

---

# Une méthode d'éléments finis étendue d'ordre supérieur optimale

**Patrick Laborde** \* — **Julien Pommier** \*\*  
**Yves Renard** \*\* — **Michel Salaün** \*\*\*

\* *UPS - Toulouse 3, Laboratoire MIP (CNRS UMR 5640)  
118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse cedex 4  
laborde@mip.ups-tlse.fr*

\*\* *INSA Toulouse, Laboratoire MIP (CNRS UMR 5640)  
Complexe scientifique de Rangueil, F-31077 Toulouse  
{pommier, renard}@insa-toulouse.fr*

\*\*\* *ENSICA, 1 pl. Emile Blouin, F-31056 Toulouse cedex 5  
msalaun@ensica.fr*

---

*RÉSUMÉ. Nous proposons une variante de la méthode des éléments finis étendue permettant d'obtenir, en mécanique de la rupture, une vitesse de convergence égale à celle d'une méthode d'éléments finis standard pour un problème régulier. La première amélioration consiste à enrichir une zone élargie autour du fond de fissure. On considère ensuite une condition de liaison entre degrés de liberté d'enrichissement singulier. Enfin, on introduit une condition de raccord à l'interface entre la zone enrichie et le reste du domaine. Notre approche est validée numériquement sur un cas test en utilisant des éléments finis de degré un à trois.*

*ABSTRACT. We present some modifications of the classical extended finite element method to achieve the same rate of convergence in fracture mechanics than using standard finite elements for a smooth problem. The first improvement consists in enriching an enlarged area around the crack tip. We also consider a bounding condition between the degrees of freedom of enrichment. Finally, a matching condition on the boundary of the enriched area is introduced. In such a nonconformal method, any blending element partially enriched with the asymptotic crack tip displacement solutions is considered. Numerical results on a test problem confirm optimality for finite elements of higher order.*

*MOTS-CLÉS : fissure, éléments finis, XFEM, vitesse de convergence optimale, raccord ponctuel*  
*KEYWORDS: fracture, finite elements, XFEM, optimal rate of convergence, pointwise matching.*

## 1. Introduction

Dans beaucoup d'applications industrielles en calcul de structures (aéronautique, matériaux composites, assemblages collés, structures en béton, etc.), les ingénieurs doivent de nos jours simuler de plus en plus finement la propagation de fissures. On connaît bien les difficultés de la prise en compte de problèmes de mécanique de la rupture dans une modélisation éléments finis : maillage adapté à la ligne de fracture, raffinement important en fond de fissure, remaillage pour suivre la progression incrémentale de la fissure, prolongement éventuel des champs sur le nouveau maillage, ou en non linéaire. En permettant le découplage du maillage éléments finis et de la géométrie de la fissure, la méthode XFEM (*eXtended Finite Element Method*) permet de remédier à ces inconvénients. Cette méthode introduite par (Moës *et al.* 1999) a montré son efficacité et a suscité un certain nombre de développements en 2D ou en 3D ces dernières années.

Une première étude a montré que la vitesse de convergence de la méthode XFEM (quand le paramètre de maillage  $h$  diminue) n'est pas optimale (Stazi *et al.* 2003). L'objet de la présente communication est de proposer des alternatives pour surmonter cette difficulté.

Dans la suite, nous commençons par rappeler le principe d'enrichissement de la base éléments finis qu'introduit la méthode XFEM classique (section 2). La matrice de rigidité élémentaire contenant maintenant des termes singuliers, nous introduisons une formule de quadrature efficace (section 3). Puis nous présentons une première variante avec l'objectif d'augmenter la vitesse de convergence de l'approximation. La zone d'enrichissement autour de la pointe de fissure est élargie ; en fait, on la fixe indépendamment du paramètre de maillage  $h$  (section 4). On considère aussi une condition de liaison entre les degrés de liberté relatifs à cet enrichissement, qui permet notamment d'améliorer le conditionnement (section 5).

La zone de transition, c'est-à-dire la couche d'éléments partiellement enrichis entre la zone d'enrichissement fixée et le reste du domaine, contribue à dégrader la qualité de l'approximation. De là l'idée de supprimer la zone de transition dans la variante précédente et de la remplacer par une condition de continuité du déplacement aux nœuds à l'interface (section 6). Des tests numériques illustrent ces différentes étapes.

