

---

# Formulation éléments finis de problèmes élastoacoustiques avec interface dissipative

**Walid Larbi — Jean-François Deü — Roger Ohayon**

*Conservatoire National des Arts et Métiers  
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés  
2 rue Conté, F-75003 Paris  
walid.larbi@cnam.fr; deu@cnam.fr; ohayon@cnam.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article, on présente une nouvelle formulation éléments finis pour les problèmes d'élastoacoustique avec interface dissipative. L'approche proposée est basée sur l'introduction du champ de déplacement normal du fluide au niveau des interfaces dissipatives ce qui permet de transposer les formulations du domaine fréquentiel au domaine temporel lorsque le fluide est décrit par un champ scalaire comme la pression. Deux modèles d'amortissement pour prendre en compte l'effet dissipatif de l'interface sont présentés: le modèle de Kelvin-Voigt avec l'aspect symétrisation du problème et celui de Zener. L'effet amortissant de l'interface est analysé sur des exemples simples dans les domaines fréquentiel et temporel.*

*ABSTRACT. In this paper, a new finite element formulation for elastoacoustic problem with dissipative interface is presented. The proposed approach is based on the introduction of the normal fluid displacement field on the damped interface which allows to transpose formulations in frequency domain to time domain when the fluid is described by a scalar field like the pressure. Two dissipative interface models are presented: the Kelvin-Voigt model with the associated symmetric formulation and the Zener model. The damping effect of the interface is analyzed by mean of examples in transient and frequency domain.*

*MOTS-CLÉS : interaction fluide-structure, élastoacoustique, interface dissipative, méthode des éléments finis, déplacement fluide normal à l'interface.*

*KEYWORDS: fluid-structure interaction, elastoacoustic, dissipative interface, finite element method, normal fluid displacement field at the interface.*

---

## 1. Introduction

Dans le contexte général de la réduction du bruit, ce travail concerne les formulations éléments finis de problèmes vibroacoustiques avec interfaces dissipatives. L'originalité de l'approche proposée est liée à l'introduction du champ de déplacement normal du fluide  $\eta$  au niveau des interfaces dissipatives permettant de transposer les formulations du domaine fréquentiel vers le domaine temporel lorsque le fluide est décrit par un champ scalaire de type pression ou potentiel de déplacement. Une formulation utilisant cette nouvelle variable scalaire  $\eta$  pour décrire l'interface permet d'introduire différents modèles d'amortissement pour prendre en compte la dissipation de l'énergie acoustique. Dans ce papier, on considère en première approche des modèles simples d'amortissement de type Kelvin-Voigt et Zener dans le cadre d'une interface infiniment mince (Deü *et al.* 2005). Il est important de noter que d'autres formulations sont proposées dans la littérature utilisant comme variable soit le potentiel de déplacement fluide (Kehr-Candille *et al.* 1992, Ohayon *et al.* 1998) soit le champ de déplacement fluide (Bermúdez *et al.* 1999). Dans le premier cas, le problème aux valeurs propres associé est non-linéaire (non quadratique en fonction de la fréquence) et de résolution coûteuse par exemple par balayage en fréquence. Dans le second cas, la variable principale étant vectorielle, le système est de plus grande taille et donc également plus coûteux à résoudre. De plus, il est nécessaire d'utiliser des éléments finis particuliers pour prendre en compte l'irrotationnalité du fluide.

On présente dans cet article une formulation éléments finis du problème faisant intervenir le déplacement de la structure  $\mathbf{u}$ , la pression du fluide  $p$  et la nouvelle variable  $\eta$  à l'interface fluide-structure. Cette nouvelle formulation conduit à première vue à une écriture matricielle non symétrique. Dans le cas particulier où l'interface est modélisée par un modèle de Kelvin-Voigt, la symétrisation s'obtient par l'introduction du potentiel de déplacement  $\varphi$  comme variable additionnelle intermédiaire (Morand *et al.* 1995). Des exemples numériques sont présentés pour (i) valider la formulation proposée par comparaison avec des résultats d'analyse modale donnés dans littérature, et (ii) étudier l'influence de l'amortissement sur la réponse dynamique du système en comparant les méthodes d'intégration directe et de superposition modale.

