
Propagation multimodale dans les systèmes périodiques couplés

Jean-Mathieu Mencik — Mohamed Ichchou — Louis Jézéquel

Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Ecole Centrale de Lyon
36 Avenue Guy de Collongue, Bâtiment E6
F-69134 Ecully Cedex
Jean-Mathieu.Mencik@ec-lyon.fr

RÉSUMÉ. Ce papier présente une étude du comportement vibratoire large bande d'un ensemble de systèmes complexes périodiques — chaque système est composé, selon une direction spécifique, de sous-structures identiques — élastiques et dissipatifs, couplés. En considérant un modèle de propagation multimodale, la dynamique de chaque système est formulée en exprimant numériquement les variables cinématiques (déplacements, forces) à partir des ondes se propageant selon la direction de périodicité. Dans ce sens, un modèle de couplage pour plusieurs systèmes connectés par un élément élastique, qui en particulier peut être soumis à des sources d'excitation extérieures, est formulé.

ABSTRACT. This paper presents the study of the wide band vibratory behavior of coupled elastic and dissipative complex periodic systems — each system is composed, along a specific direction, of identical substructures. Considering a multi-mode propagation model, the dynamics of each system is formulated by numerically expressing the kinematic variables (displacements, forces) from the waves propagating along the direction of periodicity. In this way, a coupling model for several systems connected by an elastic element, which in particular can be submitted to external excitation sources, is formulated.

MOTS-CLÉS : système périodique, sous-structure, mode d'onde, guide d'ondes, modèle éléments finis, élément de couplage, multiplicateur de Lagrange, matrice de diffusion, sources d'excitation.

KEYWORDS: periodic system, substructure, wave mode, waveguide, finite element model, coupling element, Lagrange multiplier, diffusion matrix, excitation sources.

1. Introduction

Cette étude s'inscrit dans l'analyse du comportement vibratoire large bande (spécifiquement en MF et HF) d'un ensemble de systèmes solides, élançés (poutres, ...), couplés. On suppose que chaque système est élastique, linéaire, dissipatif et périodique, c'est-à-dire composé, selon une direction donnée, de sous-structures identiques pouvant être complexes (Zhong et Williams 1995). Dans l'optique où l'on désire s'affranchir d'une description numérique « classique » (3D) de ces systèmes (*Méthode des Éléments Finis*), coûteuse dès lors que l'on s'intéresse aux domaines MF et HF (nécessité d'un maillage fin de chaque système adapté aux faibles longueurs d'ondes), on adopte une description 1D simplifiée basée sur un modèle de propagation multimodale : en accord avec le théorème de *Bloch* (Brillouin 1946), les variables cinématiques (déplacements, forces) de chaque système sont décrites sur la base des modes d'ondes se propageant selon la direction de périodicité. Pour un système donné, ces modes sont obtenus numériquement à partir du modèle éléments finis d'une sous-structure donnée (Zhong et Williams 1995). En adoptant ce modèle de propagation multimodale, l'analyse d'un ensemble de systèmes (guides d'ondes) connectés requiert une formulation d'un ensemble de relations de couplage. Ces relations ont été exprimées dans un précédent papier (Mencik et Ichchou 2005) à partir d'une matrice de diffusion — exprimant la réflexion et la transmission des ondes — au niveau d'un élément de couplage élastique *non excité* et maillé indépendamment des systèmes environnants, la continuité des déplacements au niveau des interfaces de couplage ayant été satisfaite par l'introduction de champs de multiplicateurs de Lagrange (Ohayon *et al.* 1997).

La formulation établie dans (Mencik et Ichchou 2005) est étendue dans le présent papier au cas où l'élément de couplage est soumis à des sources d'excitation extérieures de type déplacement imposé et/ou force imposée. On conserve le fait que l'élément de couplage est maillé indépendamment des systèmes environnants, la continuité des déplacements au niveau des interfaces (couplage et déplacement imposé) étant satisfaite par l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange.