## 2. La méthode des éléments finis étendue

Dans le plan, on considère un milieu déformable  $\Omega$  qui présente une fissure  $\Gamma_C$ , supposée rectiligne et débouchante pour simplifier. Le fond de la fissure est le point noté  $x_0$ . Soit  $u$  le champ de déplacement solution du problème d'élasticité linéarisée isotrope correspondant :

$$u - \bar{u} \in V, \quad a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V, \quad [1]$$

où l'on a posé  $V = \{v = (v_i) : v_i \in H^1(\Omega) (i = 1, 2), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ ,  $a(u, v)$  la forme bilinéaire continue, symétrique et coercive de l'élasticité linéaire,  $L(v)$  la forme linéaire continue des forces appliquées. Le champ  $\bar{u}$ , dont les composantes sont données dans  $H^1(\Omega)$ , définit la condition de déplacement imposé sur la partie  $\Gamma_D$  de la frontière du corps.

Pour les problèmes bidimensionnels en déformation plane, la partie singulière du déplacement  $u$  solution de [1] est asymptotiquement égale en  $x_0$  à la somme des modes  $I$  et  $II$  (Lemaitre et Chaboche 1994) :

$$u_I = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \theta \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} (a + b \cos \theta) \quad [2]$$

$$u_{II} = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (c + 2 + \cos \theta) \\ \cos \frac{\theta}{2} (2 - c - \cos \theta) \end{pmatrix} \quad [3]$$

où les scalaires  $K_I$  et  $K_{II}$  sont les *facteurs d'intensité de contrainte*, et

$$a = 2 + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad b = -2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad c = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$

Les composantes de  $u_I$  et  $u_{II}$  sont dans  $H^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$  pour tout  $\varepsilon > 0$  (Grisvard 1985). Elles s'expriment comme combinaison linéaire des fonctions singulières suivantes :

$$F_1 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \quad F_2 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \quad F_3 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta, \quad F_4 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta$$

dans le système des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  en fond de fissure ( $r$  est la distance à  $x_0$  et  $\theta$  l'angle par rapport à la direction de la fissure).

On effectue une triangulation régulière du domaine *non fissuré*  $\bar{\Omega}$ , paramétrée par  $h > 0$  et telle que  $\Gamma_D$  soit une réunion d'arêtes. Notons  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  la base vectorielle des fonctions polynômiales par morceaux de degré  $k$  définies sur ce maillage et nulles sur  $\Gamma_D$ . Soit, par ailleurs, la fonction  $H$  de type Heaviside définie dans un voisinage de la fissure par la valeur  $+1$  d'un côté de  $\Gamma_C$  et  $-1$  de l'autre. L'espace d'approximation fourni par la méthode XFEM classique est l'ensemble  $V_h$  des fonctions

$$v_h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i + \sum_{i \in I_H} b_i H \psi_i + \sum_{i \in I_F} \sum_{j=1}^4 c_{ij} F_j \psi_i \quad [4]$$

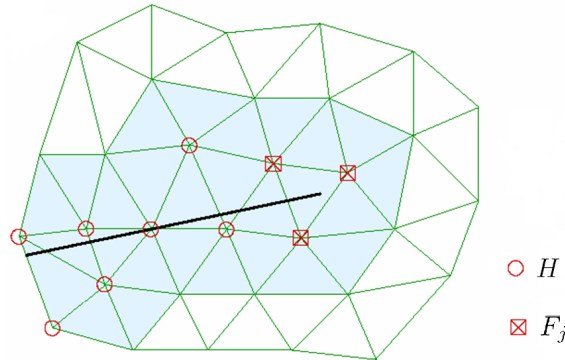
Dans cette définition, les scalaires  $a_i, b_i, c_{ij}$  sont des degrés de liberté et les  $\psi_1, \psi_2, \dots$  forment la base éléments finis vectorielle des fonctions polynômiales par morceaux de degré 1. Les fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots$  constituent localement une *partition de l'unité*. Les

ensembles d'indices  $I_H$  et  $I_F$  numérotent les degrés de liberté enrichis par la fonction saut  $H$  ou les fonctions singulières  $F_j$  respectivement (figure 1). Précisément, on intègre à la base d'approximation la fonction  $H\psi_i$  si le support de  $\psi_i$  est entièrement coupé par  $\Gamma_C$ , et l'on rajoute  $F_j\psi_i$  seulement pour une fonction de forme  $\psi_i$  associée à un sommet du triangle contenant la pointe de la fissure  $x_0$  (Moës *et al.* 1999).

Le problème approché défini à partir de [1] s'écrit :

$$u_h - \bar{u}_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h, \quad [5]$$

où  $\bar{u}_h$  est une approximation convenable de la donnée  $\bar{u}$  dans  $V_h$ .

