure 1). La démarche ainsi envisagée met en synergie deux techniques (Guidault *et al.* 2004). La première est issue de travaux menés au LMT-Cachan concernant la stratégie micro-macro (Ladevèze *et al.* 2001) initialement dédiée à l'étude de structures hétérogènes et bâtie sur une *technique d'homogénéisation*. La deuxième technique basée sur la PUM est utilisée pour représenter correctement la solution locale à l'échelle micro. L'introduction des fonctions d'enrichissement est réalisée au moyen de la X-FEM.



**Figure 1.** Structure fissurée : problème macro et problème micro

Une fissure ayant une influence à la fois au niveau local et au niveau global, la question de la description de la cinématique et des efforts aux deux niveaux est alors soulevée. Dans l'approche micro-macro appliquée au suivi de fissure trois principaux aspects ont ainsi été étudiés. Le premier est l'utilisation d'une interface permettant

la mise en place d'une description fine dans le voisinage de la fissure et traitant le problème d'incompatibilité de maillage de façon naturelle. Le second est le choix de l'échelle macro et de ses enrichissements pour inclure l'effet macro d'une fissure. Enfin, le troisième point porte sur l'intégration de la X-FEM au niveau micro. Il est montré que, dans le cadre de l'approche multiéchelle utilisée, celle-ci ne pose pas de difficultés particulières.

## 2. L'approche multiéchelle pour le suivi de fissure

L'approche micro-macro s'articule autour de trois points fondamentaux.

### – Un partitionnement de la structure en sous-structures et interfaces

Une sous-structure  $E$ , occupant le domaine  $\Omega_E$ , est soumise à l'action de son environnement (les interfaces voisines) qui se traduit par une distribution d'effort  $\underline{F}_E$  et une distribution de déplacement  $\underline{W}_E$  (figure 2). Ce partitionnement confère le caractère mixte à cette méthode de décomposition de domaine.

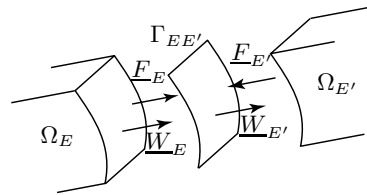


Figure 2. Échange sous-structures / interfaces

### – Un aspect multiéchelle introduit au niveau des interfaces

Contrairement à la plupart des approches multiéchelles, la séparation entre les échelles ne se fait qu'au niveau des interfaces. Les quantités d'interface s'écrivent ainsi comme la somme d'une partie macro et d'une partie micro. Ainsi,  $\underline{F}_E = \underline{F}_E^M + \underline{F}_E^m$ .

### – Une vérification partielle des conditions de transmission

Les efforts macro d'interface doivent systématiquement vérifier les conditions de transmission *a priori*. L'espace associé est noté  $\mathcal{F}_{ad}^M$ .

$$\mathcal{F}_{ad}^M = \{ \underline{F}^M \in \mathcal{F}^M \mid \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0 \} \quad [1]$$

où  $\mathbf{V}_E$  représente la liste des sous-structures voisines de  $\Omega_E$ .

L'algorithme itératif LATIN (Ladevèze 1999) est alors utilisé pour la résolution. Deux groupes d'équations  $A_d$  et  $\Gamma$  permettant de séparer les difficultés sont ainsi constitués :

$$\begin{array}{l}
 A_d \left\{ \begin{array}{l}
 - \text{l'admissibilité statique de } (\sigma_E, \underline{F}_E), \forall \underline{M} \in \Omega_E \\
 - \text{l'admissibilité cinématique de } (\epsilon_E, \underline{W}_E), \forall \underline{M} \in \Omega_E \\
 - \text{l'admissibilité de } \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \{\underline{F}_E^M\} \in \mathcal{F}_{ad}^M
 \end{array} \right. \\
 \\
 \Gamma \left\{ \begin{array}{l}
 - \text{la relation de comportement de chaque sous-structure } \Omega_E \\
 - \text{la relation de comportement décrivant le comportement des interfaces} \\
 - \text{la loi d'évolution de la fissure}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$\Gamma$  regroupe les équations locales éventuellement non-linéaires et  $A_d$ , les équations linéaires éventuellement globales. La stratégie consiste à chercher une solution qui vérifie alternativement les équations de  $A_d$  puis celles de  $\Gamma$  par le biais de deux directions de recherche rendant le problème bien posé. L'admissibilité de  $\bigcup_{E \in \mathbf{E}} \{\underline{F}_E^M\} \in \mathcal{F}_{ad}^M$  conduit à un problème macro portant sur les efforts macro  $\underline{F}^M$ .