En section 2, on rappelle la notion de propagation d'ondes dans un système élançé, élastique et périodique ; en section 3, on formule un modèle de couplage pour plusieurs guides d'ondes connectés par un élément de couplage élastique soumis à des sources d'excitation extérieures ; finalement, en section 4, le modèle de couplage est comparé à une solution analytique « classique » issue de la théorie de l'élasticité linéaire (Graff 1991) dans le cas de trois guides d'ondes couplés longitudinalement par un système masse-ressorts.

2. Propagation dans un guide d'ondes périodique

Considérons un système solide élançé périodique, tel que décrit sur la figure 1, composé, selon une direction spécifique (axe x), de N sous-structures identiques, élastiques, linéaires et dissipatives. On note que cette description générale s'applique aux systèmes à sections constantes. Considérons le modèle élément finis d'une sous-

structure k donnée ($k = 1, \dots, N$) appartenant au système global. Les frontières gauche et droite de la sous-structure discrétisée sont supposées contenir n ddl's. Les variables cinématiques — déplacements \mathbf{q} et forces \mathbf{F} — définies sur ces frontières sont notées $(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ et $(\mathbf{F}_L, \mathbf{F}_R)$ respectivement (figure 1) et sont représentées à partir des vecteurs d'états $\mathbf{u}_L^{(k)} = ((\mathbf{q}_L^{(k)})^T (-\mathbf{F}_L^{(k)})^T)^T$ et $\mathbf{u}_R^{(k)} = ((\mathbf{q}_R^{(k)})^T (\mathbf{F}_R^{(k)})^T)^T$.

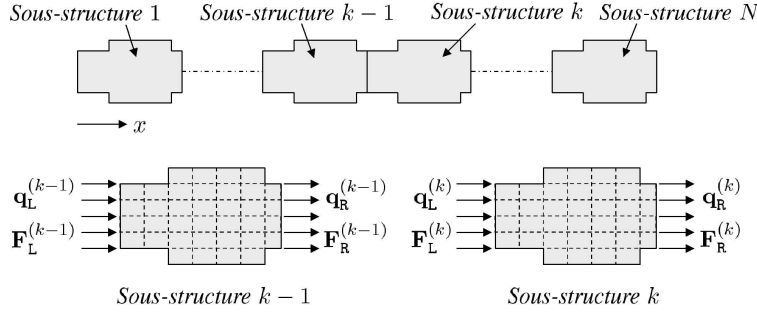


Figure 1. Illustration d'un guide d'ondes périodique

En exprimant les relations de couplage à la jonction de deux sous-structures consécutives k et $k-1$ ($k = 2, \dots, N$), $\mathbf{u}_L^{(k)} = \mathbf{u}_R^{(k-1)}$, on relie les vecteurs d'états $\mathbf{u}_L^{(k)}$ et $\mathbf{u}_L^{(k-1)}$ de la manière suivante (Mencik et Ichchou 2005) :

$$\mathbf{u}_L^{(k)} = \mathbf{S} \mathbf{u}_L^{(k-1)} \quad k = 2, \dots, N \quad [1]$$

où \mathbf{S} est une matrice symplectique (Zhong et Williams 1995). En accord avec le théorème de Bloch (Brillouin 1946), les solutions \mathbf{u}_L du problème [1] sont de la forme $\mathbf{u}_L^{(k)} = \mu \mathbf{u}_L^{(k-1)}$ et dérivent d'un problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{S} \Phi_i = \mu_i \Phi_i \quad , \quad |\mathbf{S} - \mu_i \mathbf{I}_{2n}| = 0 \quad [2]$$

Les solutions $\{(\mu_i, \Phi_i)\}_{i=1, \dots, 2n}$ définissent les modes d'ondes du système périodique (guide d'ondes). La matrice Φ des vecteurs propres de \mathbf{S} peut s'écrire