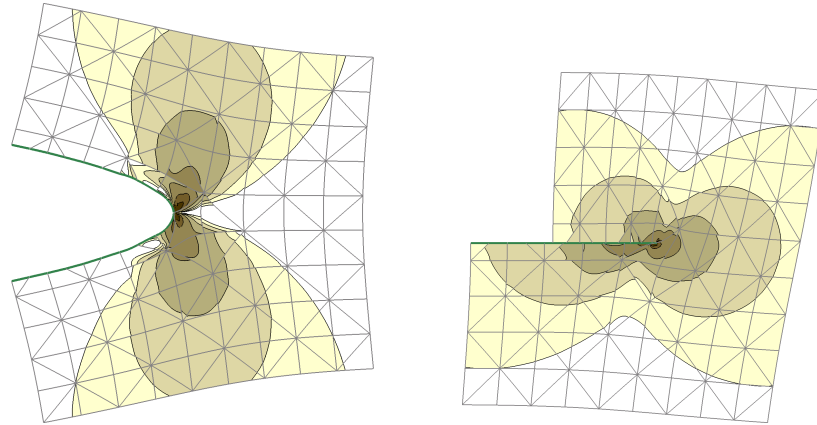


**Figure 1.** Sélection des nœuds enrichis avec la fonction saut  $H$  ou bien avec les fonctions de fond de fissure  $F_j$

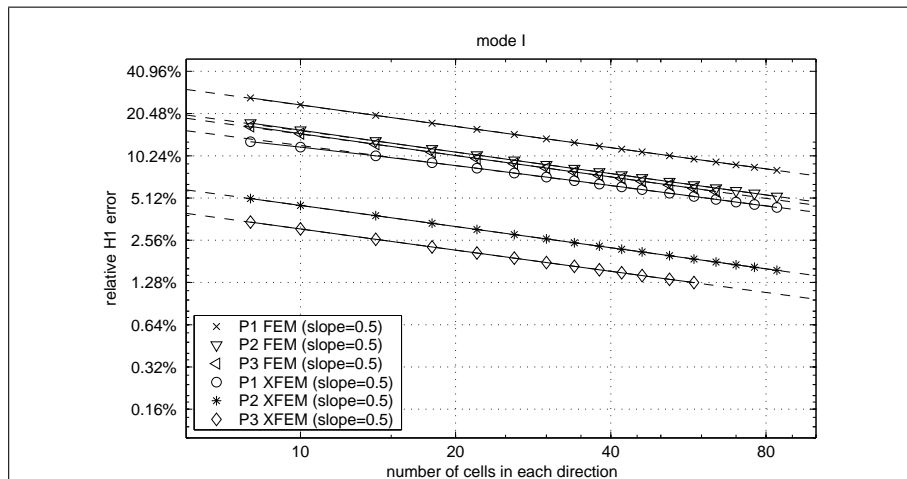
Les simulations ont été réalisées sur un problème test : domaine carré présentant une fissure rectiligne en mode I ou en mode II d'ouverture *purs* (la solution exacte est donc  $u = u_I$  ou  $u = u_{II}$  définis en [2] [3]). La formule de quadrature utilisée pour intégrer les termes singuliers de la matrice de rigidité élémentaire est détaillée dans la section suivante. La figure 2 présente la déformée et les courbes de niveau du critère de von Mises obtenus à l'aide de XFEM et des éléments finis de degré 3. Observons que l'approximation en fond de fissure n'est pas satisfaisante.

La figure 3 fournit une comparaison entre la méthode XFEM et la méthode des éléments finis classique pour une approximation polynômiale de degré  $k = 1, 2, 3$ . Même si la comparaison est à l'avantage de XFEM (niveau d'erreur plus faible à maillage fixé), on constate que la vitesse de convergence reste toujours égale à  $1/2$  (lorsque le paramètre de discrétisation  $h$  tend vers 0). Dans la méthode des éléments finis classique, la théorie nous dit que – compte tenu de la singularité en pointe de fissure – l'erreur (en norme de l'énergie) converge en  $\sqrt{h}$ , et cela quel que soit le degré  $k$ . En utilisant la méthode XFEM, les simulations numériques montrent que

la vitesse de convergence n'est pas améliorée, alors que la singularité elle-même est pourtant prise en compte dans l'approximation. En cela, nos résultats sont analogues à ceux de (Stazi *et al.* 2003).