Concernant le suivi de fissure, nous proposons un partitionnement basé sur un maillage éléments finis grossier (figure 1). Chaque élément représente une sous-structure. Un raffinement peut alors être requis pour certaines sous-structures. La question d'incompatibilité de maillage se pose alors. De même, une fissure pouvant traverser une interface, l'introduction d'une discontinuité en déplacement doit être étudiée. L'interface permet de traiter efficacement ces difficultés.

### 3. Description de l'interface et séparation des échelles

Les quantités d'interface s'écrivent sous la forme  $\underline{F} = \underline{F}^M + \underline{F}^m$  et  $\underline{W} = \underline{W}^M + \underline{W}^m$ . Les parties macro sont obtenues par un projecteur  $\mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}$  tel qu'il vérifie la relation de découplage des travaux micro et macro suivante :

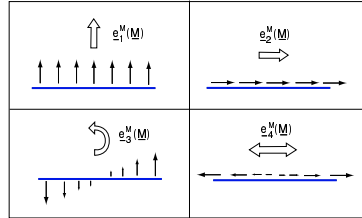
$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} dS = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^M dS + \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m dS \quad [2]$$

On a alors :  $\underline{F}^M = \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}(\underline{F})$  et  $\underline{F}^m = (id - \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}})(\underline{F})$ . Il en est de même pour  $\underline{W}$ . Afin d'explicitier l'opérateur de projection  $\mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}$ , on note  $\mathbf{e}_{EE'}^M = (\underline{e}_1^M, \dots, \underline{e}_{n_M}^M)$ , une base du sous-espace de dimension finie  $\mathcal{F}_{EE'}^M$  des interefforts macroscopiques ou du sous-espace  $\mathcal{W}_{EE'}^M$  qui est identique. On a alors :

$$\underline{F}^M = \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}(\underline{F}) = \sum_{i=1}^{n_M} (\underline{F}, \underline{e}_i^M) \underline{e}_i^M = \sum_{i=1}^{n_M} [F^M]_i \underline{e}_i^M \quad [3]$$

où  $[F^M]_i$  représentent les composantes de  $\underline{F}^M$  dans la base macroscopique  $\mathbf{e}_{EE'}^M$ . On remarquera que la définition des composantes macro  $[F^M]_{i=1..n_M}$  est faite avant même toute discrétisation. Un choix classique consiste à utiliser un projecteur dit d'extraction de la « partie linéaire » des champs. La figure 3 illustre cette base de

fonctions affines en dimension deux. Les composantes  $[F^M]_i$  correspondent alors aux résultantes, moments et extension de l'interface. Un autre projecteur étudié dans cet article, est celui basé sur une base macro cubique. Cette base est obtenue en ajoutant à la base macro linéaire des fonctions quadratique et cubique de la variable associée à une direction principale de l'interface (l'abscisse curviligne de l'interface). En dimension deux, cette base cubique permet d'extraire d'une quantité  $\underline{F}$  les composantes de résultantes, de moment, d'extension ainsi que les parties quadratiques et cubiques suivant les deux directions principales de l'interface.  $n_M$  est dans ce cas égal à 8.