## 2. Formulation éléments finis du problème élastoacoustique avec interface absorbante

On considère une structure élastique remplie par un fluide linéaire acoustique et soumise à des forces extérieures. La dissipation de l'énergie élastoacoustique s'effectue grâce à une interface dissipative modélisée par milieu infiniment mince et sans masse dont la loi de comportement est de type viscoélastique. On présente dans cette section (i) les équations locales et la formulation variationnelle du problème couplé avec interface absorbante représentée par un modèle de Kelvin-Voigt et (ii) les équations matricielles correspondantes en termes de déplacement de la structure, déplacement fluide normal à l'interface absorbante, et pression (et/ou potentiel de déplacement) dans le fluide. L'introduction du champ  $\eta$  a pour objectif d'aboutir à des

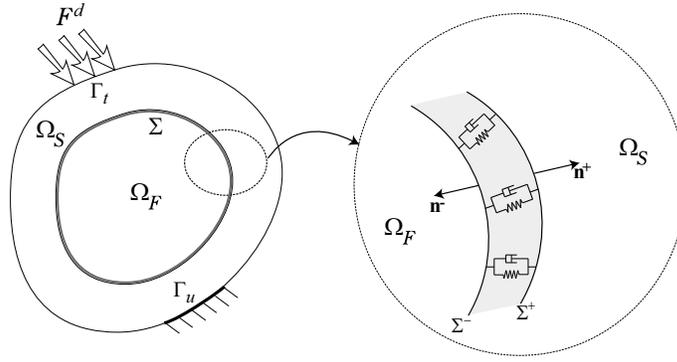
équations matricielles du second ordre en temps (ou quadratique en fréquence) à coefficients constants faisant intervenir selon les cas des matrices symétriques ou non. De façon explicite, il s'agit d'aboutir à des systèmes matriciels de type :

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathcal{D}\dot{\mathbf{X}} + \mathcal{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad \text{ou} \quad (\mathcal{K} + i\omega\mathcal{D} - \omega^2\mathcal{M})\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad [1]$$

où les matrices  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{K}$  sont indépendantes du temps (ou de la fréquence).

### 2.1. Equations du mouvement de la structure

On considère une structure élastique à l'équilibre occupant le domaine  $\Omega_S$  contenant un fluide occupant le domaine  $\Omega_F$ . La structure est soumise à une force extérieure sur  $\Gamma_t$  et encastrée sur  $\Gamma_u$  (figure 1).



**Figure 1.** Géométrie du problème d'interaction fluide-structure

La structure est décrite par son champ de déplacement  $\mathbf{u}^S$  auquel on associe les tenseurs de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^S)$  et de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^S)$ . Enfin, on note  $\rho_S$  la masse volumique de la structure et  $\mathbf{n}^S$  sa normale unitaire extérieure.

Les équations locales décrivant la réponse de la structure soumise aux forces extérieures  $\mathbf{F}^d$  appliquées sur  $\Gamma_t$  sont :

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^S) - \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}^S}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad [2a]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^S)\mathbf{n}^S = \mathbf{F}^d \quad \text{sur } \Gamma_t \quad [2b]$$

$$\mathbf{u}^S = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad [2c]$$

De plus, les conditions de continuité entre la structure et l'interface absorbante s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^S)\mathbf{n}^S + \sigma^I \mathbf{n}^+ = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Sigma^+ \quad [3a]$$

$$(\mathbf{u}^S - \mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n}^+ = 0 \quad \text{sur } \Sigma^+ \quad [3b]$$

où  $\Sigma^+$  est l'interface vue du coté de la structure,  $\sigma^I$  est la contrainte unidimensionnelle sur l'interface,  $\mathbf{n}^+$  et  $\mathbf{u}^+$  représentent respectivement la normale extérieure à l'interface (entrante dans  $\Omega_S$ ) et le champ de déplacement sur  $\Sigma^+$ .