**Figure 2.** Méthode XFEM classique  $P_3$  en mode I ou II d'ouverture de la fissure. Ensembles de niveau de la contrainte de von Mises



**Figure 3.** Vitesse de convergence de la méthode des éléments finis classique (FEM) et de la méthode XFEM pour une approximation polynômiale de degré 1, 2 ou 3. Echelles log., abscisses :  $1/h$ , ordonnées : erreur relative en norme de l'énergie

### 3. La méthode d'intégration quasi polaire

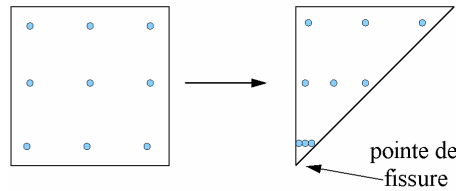
Une attention particulière doit être accordée à l'intégration numérique des termes singuliers de la matrice de rigidité élémentaire sur le triangle contenant la pointe de fissure  $x_0$ . Commençons par subdiviser ce dernier en un petit nombre de sous-triangles de telle sorte que  $x_0$  soit un sommet des sous-triangles le contenant. Sur un tel sous-triangle  $T$ , il s'agit de calculer numériquement une intégrale de la forme :

$$\int_T \nabla(F_i \varphi_j) \cdot \nabla(F_k \varphi_l) dx. \quad [6]$$

L'expression de celle-ci en coordonnées polaires relativement au fond de fissure permet d'éliminer la singularité en  $r^{-1/2}$  de  $\nabla F_i(x)$ . Soit la transformation géométrique  $\tau : (x_1, x_2) \rightarrow (x_1 x_2, x_2)$  qui applique le carré unité sur un triangle de référence tel qu'indiqué sur la figure 4. A partir d'une méthode de Gauss sur le carré, on définit alors une quadrature sur le triangle en prenant comme nouveaux points d'intégration  $\bar{\xi}$  et poids associés  $\bar{\eta}$  :

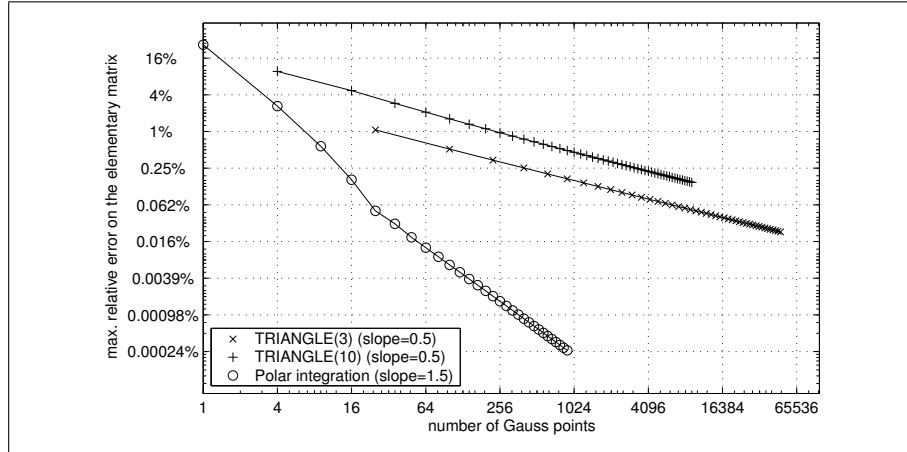
$$\bar{\xi} = \tau(\xi), \quad \bar{\eta} = \tau(\xi) \det(\nabla \tau).$$

Cette alternative pour calculer numériquement l'intégrale [6] sera appelée dans la suite "méthode d'intégration quasi polaire".



**Figure 4.** Transformation d'une méthode de quadrature sur le carré en une méthode de quadrature sur le triangle pour les fonctions de fond de fissure

Les performances de la méthode sont comparées avec celles d'une méthode de quadrature classique en calculant une matrice de rigidité élémentaire XFEM. L'erreur est évaluée à partir d'une matrice élémentaire calculée sur une subdivision très raffinée au voisinage de  $x_0$ . La figure 5 présente l'erreur relative en norme  $L^\infty$  entre cette valeur de référence et un calcul de la matrice élémentaire par l'une ou l'autre des stratégies (i) ou (ii) suivantes : (i) en utilisant un raffinement régulier du triangle et une méthode de Gauss fixée (d'ordre 3 ou 10), (ii) en utilisant la méthode d'intégration quasi polaire sans aucun raffinement, mais avec des quadrature de Gauss sur le carré d'ordre croissant. La figure montre que la méthode d'intégration quasi polaire donne d'excellents résultats avec un faible nombre de points d'intégration. En pratique, 25 points de Gauss suffisent pour les tests de convergence les plus précis (en gardant une méthode de Gauss classique sur les autres sous-triangles).