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_q^{\text{inc}} & \Phi_q^{\text{ref}} \\ \Phi_F^{\text{inc}} & \Phi_F^{\text{ref}} \end{bmatrix} \quad [3]$$

où $\Phi^{\text{inc}} = ((\Phi_q^{\text{inc}})^T (\Phi_F^{\text{inc}})^T)^T$ et $\Phi^{\text{ref}} = ((\Phi_q^{\text{ref}})^T (\Phi_F^{\text{ref}})^T)^T$ sont des matrices de taille identique ($2n \times n$) et représentent les modes incidents à – et réfléchis par – une limite du guide d'ondes (Zhong et Williams 1995, Yong et Lin 1989)¹. Finalement, les vecteurs d'états $\mathbf{u}_L^{(k)}$ et $\mathbf{u}_R^{(k)}$ d'une sous-structure k donnée peuvent s'exprimer à partir de la matrice des vecteurs propres Φ (Zhong et Williams 1995) :

$$\mathbf{u}_L^{(k)} = \Phi \mathbf{Q}^{(k)} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_R^{(k)} = \Phi \mathbf{Q}^{(k+1)} \quad \forall k \quad , \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{inc}} \\ \mathbf{Q}^{\text{ref}} \end{pmatrix} \quad [4]$$

1. Un critère permettant de suivre chaque mode dans le domaine fréquentiel, basé sur les propriétés d'orthogonalité symplectique des vecteurs propres $\{\Phi_i\}_i$ (Zhong et Williams 1995), est proposé dans (Mencik et Ichchou 2005).

où \mathbf{Q} désignent les amplitudes des modes d’ondes, pouvant être décomposées² en parties incidente \mathbf{Q}^{inc} et réfléchie \mathbf{Q}^{ref} .

3. Modèle de couplage pour plusieurs guides d’ondes connectés par un élément élastique

On propose une description du comportement dynamique d’un ensemble de guides d’ondes connectés par un élément élastique, linéaire et dissipatif (figure 2). Dans le cadre de la *Méthode des Éléments Finis*, cet élément de couplage se modélise classiquement à partir d’un opérateur de rigidité dynamique complexe \mathbb{K} :

$$\mathbb{K}\mathbf{q}^c = \mathbf{F}^c \tag{5}$$

où l’on suppose que les forces \mathbf{F}^c , appliquées à l’élément de couplage, sont de trois natures : (i) actions du couplage, (ii) déplacement imposé, (iii) force imposée.

On suppose que l’élément de couplage est maillé indépendamment des systèmes environnants, la continuité des déplacements au niveau des interfaces (couplage et déplacement imposé) étant imposée par l’introduction d’un ensemble de champs de multiplicateurs de Lagrange (Ohayon *et al.* 1997). Dans le contexte de l’*Approche Multimodale* décrite en section 2, l’étude du comportement dynamique des guides d’ondes nécessite alors d’exprimer un ensemble de relations entre les ondes réfléchies par l’élément de couplage et les ondes incidentes. Ces relations sont détaillées ci-dessous :

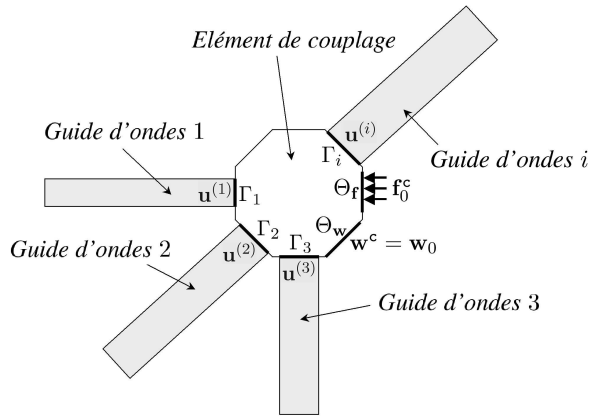


Figure 2. Plusieurs guides d’ondes connectés au travers d’un élément élastique

Considérons les sous-structures (cf. section 2) qui sont situées aux limites des guides d’ondes et qui sont connectées à l’élément de couplage (Mencik et Ichchou

2. Soulignons que la décomposition [4] reste applicable lorsque les variables cinématiques sont représentées, alternativement, par les vecteurs d’états $\mathbf{u}_L^{(k)} = ((\mathbf{q}_L^{(k)})^T (\mathbf{F}_L^{(k)})^T)^T$ et $\mathbf{u}_R^{(k)} = ((\mathbf{q}_R^{(k)})^T (-\mathbf{F}_R^{(k)})^T)^T$ (Mencik et Ichchou 2005).