## 2.2. Equations du mouvement du fluide

On considère un fluide non visqueux, homogène, compressible, barotrope. Le fluide est décrit par son champ de pression  $p$  vérifiant l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad [4]$$

où  $c$  est la vitesse de propagation des ondes dans le fluide.

Les conditions de continuité entre le fluide et l'interface absorbante s'écrivent :

$$-p \mathbf{n}^F + \sigma^I \mathbf{n}^- = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Sigma^- \quad [5a]$$

$$(\mathbf{u}^F - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^- = 0 \quad \text{sur } \Sigma^- \quad [5b]$$

où  $\Sigma^-$  est l'interface vue du coté du fluide,  $\mathbf{n}^F$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega_F$ ,  $\mathbf{n}^-$  est la normale unitaire sur l'interface  $\Sigma^-$  entrante dans  $\Omega_F$ , et  $\mathbf{u}^-$  est le champ de déplacement sur  $\Sigma^-$ .

De plus, l'équation d'Euler linéarisée appliquée sur le bord  $\Sigma^-$  permet d'écrire l'équation suivante :

$$\nabla p \cdot \mathbf{n}^F = -\rho_F \frac{\partial^2 \mathbf{u}^F}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n}^F \quad \text{sur } \Sigma^- \quad [6]$$

où  $\rho_F$  est la masse volumique du fluide à l'équilibre.

## 2.3. Loi de comportement de l'interface dissipative

On rappelle que le troisième milieu entre le fluide et la structure est sans épaisseur ( $\Sigma = \Sigma^+ = \Sigma^-$  et  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^F = \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$ ) et sans masse. Pour le modèle de Kelvin-Voigt, la contrainte à l'interface est donnée par :

$$\sigma^I = k^I (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} + d^I \left( \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \quad [7]$$

où  $k^I$  et  $d^I$  sont les paramètres du modèle d'amortissement. Ainsi, la contrainte est la somme d'un premier terme proportionnel au saut du déplacement normal à l'interface qui représente l'aspect élastique de la couche amortissante et un second terme proportionnel au saut de la vitesse normale à l'interface qui caractérise son aspect visqueux.

#### 2.4. Problème aux limites en termes de $(\mathbf{u}, \eta, p)$

La description du fluide par un champ scalaire (pression et/ou potentiel de déplacement fluide) présente un désavantage lors de la présence d'une paroi absorbante : la dépendance complexe en fréquence ne permet pas en général d'écrire le problème associé en temps. Pour remédier à cet inconvénient, il est nécessaire d'introduire le déplacement fluide normal au niveau de l'interface dissipative. Avec cette nouvelle inconnue scalaire notée  $\eta = \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}$  et en remplaçant  $\mathbf{u}^S$  par  $\mathbf{u}$  dans la suite, le problème d'interaction fluide-structure avec interface absorbante s'écrit :

– Structure

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad [8a]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}^S = \mathbf{F}^d \quad \text{sur } \Gamma_t \quad [8b]$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad [8c]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}^S = - \left[ k^I (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \eta) + d^I \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right] \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad [8d]$$

– Fluide

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad [9a]$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = -\rho_F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad \text{sur } \Sigma \quad [9b]$$

– Interface absorbante

$$p + k^I (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \eta) + d^I \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{on } \Sigma \quad [10]$$

#### 2.5. Formulation variationnelle

On procède dans cette partie par la méthode des fonctions-tests pour écrire la formulation variationnelle du problème. Dans un premier temps, on introduit l'espace  $C_u$  des fonctions suffisamment régulières  $\mathbf{u}$  définies dans  $\Omega_S$ . En multipliant scalairement l'équation [8a] par une fonction-test  $\delta \mathbf{u} \in C_u^* = \{\delta \mathbf{u} \in C_u / \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u\}$  indépendante du temps et en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} \operatorname{tr} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u})] \, dx + \int_{\Omega_S} \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, dx - k^I \int_{\Sigma} \eta \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma + k^I \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma \\ - d^I \int_{\Sigma} \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma + d^I \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma = \int_{\Gamma_t} \mathbf{F}^d \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma \quad [11] \end{aligned}$$