**Figure 5.** Comparaison des méthodes d'intégration numérique pour des fonctions singulières : raffinement uniforme avec une méthode de Gauss d'ordre 3 ou 10, et méthode d'intégration quasi polaire

#### 4. Elargissement de la zone d'enrichissement

On sait que l'erreur de convergence lorsque l'on approche le problème [1] par [5] est contrôlée par l'erreur d'interpolation commise sur la solution exacte. Pour comprendre les causes de la non-optimalité constatée, calculons effectivement une erreur d'interpolation XFEM sur un exemple. On se place dans un contexte 1D analogue pour simplifier. Soit la fonction  $f(x) = x (\ln x - 1)$  définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ ; cette fonction, singulière en  $x = 0$ , appartient à  $H^{3/2-\varepsilon}(0, 1)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . En notant  $h = 1/N$  où  $N$  est un entier, on considère la méthode d'éléments finis d'ordre 1 sur la subdivision  $x_i = ih$  de l'intervalle  $[0, 1]$  et l'on enrichit le nœud  $x = 0$  avec la singularité  $f$  elle-même. L'espace d'approximation XFEM correspondant est constitué des fonctions

$$v_h = \sum_{0 \leq i \leq N} a_i \phi_i + c_0 f \phi_0, \quad a_i, c_0 \in \mathbb{R},$$

où les  $\phi_i$  désignent les fonctions de forme éléments finis. L'interpolé XFEM  $I_h f$  de  $f$  s'identifie à la singularité  $f$  elle-même sur l'intervalle élémentaire  $[0, h]$  et à l'interpolé classique ailleurs. Un calcul simple montre que l'erreur d'interpolation XFEM en semi-norme  $H^1(0, 1)$  n'est pas mieux que

$$|f - I_h f|_1 \leq C\sqrt{h},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ . Bien que l'erreur d'interpolation XFEM sur le premier intervalle élémentaire soit nulle, l'erreur d'interpolation globale reste en  $\sqrt{h}$  comme pour la méthode d'éléments finis classique (même si la constante  $C$

est meilleure que dans l'erreur d'interpolation classique). Ceci résulte du fait que la taille de l'élément enrichi tend vers zéro comme  $h$ , de sorte que l'influence de l'enrichissement va en s'amointrissant.

Il semble donc naturel d'élargir la zone d'enrichissement à toute une région autour du fond de fissure, indépendante de la taille des mailles. Par exemple, on peut choisir d'enrichir avec les fonctions de fond de fissure  $F_j$  tous les nœuds contenus dans un disque  $B(x_0, R)$  centré au fond de fissure et de rayon  $R$  indépendant de  $h$ . Dans l'expression de l'approximation XFEM précédente [4], l'ensemble d'indices  $I_F$  est donc remplacé par un ensemble  $I_F(R)$  convenable.

Par ailleurs, pour le terme d'enrichissement en  $H$  dans la définition de l'espace d'approximation [4], on choisit dorénavant la partition de l'unité fournie par les fonctions de forme  $\varphi_i$  de la méthode d'éléments finis choisie. Ainsi l'approximation du saut :

$$[u_h] = 2 \sum_{i \in I_H} b_i \varphi_i \quad \text{sur } \Gamma_C,$$

sera consistante avec l'approximation éléments finis de degré  $k$  dans le domaine. On a encore noté  $I_H$  le nouvel ensemble d'indices d'enrichissement discontinu après le changement de partition de l'unité.

Reprenons le problème test de la figure 1 avec (i) une partition de l'unité de degré  $k$  pour l'enrichissement par la fonction  $H$ , (ii) un disque de rayon  $R$  égal au dixième du côté du carré  $\Omega$  pour la zone d'enrichissement par les fonctions  $F_j$ . L'erreur en norme de l'énergie est alors en  $h^\alpha$ , où la vitesse de convergence  $\alpha$  vaut 0.9, 1.8 ou 2.6 selon le degré  $k = 1, 2$  ou 3 (au lieu de  $\alpha = 0.5$  auparavant). On obtient ainsi une précision presque optimale. L'idée d'élargir la zone d'enrichissement singulier a été développée indépendamment par (Béchet *et al.* 2005) et (Laborde *et al.* 2005).

## 5. Une condition de liaison entre degrés de liberté d'enrichissement

Dans l'approche présentée à la section précédente, le nombre de degrés de liberté va naturellement augmenter quelque peu, mais surtout on peut observer une dégradation sévère du conditionnement quand on monte en degré  $k$  ou lorsque  $h$  diminue (figure 6). Ce phénomène peut notamment s'expliquer par le fait que les fonctions d'enrichissement  $F_j \varphi_i$  ne sont pas linéairement indépendantes au niveau élémentaire. Ainsi, pour une partition de l'unité  $P_1$ , on a les deux relations de dépendance linéaire :