**Figure 3.** Base macro linéaire  $\{e_i^M\}_{i=1..4}$  ( $n_M = 4$ ), sur une interface  $\Gamma_{EE'}$

Dans le cadre d'une analyse locale-globale, cette définition « mécanique » d'une base macro permet de répondre de façon naturelle à la question de l'incompatibilité de maillage entre deux sous-structures  $E$  et  $E'$ , l'une raffinée et l'autre non. Ce problème est traité par le raccord (Guidault *et al.* 2004) :

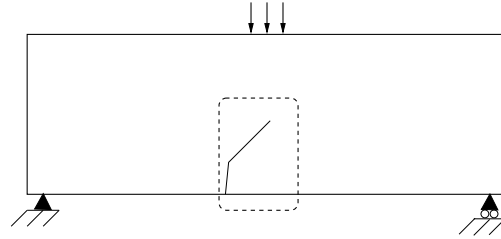
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0 \\ \underline{W}_E^M - \underline{W}_{E'}^M = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{F}_E^m = 0 \\ \underline{F}_{E'}^m = 0 \end{array} \right. \quad \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'}$$

Compte tenu de la définition des bases macro linéaire et cubique, un tel raccord consiste alors à recoller les quantités d'efforts généralisés, résultante et moment, comme une application du principe de Saint-Venant. Ce nouveau comportement d'interface vérifié à convergence et utilisé pour les interfaces délimitant la zone d'intérêt permet de retrouver la solution intérieure dans cette zone raffinée.

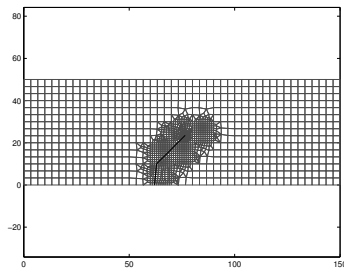
#### 4. Enrichissement de la base macro

Une fissure ayant un effet à la fois au niveau local et au niveau global, la question de la description de la cinématique et des efforts aux échelles micro et macro est soulevée. Afin de ne pas changer la structure du problème macro, la discontinuité en déplacement n'est introduite qu'au niveau micro. Sur une interface, les quantités macro  $\underline{F}^M$  et  $\underline{W}^M$  sont ainsi continues et, par conséquent, les quantités complémentaires micro sont discontinues (Guidault *et al.* 2004). Pour prendre en compte les forts gradients de déformation induits par la fissure au niveau macro, on propose d'utiliser l'enrichissement de la base macro qui extrait la partie cubique des quantités

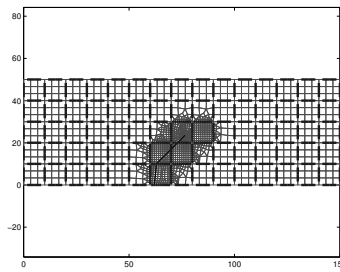
d'interface. Le problème macro ainsi enrichi permet d'améliorer les performances de la stratégie itérative de résolution basée sur la méthode LATIN.



(a) Poutre fissurée en flexion 3 points



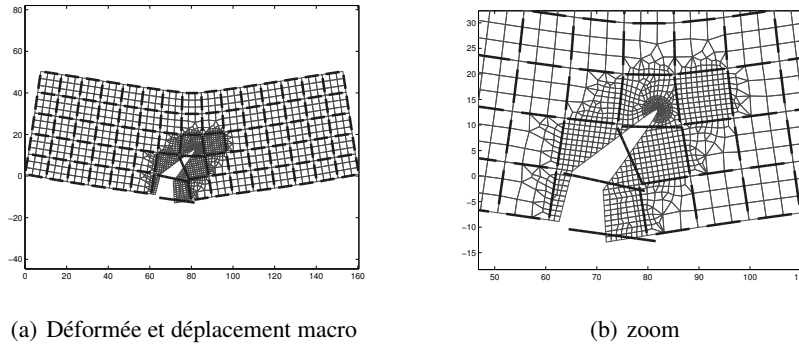
(b) maillage micro



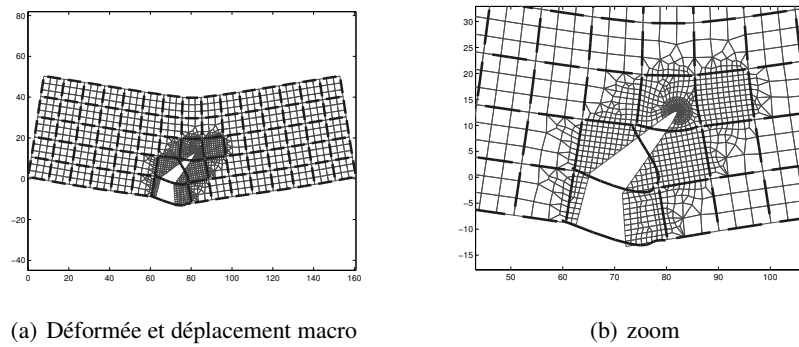
(c) maillage macro

**Figure 4.** Poutre fissurée en flexion trois points : maillage micro conforme à la géométrie de la fissure et maillage macro d'interface