De même, on introduit l'espace  $C_p$  des fonctions  $p$  définies dans  $\Omega_F$ . En multipliant scalairement l'équation [9a] par une fonction-test  $\delta p \in C_p$  indépendante du temps et en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \nabla p \cdot \nabla \delta p \, dx + \frac{1}{\rho_F c^2} \int_{\Omega_F} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \delta p \, dx + \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta p \, d\sigma = 0 \quad [12]$$

Finalement, en introduisant l'espace des fonctions test  $C_\eta$  et en multipliant l'équation [10] par une fonction-test  $\delta \eta \in C_\eta$  indépendante du temps, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} p \delta \eta \, d\sigma - k^I \int_{\Sigma} \eta \delta \eta \, d\sigma + k^I \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta \eta \, d\sigma \\ - d^I \int_{\Sigma} \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \eta \, d\sigma + d^I \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \delta \eta \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad [13]$$

Ainsi, la formulation variationnelle du problème élastoacoustique avec interface absorbante consiste à trouver  $(\mathbf{u}, p, \eta) \in (C_u, C_p, C_\eta)$  tels que les équations [11, 12, 13] soient satisfaites  $\forall (\delta \mathbf{u}, \delta p, \delta \eta) \in (C_u^*, C_p, C_\eta)$  avec des conditions initiales appropriées.

## 2.6. Discrétisation par éléments finis

Après discrétisation par éléments finis des formes bilinéaires intervenant dans la formulation variationnelle, on obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\eta p}^T & \mathbf{K}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{H}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d^I \mathbf{G}_u & -d^I \mathbf{G}_{u\eta} & \mathbf{0} \\ -d^I \mathbf{G}_{u\eta}^T & d^I \mathbf{G}_\eta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{H}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_u + k^I \mathbf{G}_u & -k^I \mathbf{G}_{u\eta} & \mathbf{0} \\ -k^I \mathbf{G}_{u\eta}^T & k^I \mathbf{G}_\eta & -\mathbf{C}_{\eta p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [14]$$

Dans l'équation [14],  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{P}$  sont les vecteurs des degrés de liberté relatifs à  $\mathbf{u}$ ,  $\eta$  et  $p$ , le vecteur des efforts extérieurs appliqués à la structure, noté  $\mathbf{F}$ , est défini par  $\int_{\Gamma_t} \mathbf{F}^d \cdot \delta \mathbf{u} \, dx \Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}$ , et les sous-matrices sont définies par :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} \text{tr} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u})] \, dx &\Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_u \mathbf{U}, & \int_{\Omega_S} \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, dx &\Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{U}} \\ \frac{1}{\rho_F c^2} \int_{\Omega_F} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \delta p \, dx &\Rightarrow \delta \mathbf{P}^T \mathbf{K}_p \ddot{\mathbf{P}}, & \frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \nabla p \cdot \nabla \delta p \, dx &\Rightarrow \delta \mathbf{P}^T \mathbf{F}_p \mathbf{P} \\ \int_{\Sigma} p \delta \eta \, d\sigma &\Rightarrow \delta \mathbf{H}^T \mathbf{C}_{\eta p} \mathbf{P}, & \int_{\Sigma} \eta \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma &\Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{G}_{u\eta} \mathbf{H} \\ \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma &\Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{G}_u \mathbf{U}, & \int_{\Sigma} \eta \delta \eta \, d\sigma &\Rightarrow \delta \mathbf{H}^T \mathbf{G}_\eta \mathbf{H} \end{aligned} \quad [15]$$

Il convient de remarquer que le système précédent n'est pas symétrique.