$$p_2 (F_1 - F_4) + p_1 F_3 = 0, \quad p_2 (F_3 - F_2) + p_1 F_4 = 0,$$

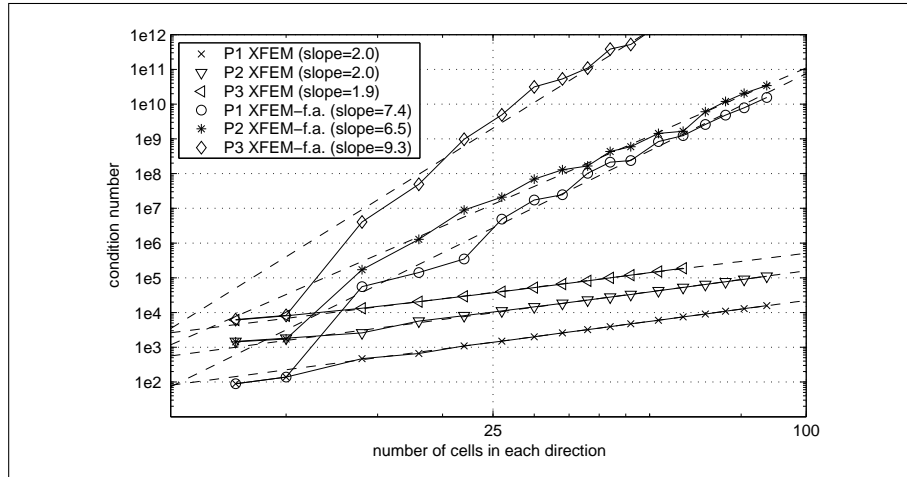
où les  $p_i$  désignent les fonctions de base linéaires sur le triangle de référence :

$$p_1(x) = x_1, \quad p_2(x) = x_2 \quad \text{et} \quad p_3(x) = 1 - x_1 - x_2.$$

Si on utilise une partition de l'unité  $P_2$ , on trouve six relations de cette nature. Ceci justifie l'utilisation que l'on fait habituellement d'une partition de l'unité  $P_1$  pour



les fonctions singulières (Moës *et al.* 1999) (Stazi *et al.* 2003). Mais, même dans ce cas-là, l'élargissement de la zone d'enrichissement va multiplier ces situations de non-unisolvance locale, ce qui explique au moins en partie la dégradation du conditionnement constatée.



**Figure 6.** Conditionnement pour le problème du mode I : comparaison entre la méthode XFEM classique et la méthode avec une zone d'enrichissement fixe XFEM-f.a. (fixed aera)

C'est pourquoi nous introduisons une *condition de liaison* entre les degrés de liberté correspondant à l'enrichissement sur  $B(x_0, R)$  en fond de fissure (voir section précédente). Précisément, pour chaque composante du vecteur déplacement, on impose à tous les degrés de liberté relatifs à l'enrichissement singulier d'être égaux entre eux. En notant  $T_R(x)$  la fonction continue et affine par morceaux qui vaut 1 aux sommets dans  $B(x_0, R)$  et 0 aux autres sommets, l'espace d'approximation  $V_h$  est maintenant l'ensemble des fonctions

$$v_h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i + \sum_{i \in I_H} b_i H \varphi_i + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^4 c_{jk} F_j T_R e_k$$

avec  $a_i, b_i, c_{jk} \in \mathbb{R}$ , et où l'on a noté  $e_1, e_2$  la base canonique dans le plan. Le conditionnement s'en trouve sensiblement amélioré (figure 7), mais la vitesse de convergence est moins bonne que précédemment. Sur le cas test, celle-ci est maintenant de 0.5, 1.5, 2.6 pour des polynômes de degré 1, 2, 3 respectivement.

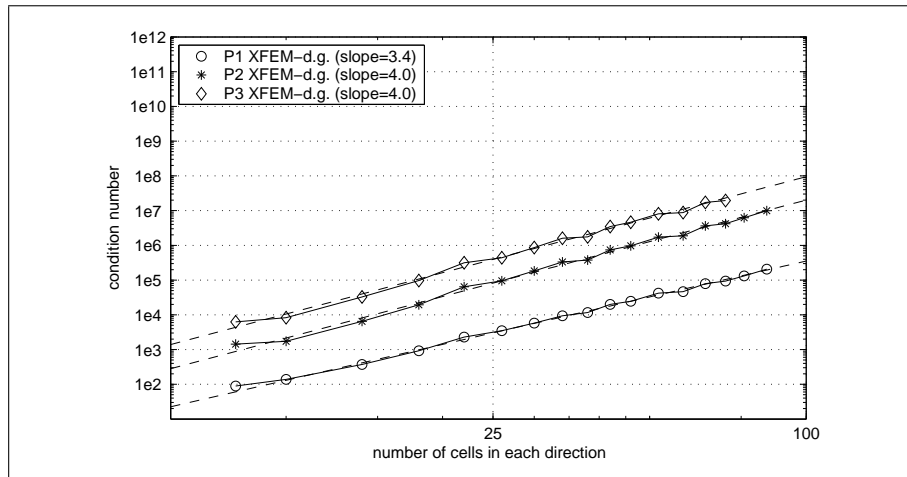
## 6. Raccord ponctuel au bord de la zone d'enrichissement