2005). Chaque sous-structure i ($i = 1, \dots, M$) est couplée avec l'autre sous-structure correspondante sur une surface S_i . L'élément de couplage est couplé avec les sous-structures sur un ensemble de surfaces $\{\Gamma_i\}_{i=1, \dots, M}$ telles que $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Le cas de deux guides d'ondes *directement* connectés (Yong et Lin 1989) n'est donc pas pris en compte dans le cadre de cette étude. En outre, l'élément de couplage est soumis (i) à un champ de déplacements \mathbf{w}_0 imposé sur une surface Θ_w et (ii) à un champ de forces \mathbf{f}_0^c imposé sur une surface Θ_f (figure 2). La continuité du déplacement au niveau des interfaces $\{\Gamma_i\}_{i=1, \dots, M}$ et Θ_w est imposée en introduisant les champs de multiplicateurs de Lagrange (Ohayon *et al.* 1997) $\{\lambda_{\Gamma_i}\}_{i=1, \dots, M}$ et λ_{Θ_w} , respectivement.

Introduisons les formes bilinéaires $\{z^{(i)}\}_i$, z^c , $\{b_{\Gamma_i}\}_i$ et b_{Θ_w} définies par :

$$\begin{aligned} z^{(i)}(\mathbf{w}_1^{(i)}, \mathbf{w}_2^{(i)}) &= -\omega^2 \int_{\Omega_i} \rho(\mathbf{w}_1^{(i)})^T \mathbf{w}_2^{(i)} dx + \int_{\Omega_i} (\epsilon(\mathbf{w}_1^{(i)}))^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2^{(i)}) dx \quad \forall i, \\ z^c(\mathbf{w}_1^c, \mathbf{w}_2^c) &= -\omega^2 \int_{\Omega_c} \rho(\mathbf{w}_1^c)^T \mathbf{w}_2^c dx + \int_{\Omega_c} (\epsilon(\mathbf{w}_1^c))^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_2^c) dx, \quad [6] \\ b_{\Gamma_i}(\lambda_{\Gamma_i}, \mathbf{w}_{\Gamma_i}) &= \int_{\Gamma_i} (\lambda_{\Gamma_i})^T \mathbf{w}_{\Gamma_i} ds \quad \forall i, \\ b_{\Theta_w}(\lambda_{\Theta_w}, \mathbf{w}_{\Theta_w}) &= \int_{\Theta_w} (\lambda_{\Theta_w})^T \mathbf{w}_{\Theta_w} ds, \end{aligned}$$

où $\{\Omega_i\}_i$ et Ω_c désignent les domaines occupés par les sous-structures et l'élément de couplage, respectivement. Introduisons par ailleurs les formes linéaires $\{g_{S_i}\}_i$ et g_{Θ_f} définies par :

$$g_{S_i}(\mathbf{w}^{(i)}) = \int_{S_i} (\mathbf{w}^{(i)})^T \mathbf{f}^{(i)} ds \quad (\forall i) \quad \text{et} \quad g_{\Theta_f}(\mathbf{w}^c) = \int_{\Theta_f} (\mathbf{w}^c)^T \mathbf{f}_0^c ds \quad [7]$$

où $\{\mathbf{f}^{(i)}\}_i$ représente l'ensemble des champs de forces appliqués aux sous-structures sur l'ensemble des surfaces $\{S_i\}_i$.