### 3. Symétrisation du problème spectral avec interface dissipative

Dans cette section, on présente la procédure de symétrisation du problème élastoacoustique avec interface dissipative de type Kelvin-Voigt. La symétrisation est obtenue par l'introduction d'un potentiel de déplacement fluide  $\varphi$  tel que  $\mathbf{u}^F = \nabla\varphi$  (voir (Morand *et al.* 1995) pour plus de détail). Les équations du problème spectral associé se réécrivent en fonction  $(\mathbf{u}, \eta, p, \varphi)$  sous la forme :

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \omega^2 \rho_S \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad [16a]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}^S = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_t \quad [16b]$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad [16c]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}^S = - [k^I(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \eta) + i\omega d^I(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \eta)] \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad [16d]$$

$$\rho_F \Delta\varphi + \frac{p}{c^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad [16e]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \eta \quad \text{sur } \Sigma \quad [16f]$$

$$\frac{p}{\rho_F c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \varphi \quad \text{dans } \Omega_F \quad [16g]$$

$$-\omega^2 \rho_F \varphi = k^I(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \eta) + i\omega d^I(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \eta) \quad \text{sur } \Sigma \quad [16h]$$

Ainsi, en procédant comme dans la section 2.5, la formulation variationnelle du problème consiste à trouver  $\omega$  et  $(\mathbf{u}, \eta, p, \varphi) \in (C_u, C_\eta, C_p, C_\varphi)$  tels que  $\forall (\delta\mathbf{u}, \delta\eta, \delta p, \delta\varphi) \in (C_u^*, C_\eta, C_p, C_\varphi)$  on ait :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_S} \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u})] \, dx - \omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} \, dx \\ & - k^I \int_{\Sigma} \eta \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\sigma + k^I \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\sigma \end{aligned} \quad [17]$$

$$\begin{aligned} & - i\omega d^I \int_{\Sigma} \eta \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\sigma + i\omega d^I \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\sigma = 0 \\ & - \rho_F \int_{\Omega_F} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, dx + \rho_F \int_{\Sigma} \eta \delta\varphi \, d\sigma + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_F} p \delta\varphi \, dx = 0 \end{aligned} \quad [18]$$

$$\frac{1}{\rho_F c^2} \int_{\Omega_F} p \delta p \, dx - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega_F} \varphi \delta p \, dx = 0 \quad [19]$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho_F \int_{\Sigma} \varphi \delta\eta \, d\sigma + k^I \int_{\Sigma} \eta \delta\eta \, d\sigma - k^I \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta\eta \, d\sigma \\ & + i\omega d^I \int_{\Sigma} \eta \delta\eta \, d\sigma - i\omega d^I \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta\eta \, d\sigma = 0 \end{aligned} \quad [20]$$

Après discrétisation par éléments finis, la formulation variationnelle précédente peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\left[ \begin{array}{cccc} \left( \begin{array}{cccc} \mathbf{K}_u + k^I \mathbf{G}_u & -k^I \mathbf{G}_{u\eta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -k^I \mathbf{G}_{u\eta}^T & k^I \mathbf{G}_\eta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) & + i\omega \left( \begin{array}{cccc} d^I \mathbf{G}_u & -d^I \mathbf{G}_{u\eta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -d^I \mathbf{G}_{u\eta}^T & d^I \mathbf{G}_\eta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) & & \\ & & & -\omega^2 \left( \begin{array}{cccc} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T & \mathbf{B}^T & -\mathbf{F}_\varphi \end{array} \right) \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{P} \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad [21]$$

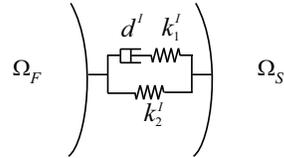
où  $\Phi$  est le vecteur des degrés de liberté relatifs à  $\varphi$  et avec :

$$\begin{aligned} \rho_F \int_{\Sigma} \varphi \delta \eta \, d\sigma &\Rightarrow \delta \Phi^T \mathbf{A} \mathbf{H} \quad , \quad \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma} \varphi \delta p \, d\sigma \Rightarrow \delta \Phi^T \mathbf{B} \mathbf{P} \\ \rho_F \int_{\Omega_F} \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \varphi \, dx &\Rightarrow \delta \Phi^T \mathbf{F}_\varphi \Phi \end{aligned} \quad [22]$$