Considérons la poutre fissurée en flexion trois points de la figure 4(a) pour une configuration de fissure donnée. Le maillage micro et le maillage macro des interfaces, associé au partitionnement en sous-structures, sont représentés respectivement sur les figures 4(b) et 4(c). La définition du projecteur macro étant propre à chaque interface, il est possible d'utiliser, localement dans la zone d'intérêt, un projecteur macro basé sur la base macro cubique. Deux situations sont ainsi étudiées. La première utilise une base macro linéaire partout. La deuxième utilise pour les quatre interfaces traversées par la fissure une base macro cubique. Les figures 5 et 6 représentent les déformées totales et les déplacements macro des interfaces obtenues pour les deux cas. Les solutions à convergence sont bien entendu les mêmes mais les déplacements macro diffèrent dans la zone d'intérêt. On constate que les quantités d'interface macro cubiques permettent de mieux approcher la solution dans la zone fissurée. La figure 7 représente la convergence de la valeur et de l'erreur relative des facteurs d'intensité des contraintes (FIC)  $K_I$  et  $K_{II}$  dans les deux situations. On constate que l'enrichissement local de la base macro linéaire par sa partie cubique permet d'améliorer la convergence des quantités locales telles que les FIC, les quantités macro cubiques d'interface permettant alors de mieux décrire l'effet macro de la fissure.



**Figure 5.** Déformée totale et déplacements macro (traits forts continus) des interfaces pour la base macro linéaire



**Figure 6.** Déformée totale et déplacements macro (traits forts continus) des interfaces pour la base macro cubique locale

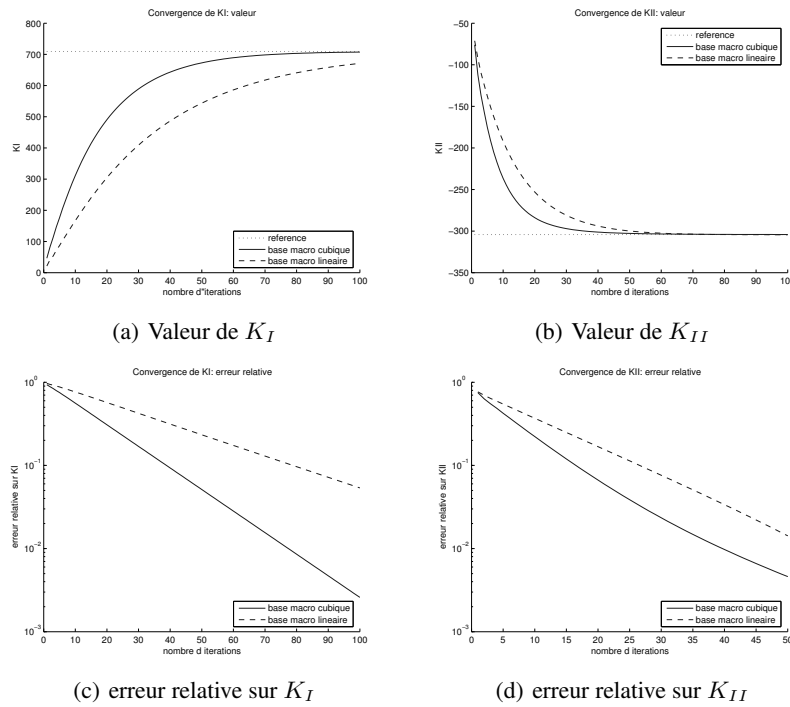
## 5. Implantation de la X-FEM au niveau micro

Afin de s'affranchir des difficultés de maillage au niveau micro, une technique d'enrichissement locale comme la X-FEM pour représenter la fissure est utilisée. Le multiéchelle n'étant introduit qu'au niveau des interfaces, il est possible d'enrichir l'approximation du champ de déplacement  $\underline{u}_E$  sur une sous-structure  $E$  suivant la technique illustrée dans (Moës *et al.* 1999, Stolarska *et al.* 2001).