La formulation variationnelle traduisant l'équilibre dynamique des sous-structures couplées à l'élément de couplage excité s'écrit alors $\forall \delta \mathbf{w}^{(i)}$, $\forall \delta \mathbf{w}^c$, $\forall \delta \lambda_{\Gamma_i}$ et $\forall \delta \lambda_{\Theta_w}$ par

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M z^{(i)}(\delta \mathbf{w}^{(i)}, \mathbf{w}^{(i)}) + z^c(\delta \mathbf{w}^c, \mathbf{w}^c) \\ & + \sum_{i=1}^M \left(b_{\Gamma_i}(\delta \lambda_{\Gamma_i}, \mathbf{w}^c - \mathbf{w}^{(i)}) + b_{\Gamma_i}(\lambda_{\Gamma_i}, \delta \mathbf{w}^c - \delta \mathbf{w}^{(i)}) \right) \\ & + b_{\Theta_w}(\delta \lambda_{\Theta_w}, \mathbf{w}^c - \mathbf{w}_0) + b_{\Theta_w}(\lambda_{\Theta_w}, \delta \mathbf{w}^c) \\ & = \sum_{i=1}^M g_{S_i}(\delta \mathbf{w}^{(i)}) + g_{\Theta_f}(\delta \mathbf{w}^c) \end{aligned} \quad [8]$$

où $\{\mathbf{w}^{(i)}\}_i$ et \mathbf{w}^c représentent les champs de déplacements des sous-structures et de l'élément de couplage, respectivement. Dans le cadre de la *Méthode des Éléments Finis*, les champs de déplacements et de multiplicateurs de Lagrange sont discrétisés. En particulier, sur chaque surface de couplage Γ_i et sur la surface Θ_w , on suppose que les champs de multiplicateurs de Lagrange λ_{Γ_i} et λ_{Θ_w} s'expriment

$$\lambda_{\Gamma_i} = \xi_{\Gamma_i} \mathbf{p}_{\Gamma_i} \quad \text{sur } \Gamma_i \quad \forall i \quad \text{et} \quad \lambda_{\Theta_w} = \xi_{\Theta_w} \mathbf{p}_{\Theta_w} \quad \text{sur } \Theta_w \quad [9]$$

où \mathbf{p}_{Γ_i} et \mathbf{p}_{Θ_w} représentent des vecteurs de tailles $(s_i \times 1)$ et $(s_0 \times 1)$, respectivement.

La formulation variationnelle du système discrétisé s'exprime alors

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M (\delta \mathbf{q}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} + (\delta \mathbf{q}^c)^T \mathbb{K} \mathbf{q}^c + \sum_{i=1}^M (\delta \mathbf{p}_{\Gamma_i})^T \left(\mathbf{B}_{\Gamma_i}^c \mathbf{q}^c - \mathbf{B}_{\Gamma_i}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} \right) \\ & + \sum_{i=1}^M \left((\delta \mathbf{q}^c)^T (\mathbf{B}_{\Gamma_i}^c)^T - (\delta \mathbf{q}^{(i)})^T (\mathbf{B}_{\Gamma_i}^{(i)})^T \right) \mathbf{p}_{\Gamma_i} \\ & + (\delta \mathbf{p}_{\Theta_w})^T \left(\mathbf{B}_{\Theta_w}^c \mathbf{q}^c - \mathbf{B}_{\Theta_w}^0 \mathbf{q}_0 \right) + (\delta \mathbf{q}^c)^T (\mathbf{B}_{\Theta_w}^c)^T \mathbf{p}_{\Theta_w} \\ & = \sum_{i=1}^M (\delta \mathbf{q}^{(i)})^T (\mathbf{L}_{S_i}^{(i)})^T \mathbf{F}_{S_i}^{(i)} + (\delta \mathbf{q}^c)^T (\mathbf{L}_{\Theta_f}^c)^T \mathbf{F}_0^c \end{aligned} \quad [10]$$