En adoptant la procédure décrite dans (Morand *et al.* 1995),  $\Phi$  peut être éliminé au profit des autres variables. Nous n'entrons pas ici dans le détail de cette dérivation qui fait également intervenir une discussion sur le comportement limite à fréquence nulle des formulations présentées (cf. (Larbi *et al.* soumis, 2005)). L'équation [21] se transpose directement dans le domaine temporel. Dans ce cas, le système reste symétrique et le second membre de l'équation fait intervenir les efforts appliqués.

#### 4. Extension au modèle de Zener

On propose dans cette section de modéliser l'effet dissipatif de l'interface par un modèle de Zener (figure 2).



**Figure 2.** Modèle de Zener à l'interface fluide-structure

Dans ce cas, les équations du problème élastoacoustique sont :

– Structure

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad [23a]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}^S = \mathbf{F}^d \quad \text{sur } \Gamma_t \quad [23b]$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad [23c]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}^S = \quad [23d]$$

$$- \left[ \frac{d^I}{k_1^I} \frac{\partial p}{\partial t} + k_2^I (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \eta) + d^I \left( 1 + \frac{k_2^I}{k_1^I} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right] \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad [23e]$$

– Fluide

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad [24a]$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = -\rho_F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad \text{sur } \Sigma \quad [24b]$$

– Interface absorbante

$$p + \frac{d^I}{k_1^I} \frac{\partial p}{\partial t} + k_2^I (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \eta) + d^I \left( 1 + \frac{k_2^I}{k_1^I} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad [25]$$

D'une façon analogue au modèle de Kelvin-Voigt, la formulation variationnelle du problème s'obtient par la méthode des fonctions-tests, et le système matriciel final s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\eta p}^T & \mathbf{K}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{H}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d^I \left( 1 + \frac{k_2^I}{k_1^I} \right) \mathbf{G}_u & -d^I \left( 1 + \frac{k_2^I}{k_1^I} \right) \mathbf{G}_{u\eta} & \frac{d^I}{k_1^I} \mathbf{C}_{up} \\ -d^I \left( 1 + \frac{k_2^I}{k_1^I} \right) \mathbf{G}_{u\eta}^T & d^I \left( 1 + \frac{k_2^I}{k_1^I} \right) \mathbf{G}_\eta & -\frac{d^I}{k_1^I} \mathbf{C}_{\eta p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{H}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_u + k_2^I \mathbf{G}_u & -k_2^I \mathbf{G}_{u\eta} & \mathbf{0} \\ -k_2^I \mathbf{G}_{u\eta}^T & k_2^I \mathbf{G}_\eta & -\mathbf{C}_{\eta p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad [26]$$

où  $\mathbf{C}_{up}$  est la sous-matrice définie par :

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial t} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma \Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{C}_{up} \dot{\mathbf{P}}$$

L'analyse de cette formulation fait l'objet de recherches en cours.

### 5. Validation : analyse modale d'une cavité acoustique amortie

Pour valider la formulation présentée, on se propose tout d'abord de calculer les modes propres d'une cavité acoustique amortie de dimension (1m×1m), contenant de l'air ( $\rho_F = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 340 \text{ m/s}$ ) et dont la face supérieure est absorbante. On utilise ici le modèle de Kelvin-Voigt avec comme paramètres  $k^I = 5 \times 10^6 \text{ Pa/m}$  et  $d^I = 50 \text{ Pa.s/m}$  qui correspondent à des coefficients moyens d'impédance d'une laine de verre typique dans une plage de fréquence [50-500 Hz] (Bermúdez *et al.* 1999).