$$\underline{u}_{E_h}(\underline{x}) = \sum_{i \in N} \varphi_i(\underline{x}) \underline{u}_i + \sum_{i \in N_d} \varphi_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{i \in N_p} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j=1}^4 F_j(\underline{x}) \underline{b}_i^j \right) \quad [4]$$

où :

- $N$  est l'ensemble des nœuds du maillage ;
- $\underline{u}_i$  est le degré de liberté (vectoriel) classique au nœud  $i$  ;
- $\varphi_i$  est la fonction « chapeau » éléments finis classique associée au nœud  $i$  ;
- $N_d \subset N$  est l'ensemble des nœuds enrichis par la discontinuité et les coefficients  $\underline{a}_i$  sont les degrés de liberté (vectoriels) correspondants. Un nœud appartient à  $N_d$  si son support est coupé par la fissure mais ne contient aucune de ses pointes (figure 8).  $N_p \subset N$  est l'ensemble des nœuds à enrichir pour modéliser le fond de fissure et les coefficients  $\underline{b}_i$  sont les degrés de liberté (vectoriels) correspondants. Un nœud appartient à  $N_p$  si son support contient la pointe de fissure.



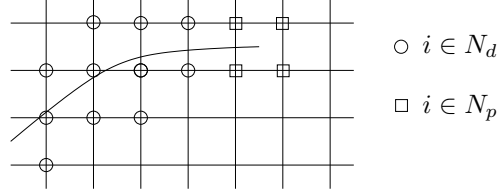
**Figure 7.** Valeur et erreur relative des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction du nombre d'itérations pour les base macro linéaire et la base macro cubique locale. La référence est le calcul à convergence (pour un grand nombre d'itérations)

Les fonctions  $F_j$  permettent de représenter les solutions asymptotiques en pointe de fissure et valent en élasticité :

$$\{F_j(\underline{x})\} = \{\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta\} \quad [5]$$



où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires dans les axes locaux en fond de fissure. La fonction  $H(\underline{x})$  est discontinue sur la fissure et de valeur constante de part et d'autre de celle-ci :  $+1$  d'un côté et  $-1$  de l'autre.



**Figure 8.** Fissure placée sur un maillage uniforme. Les nœuds entourés d'un cercle sont enrichis par la discontinuité et les nœuds entourés d'un carré sont enrichis par les fonctions asymptotiques en pointe de fissure

Le projecteur macro  $\Pi_{\Gamma_{EE'}}$  est défini avant même toute discrétisation. La définition des quantités macro et micro restent donc inchangée. Toute la difficulté réside alors dans l'admissibilité cinématique du champ  $\underline{u}_E$  sur le bord d'une sous-structure  $\Omega_E$  et du déplacement d'interface  $\underline{W}_E$ . Ainsi, sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$  :

$$\forall \underline{F} \in \mathcal{F}_{EE'}, \quad (\underline{F}, (\underline{u}_E - \underline{W}_E))_{\Gamma_{EE'}} = 0 \quad [6]$$

Les quantités d'interface sont discrétisées et également enrichies par  $H$  sous la forme :

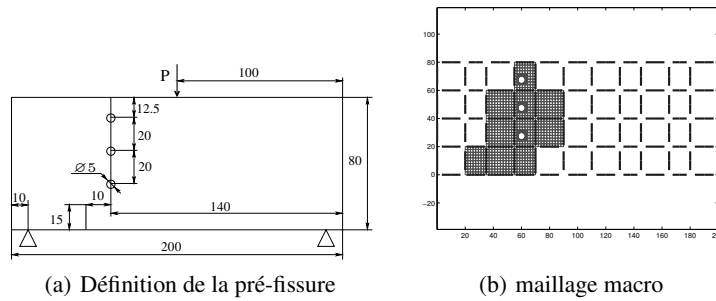
$$\underline{F} = \sum_{i \in N_{\Gamma}} \psi_i(\underline{x}) \underline{f}_i + \sum_{i \in N_{\Gamma_d}} \psi_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{a}_{\Gamma_i} \quad [7]$$