où

- $(\delta \mathbf{q}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)}$ discrétise $z^{(i)}(\delta \mathbf{w}^{(i)}, \mathbf{w}^{(i)}) \quad \forall i$
- $(\delta \mathbf{q}^c)^T \mathbb{K} \mathbf{q}^c$ discrétise $z^c(\delta \mathbf{w}^c, \mathbf{w}^c)$
- $(\delta \mathbf{p}_{\Gamma_i})^T \mathbf{B}_{\Gamma_i}^c \mathbf{q}^c$ discrétise $b_{\Gamma_i}(\delta \lambda_{\Gamma_i}, \mathbf{w}^c) \quad \forall i$
- $(\delta \mathbf{p}_{\Gamma_i})^T \mathbf{B}_{\Gamma_i}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)}$ discrétise $b_{\Gamma_i}(\delta \lambda_{\Gamma_i}, \mathbf{w}^{(i)}) \quad \forall i$
- $(\delta \mathbf{p}_{\Theta_w})^T \mathbf{B}_{\Theta_w}^c \mathbf{q}^c$ discrétise $b_{\Theta_w}(\delta \lambda_{\Theta_w}, \mathbf{w}^c)$
- $(\delta \mathbf{p}_{\Theta_w})^T \mathbf{B}_{\Theta_w}^0 \mathbf{q}_0$ discrétise $b_{\Theta_w}(\delta \lambda_{\Theta_w}, \mathbf{w}_0)$
- $(\delta \mathbf{q}^{(i)})^T (\mathbf{L}_{S_i}^{(i)})^T \mathbf{F}_{S_i}^{(i)}$ discrétise $g_{S_i}(\delta \mathbf{w}^{(i)}) \quad \forall i$
- $(\delta \mathbf{q}^c)^T (\mathbf{L}_{\Theta_f}^c)^T \mathbf{F}_0^c$ discrétise $g_{\Theta_f}(\delta \mathbf{w}^c)$

D'une part, puisque les vecteurs $\{\delta \mathbf{q}^{(i)}\}_i$ et $\delta \mathbf{q}^c$ sont arbitraires, les équations du mouvement de chaque sous-structure discrétisée et de l'élément de couplage discrétisé s'expriment :

$$\mathbf{D}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} = (\mathbf{L}_{\Gamma_i}^{(i)})^T \mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)} + (\mathbf{L}_{S_i}^{(i)})^T \mathbf{F}_{S_i}^{(i)} \quad \forall i \quad [11]$$

$$\mathbb{K} \mathbf{q}^c = \sum_{i=1}^M (\mathbf{L}_{\Gamma_i}^c)^T \mathbf{F}_{\Gamma_i}^c + (\mathbf{L}_{\Theta_w}^c)^T \mathbf{F}_{\Theta_w}^c + (\mathbf{L}_{\Theta_f}^c)^T \mathbf{F}_0^c \quad [12]$$

Ci-dessus, $\{\mathbf{L}_{\Gamma_i}^{(i)}\}_i$, $\{\mathbf{L}_{S_i}^{(i)}\}_i$, $\{\mathbf{L}_{\Gamma_i}^c\}_i$, $\mathbf{L}_{\Theta_w}^c$ et $\mathbf{L}_{\Theta_f}^c$ représentent des matrices d'incidences, définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\Gamma_i}^{(i)} &= \mathbf{L}_{\Gamma_i}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} \quad , \quad \mathbf{q}_{S_i}^{(i)} = \mathbf{L}_{S_i}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} \quad , \quad \mathbf{q}_{\Gamma_i}^c = \mathbf{L}_{\Gamma_i}^c \mathbf{q}^c \quad \forall i & [13] \\ \mathbf{q}_{\Theta_w}^c &= \mathbf{L}_{\Theta_w}^c \mathbf{q}^c \quad , \quad \mathbf{q}_{\Theta_f}^c = \mathbf{L}_{\Theta_f}^c \mathbf{q}^c \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'ensemble des vecteurs $\{\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)}\}_i$ représente les forces appliquées aux guides d'ondes sur l'ensemble des surfaces $\{\Gamma_i\}_i$, l'ensemble des vecteurs $\{\mathbf{F}_{\Gamma_i}^c\}_i$ représente les forces appliquées à l'élément de couplage sur l'ensemble des surfaces $\{\Gamma_i\}_i$ et le vecteur $\mathbf{F}_{\Theta_w}^c$ représente les forces appliquées à l'élément de couplage sur la surface Θ_w :