Pour comprendre le résultat précédent, considérons à nouveau un exemple 1D. Soit une fonction  $f$  à valeurs scalaires, définie sur l'intervalle  $[-1/2, +1/2]$  et "sin-

gulière” en  $x_0 \in (-1/2, 0)$ . On choisit la méthode des éléments finis  $P_1$  sur la subdivision  $x_i = ih$  de  $[-1/2, +1/2]$  et l’on enrichit par la fonction  $f$  les nœuds  $x_i \leq 0$  avec égalité des degrés de liberté d’enrichissement entre eux (section 5). L’interpolé XFEM  $I_h f$  de  $f$  s’identifie donc à  $f$  sur  $[-1/2, 0]$  et à l’interpolé classique sur  $[h, +1/2]$ . Sur l’intervalle de transition  $[0, h]$ , la base locale XFEM et l’interpolé s’écrivent respectivement :

$$\left(1 - \frac{x}{h}\right), \frac{x}{h}, f(x) \left(1 - \frac{x}{h}\right) \quad \text{et} \quad I_h f(x) = \left(1 - \frac{x}{h}\right) f(x) + \frac{x}{h} f(h).$$

Il suit que l’erreur d’interpolation XFEM locale est nulle sur les intervalles élémentaires  $[(n-1)h, nh]$  ( $n \leq 0$ ). Sur l’intervalle de transition, un calcul simple montre que l’erreur locale d’interpolation  $L_2$  avec XFEM est en  $h^{3/2}$ , alors que sur les autres intervalles élémentaires  $[nh, (n+1)h]$  ( $n \geq 1$ ), celle-ci est classiquement en  $h^{5/2}$ . L’erreur globale d’interpolation  $L_2$  sera donc en  $h^{3/2}$  au lieu de  $h^2$  classiquement. La perte d’optimalité provient de l’interpolation sur l’élément de transition.



**Figure 7.** Conditionnement pour le problème du mode I avec la variante XFEM–d.g (dof gathering) utilisant la condition de liaison des degrés de liberté d’enrichissement

Revenons un instant sur la méthode de la *partition de l’unité* PUFEM originale introduite par (Melenk et Babuška 1996). La théorie assure une précision optimale pour cette méthode d’approximation définie par une partition de l’unité globale sur tout  $\Omega$ . Dans notre problème test, envisageons donc une partition de l’unité à deux termes correspondant à un recouvrement du domaine fissuré par deux sous-domaines, le premier  $\Omega^1$  contenant les éléments finis classiques, le second  $\Omega^2$  contenant les éléments totalement enrichis, enfin l’intersection  $\Omega^1 \cap \Omega^2$  étant égale à la réunion des éléments de transition précédents. En ignorant l’enrichissement discontinu, la seule différence avec l’approche XFEM précédente concerne la zone de transition  $\Omega^1 \cap \Omega^2$ . L’étude de l’erreur de convergence dans ce nouveau contexte montre que l’ordre de

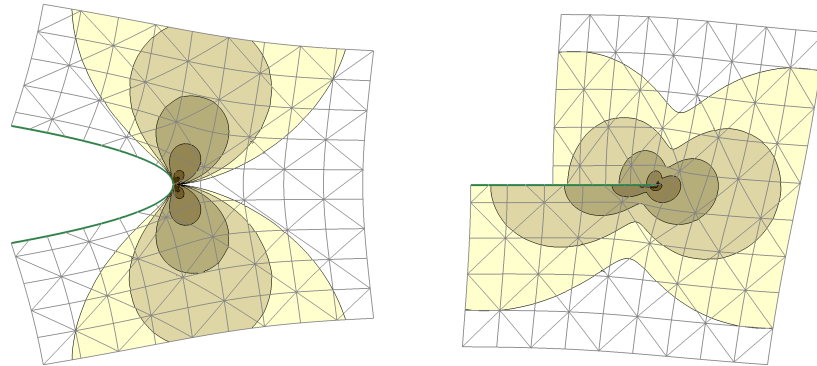
l'erreur ne dépend pas, en fait, de la largeur de la zone de transition  $\Omega^1 \cap \Omega^2$  (Melenk et Babuška 1996) (Laborde *et al.* 2005). D'où l'idée de faire tendre cette dimension vers zéro et d'introduire une *condition de raccord* (ponctuel ou intégral) entre la zone des éléments totalement enrichis et son complémentaire constitué des éléments non enrichis (par les fonctions de fond de fissure).