Après discrétisation de [6], on obtient :

$$[N_{EE'}][B_{EE'}][d_E] = [M_{EE'}][W_{EE'}] \quad [8]$$

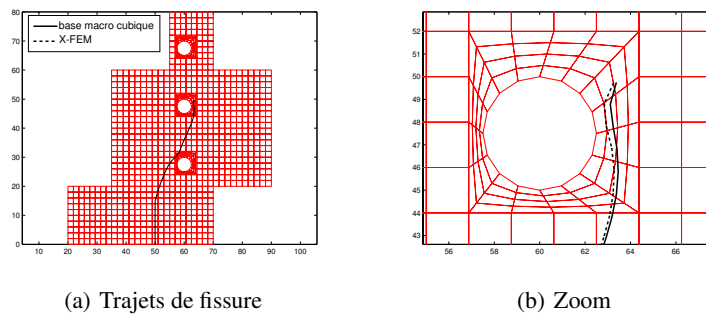
où  $[B_{EE'}]$  est l'opérateur de restriction booléen des inconnues nodales  $[d_E]$  au bord  $\Gamma_{EE'}$ ,  $[N_{EE'}]_{ij} = (\tilde{\psi}_i, \tilde{\varphi}_j|_{\Gamma_{EE'}})_{\Gamma_{EE'}}$  et  $[M_{EE'}]_{ij} = (\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j|_{\Gamma_{EE'}})_{\Gamma_{EE'}}$ .  $[W_{EE'}]$  est le vecteur des inconnues nodales en déplacement de  $\Gamma_{EE'}$ .  $\tilde{\varphi}_i$  (resp.  $\tilde{\psi}_i$ ) représentent sans distinction les fonctions de forme éléments finis classiques  $\varphi_i$  (resp.  $\psi_i$ ) pour un degré de liberté classique et les fonctions de forme enrichies  $H\varphi_i$  (resp.  $H\psi_i$ ) et  $F_j\varphi_i$  pour un degré de liberté enrichi. Le choix de la discrétisation des quantités d'interfaces avec l'enrichissement  $H$  est actuellement en cours d'étude. Un choix simple consiste à prendre comme fonction  $\psi_i$  des fonctions constantes par morceaux (par éléments d'interface). Cet espace d'approximation peut alors représenter naturellement une discontinuité et ne nécessite pas l'introduction de la fonction  $H$  discontinue.

La X-FEM étant implantée au niveau micro, on étudie la propagation en fatigue d'une fissure dans une poutre fissurée comportant trois trous en flexion trois points (figure 9(a)). On se propose par ailleurs de répondre au problème d'une analyse locale-globale pour laquelle une description fine de la solution est requise dans la zone fissurée alors qu'une description grossière est suffisante dans le reste de la structure. Le



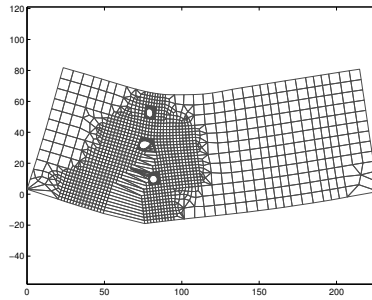
**Figure 9.** Poutre fissurée comportant trois trous en flexion trois points : maillage micro dans la zone d'intérêt et maillage macro d'interface

raccord à effort micro nul présenté précédemment est utilisé pour raccorder ces deux descriptions. La figure 9(b) représente le maillage macro d'interface et le maillage micro défini *a priori* dans la zone potentielle de fissuration. Dans cette zone, un raccord exact des quantités d'interface est réalisé tandis qu'un raccord à effort micro nul est utilisé pour toutes les autres interfaces. À chaque pas de propagation, le problème est résolu par la stratégie micro-macro de résolution avec une description de la géométrie courante de la fissure selon la X-FEM. La figure 10 représente le trajet obtenu avec notre stratégie et celui déterminé par une méthode directe X-FEM menée sur le maillage de la figure 11. Les trajets sont en bonne corrélation. Les déformées correspondantes au dernier pas de propagation sont représentées sur les figures 11 et 12.