Le tableau 1 présente les fréquences propres de la cavité sans et avec amortissement. On constate ici la très bonne concordance entre nos résultats et ceux issus de solutions exactes. De plus, dans le cas amorti, on constate que lorsqu'on augmente le nombre de degrés de liberté (ddl) notre solution converge vers la solution exacte donnée par Bermúdez.

**Tableau 1.** Fréquences (Hz) de la cavité sans et avec amortissement

cavité rigide		cavité amortie		
(961 d.d.l.)	exacte*	(121 d.d.l.)	(961 d.d.l.)	exacte**
170.1	$f_{01} = 170$	166.8-0.0i	166.2-0.0i	166.2-0.0i
170.1	$f_{10} = 170$	168.7-0.0i	168.0-0.0i	167.9-0.0i
240.5	$f_{11} = 240.4$	236.0-0.1i	235.1-0.1i	235.0-0.1i
340.6	$f_{02} = 340$	337.4-0.2i	332.9-0.2i	332.4-0.1i
340.6	$f_{20} = 340$	341.1-0.1i	335.3-0.1i	334.7-0.1i

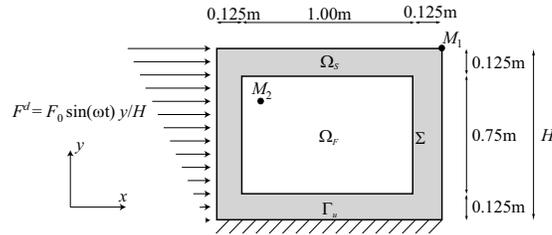
\* (Blevins 1993), \*\* (Bermúdez *et al.* 1999)

La différence entre les fréquences de la cavité rigide et la partie réelle des modes propres de la cavité amortie est due à l'effet du ressort ( $k^I$ ). La partie imaginaire est liée quant à elle à la dissipation dans l'amortisseur ( $d^I$ ).

### 6. Analyse transitoire d'une structure élastique contenant un fluide acoustique avec amortissement à l'interface

Dans cet exemple, on considère une structure élastique rectangulaire ( $E=144 \text{ Gpa}$ ,  $\rho_S=7700 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu= 0.35$ ) dont les données géométriques sont présentées sur la figure 3. La structure est remplie d'air ( $\rho_F=1 \text{ kg/m}^3$ ,  $c=340 \text{ m/s}$ ). De plus, on utilise un modèle d'amortissement de type kelvin-Voigt sur toute l'interface fluide-structure. Les paramètres d'amortissement pour cet exemple sont identiques à ceux de l'exemple précédent.

Le tableau 2 présente les fréquences propres : (i) de la cavité rigide, (ii) de la structure seule, (iii) du problème couplé fluide-structure sans amortissement calculé avec une formulation ( $\mathbf{u}$ ,  $p$ ) et (iv) du problème couplé amorti calculé avec une formu-



**Figure 3.** Géométrie du problème élastoacoustique avec amortissement à l'interface

tion  $(\mathbf{u}, \eta, p)$  symétrique. Les modes  $A$  et  $E$  correspondent aux modes propres de vibration de la structure dans la plage de fréquence étudiée. Les modes  $B, C, D, F$  et  $G$  correspondent aux modes propres de vibration du fluide. On remarque la bonne concordance entre nos résultats et ceux données par Bermúdez dans le cas non amorti. Le tableau montre aussi que les fréquences propres de la structure seule ne sont que très légèrement influencées par l'interface dissipative contrairement à celles du fluide.