Précisément, soit  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  une *partition* du domaine non fissuré  $\bar{\Omega}$ , où  $\Omega^i$  est une réunion de triangles du maillage, le fond de fissure appartenant disons à  $\Omega^2$ . On définit alors le nouveau déplacement approché  $u_h$  de la manière suivante :  $u_h = u_h^i$  sur  $\Omega^i$  où :

$$u_h^1 = \sum_{i \in I(\Omega^1)} a_i \varphi_i + \sum_{i \in I_H(\Omega^1)} b_i H \varphi_i,$$

$$u_h^2 = \sum_{i \in I(\Omega^2)} a_i \varphi_i + \sum_{i \in I_H(\Omega^2)} b_i H \varphi_i + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^4 c_j^k F_j e_k,$$

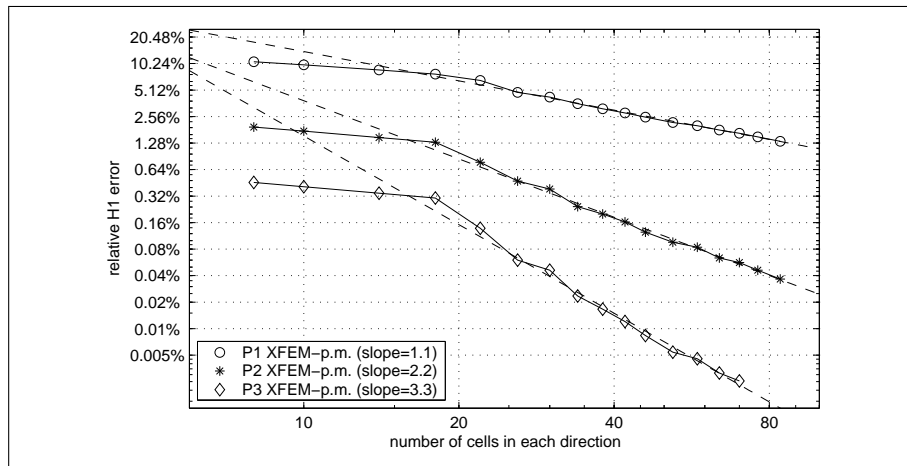
Aux nœuds de l'interface entre  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$ , on impose l'égalité des déplacements  $u_h^1$  et  $u_h^2$  en utilisant une technique d'élimination de degrés de liberté. Les ensembles d'indices  $I(\Omega^i)$  et  $I_H(\Omega^i)$  désignent les degrés de liberté convenables relatifs à  $\Omega^i$ . Naturellement l'approximation sera *non conforme*, au sens où la continuité du champ de déplacement éléments finis enrichi n'est pas assurée partout sur l'interface.



**Figure 8.** Méthode XFEM avec raccord ponctuel ; à comparer avec la figure 2

Reprenons le cas test du carré fissuré en mode I. On choisit pour  $\Omega^2$  un sous-domaine carré construit sur le maillage, centré à la pointe de la fissure, et dont le côté de l'ordre du cinquième du côté du domaine (section 4). Le champ de contrainte est maintenant restitué d'une manière très précise, au vu de la figure 8. Les courbes de convergence (figure 9) montrent que l'on atteint l'optimalité, et cela pour un coût analogue et un conditionnement du même ordre qu'avec XFEM classique. (En fait, on observe même une légère superconvergence liée sans doute à l'exemple considéré).

Dans le cas d'une fissure quelconque, d'autres termes apparaissent dans le développement asymptotique de la partie singulière du déplacement en fond de fissure (Grisvard 1985). L'erreur est alors au mieux en  $h^{3/2}$  sauf à tenir compte des fonctions singulières suivantes, ce qui n'aurait d'intérêt que pour une approximation polynomiale de degré deux au moins. On trouvera dans (Laborde *et al.* 2005) certains compléments au présent article.



**Figure 9.** Vitesse de convergence pour la variante avec raccord ponctuel XFEM-p.m. (pointwise matching) ; à comparer avec la figure 3

## 7. Bibliographie

- Béchet E., Moës N., Burgardt B., « Improved implementation and robustness study of the XFEM method for stress analysis around cracks », *Int. J. Appl. Numer. Meth. Engrg.*, 2005.
- Grisvard P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman Publishing, London, 1985.
- Laborde P., Pommier J., Renard Y., Salaün M., « High order extended finite element method for cracked domains », *Int. J. Appl. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 64, p. 354-381, 2005.
- Lemaitre J., Chaboche J.-L., *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1994.
- Melenk J., Babuška I., « The partition of unity finite element method : Basic theory and applications », *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 139, p. 289-314, 1996.
- Moës N., Dolbow J., Belytschko T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 46, p. 131-150, 1999.
- Stazi F., Budyn E., Chessa J., Belytschko T., « An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks », *Computational Mechanics*, vol. 31, p. 38-48, 2003.