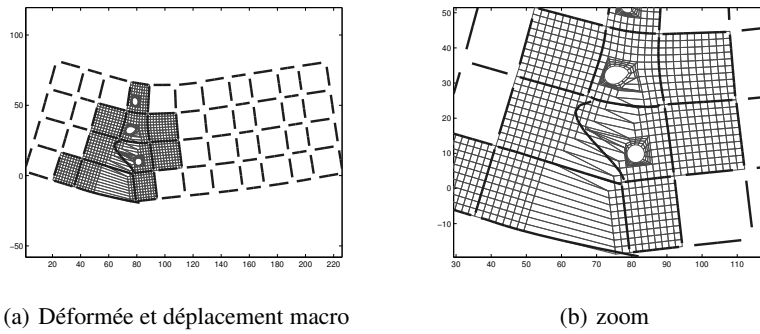


**Figure 10.** Trajets de fissure obtenu avec la stratégie micro-macro et la méthode directe X-FEM

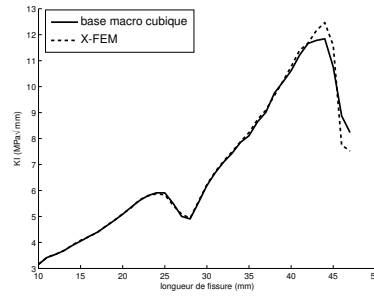
La figure 13 représentant la valeur de  $K_I$  en fonction de la longueur de fissure obtenue avec la stratégie micro-macro et la méthode directe X-FEM, montre que l'approche permet de répondre correctement au problème d'analyse locale-globale dans le cas de la propagation de fissure.



**Figure 11.** Déformée obtenue par le calcul direct X-FEM. Le maillage autour de la fissure est identique à celui utilisé par la stratégie micro-macro



**Figure 12.** Déformée totale et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro cubique locale au dernier pas de propagation



**Figure 13.** Valeurs de  $K_I$  en fonction de la longueur de fissure obtenues avec la stratégie micro-macro et la méthode directe X-FEM

## 6. Conclusion

Une stratégie de calcul multiéchelle pour le suivi de fissure a été présentée. Cette stratégie permet de séparer les effets macro des effets micro de la fissure tout en permettant l'utilisation d'une description fine uniquement où cela est nécessaire. La description de la cinématique et des efforts macro par une base macro cubique permet d'améliorer les performances de la stratégie en termes de vitesse de convergence. L'intégration de la X-FEM pour décrire la fissure au niveau micro et s'affranchir des difficultés de remaillage à l'échelle fine, s'inscrit aisément dans le cadre multiéchelle que nous avons présenté. Dans cet article, la prise en compte de la discontinuité n'est faite qu'au niveau micro. Mais, une introduction de cette discontinuité aux deux échelles peut sembler plus judicieuse. L'utilisation d'une base macro discontinue pour les interfaces traversées par la fissure est actuellement étudiée et fera l'objet d'un prochain article.

## 7. Bibliographie

- Daux C., Moës N., Dolbow J., Sukumar N., and Belytschko T., « Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, p. 1741-1760, 2000.
- Guidault P.-A., Allix O., Champaney L., and Navarro J.-P., « A micro-macro approach for crack propagation with local enrichment », *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Structures Technology*, Lisbon, Portugal, 2004.
- Ladevèze P., *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and non-Incremental Methods of Calculation*, Springer Verlag, 1999.
- Ladevèze P., Loiseau O., and Dureisseix D., « A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, p. 121-138, 2001.
- Melenk J. and Babuška I., « The Partition of Unity Finite Element Method : Basic Theory and Applications », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, p. 289-314, 1996.
- Moës N., Dolbow J., and Belytschko T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, p. 131-150, 1999.
- Oliver J., Huespe A. E., Pulido M., and Chaves E., « From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 69, p. 113-136, 2002.
- Stolarska M., Chopp D. L., Moës N., and Belytschko T., « Modelling Crack Growth by Level Sets and the Extended Finite Element Method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, p. 943-960, 2001.
- Strouboulis T., Copps K., and Babuška I., « The generalized finite element method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, p. 4081-4193, 2001.