**Tableau 2.** Fréquences (Hz) pour le problème élastoacoustique sans et avec amortissement

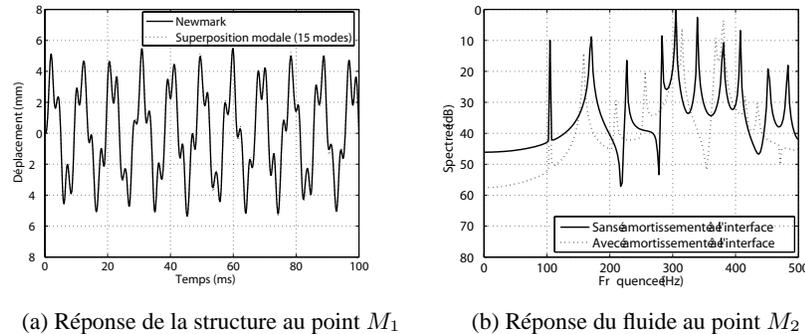
Mode	sans amortissement				avec amortissement
	fluide	structure	f-s	f-s*	Kelvin-Voigt
A	-	105.0	105.0	-	105.0+0.0i
B	170.1	-	170.1	169.9	158.1+0.1i
C	227.0	-	226.9	226.4	209.3+0.2i
D	283.7	-	283.6	283.7	256.2+0.i
E	-	305.7	305.7	-	305.6+0.0i
F	341.1	-	341.0	339.2	316.3+0.4i
G	409.7	-	409.6	409.0	369.7+0.8i

\* (Bermúdez *et al.* 1999)

La structure est maintenant excitée sur son bord gauche par une force sinusoïdale fonction de l'abscisse  $y$  :  $F^d = F_0 \sin(\omega t) y/H$  avec  $F_0 = 1000$  N et  $\omega = 2\pi \times 380$  rad/s.

La figure 4a présente la réponse du système couplé avec interface absorbante au point  $M_1$  (1.25m,1m) de la structure. On voit sur cette figure que la réponse donnée par la méthode de superposition modale en utilisant uniquement les 15 premiers modes est superposée à celle obtenue par la méthode d'intégration directe en utilisant un schéma de Newmark. La figure 4b présente la réponse en fréquence du système couplé avec et sans interface dissipative au point  $M_2$  (0.25m,0.75m) du fluide. On remarque la présence du pic relatif à la fréquence d'excitation à 380 Hz. Pour le cas amorti, les pics

présents sur la courbe représentent la partie réelle des fréquences propres. Comme on peut le constater, seuls les modes fluide sont influencés par la présence de l'interface dissipative.



**Figure 4.** Réponse du système couplé : (a) comparaison entre les méthodes d'intégration directe et de superposition modale, (b) résultats sans et avec interface dissipative

## 7. Conclusion

Dans ce travail, une nouvelle formulation éléments finis pour les problèmes d'élastoacoustique avec interfaces dissipatives est proposée. Cette formulation fait intervenir le déplacement de la structure, le champ de pression dans le fluide et le déplacement fluide normal au niveau des interfaces absorbantes. Les équations locales du problème ainsi qu'une formulation symétrique pour un modèle d'amortissement de type Kelvin-Voigt sont présentées. Les recherches en cours concernent la symétrisation de la formulation avec un modèle de Zener dont la formulation non symétrique est présentée dans cet article.

## 8. Bibliographie

- Bermúdez A., Rodríguez R., « Modelling and numerical solution of elastoacoustic vibrations with interface damping », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 46, p. 1763-1779, 1999.
- Blevins R., *Formulas for natural frequency and mode shape*, Krieger publishing company, Malabar, Florida, 1993.
- Deü J.-F., Larbi W., Ohayon R., « Structural-acoustic vibration and transient problems with interface damping », *Third M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, June 14 - 17, 2005.
- Kehr-Candille V., Ohayon R., « Elastoacoustic damped vibrations – Finite element and modal reduction methods », *In New Advances in Computational Structural Mechanics*, P. Ladevèze, O.C. Zienkiewicz (eds), Elsevier Science Publishers, p. 321-334, 1992.
- Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R., « A new finite element formulation for internal acoustic problems with dissipative walls », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, soumis, 2005.
- Morand H.-P., Ohayon R., *Fluid-Structure Interaction*, Wiley, Chichester, 1995.
- Ohayon R., Soize C., *Structural Acoustics and Vibration*, Academic Press, New York, 1998.