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_{\Gamma_i}^{(i)})^T \mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)} &= (\mathbf{B}_{\Gamma_i}^{(i)})^T \mathbf{p}_{\Gamma_i} \quad , \quad (\mathbf{L}_{\Gamma_i}^c)^T \mathbf{F}_{\Gamma_i}^c = -(\mathbf{B}_{\Gamma_i}^c)^T \mathbf{p}_{\Gamma_i} \quad \forall i & [14] \\ (\mathbf{L}_{\Theta_w}^c)^T \mathbf{F}_{\Theta_w}^c &= -(\mathbf{B}_{\Theta_w}^c)^T \mathbf{p}_{\Theta_w} \end{aligned}$$

D'autre part, au vu de [10], puisque les vecteurs $\{\delta \mathbf{p}_{\Gamma_i}\}_i$ et $\delta \mathbf{p}_{\Theta_w}$ sont arbitraires, les contraintes additionnelles, traduisant les conditions $\mathbf{w}^c = \mathbf{w}^{(i)}$ sur Γ_i , $\forall i$, et $\mathbf{w}^c = \mathbf{w}_0$ sur Θ_w s'expriment :

$$\mathbf{B}_{\Gamma_i}^c \mathbf{q}^c = \mathbf{B}_{\Gamma_i}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} \quad \forall i \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{\Theta_w}^c \mathbf{q}^c = \mathbf{B}_{\Theta_w}^0 \mathbf{q}_0 \quad [15]$$

Notons $(n_0 \times 1)$ la taille du vecteur \mathbf{q}_0 et notons n_i , n_c^i et n_c^0 le nombre de ddl's de chaque sous-structure i sur la surface Γ_i , le nombre de ddl's de l'élément de couplage sur chaque surface Γ_i et le nombre de ddl's de l'élément de couplage sur la surface Θ_w , respectivement. Il est alors possible de définir (Mencik et Ichchou 2005), pour chaque sous-structure i , les matrices $\mathcal{B}_{\Gamma_i}^{(i)}$, $\mathcal{B}_{\Gamma_i}^c$, $\mathcal{B}_{\Theta_w}^c$ et $\mathcal{B}_{\Theta_w}^0$, de tailles respectives $(s_i \times n_i)$, $(s_i \times n_c^i)$, $(s_0 \times n_c^0)$ et $(s_0 \times n_0)$, telles que :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Gamma_i}^{(i)} \mathbf{L}_{\Gamma_i}^{(i)} &= \mathbf{B}_{\Gamma_i}^{(i)} \quad , \quad \mathcal{B}_{\Gamma_i}^c \mathbf{L}_{\Gamma_i}^c = \mathbf{B}_{\Gamma_i}^c \quad \forall i & [16] \\ \mathcal{B}_{\Theta_w}^c \mathbf{L}_{\Theta_w}^c &= \mathbf{B}_{\Theta_w}^c \quad , \quad \mathcal{B}_{\Theta_w}^0 \mathbf{L}_{\Theta_w}^0 = \mathbf{B}_{\Theta_w}^0 \end{aligned}$$

Par définition, les forces $\{\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)}\}_i$, $\{\mathbf{F}_{\Gamma_i}^c\}_i$ et $\mathbf{F}_{\Theta_w}^c$ s'expriment alors :

$$\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)} = (\mathcal{B}_{\Gamma_i}^{(i)})^T \mathbf{p}_{\Gamma_i} \quad , \quad \mathbf{F}_{\Gamma_i}^c = -(\mathcal{B}_{\Gamma_i}^c)^T \mathbf{p}_{\Gamma_i} \quad \forall i \quad [17]$$

$$\mathbf{F}_{\Theta_w}^c = -(\mathcal{B}_{\Theta_w}^c)^T \mathbf{p}_{\Theta_w} \quad [18]$$

Par ailleurs, les contraintes s'expriment

$$\mathcal{B}_{\Gamma_i}^c \mathbf{q}_{\Gamma_i}^c = \mathcal{B}_{\Gamma_i}^{(i)} \mathbf{q}_{\Gamma_i}^{(i)} \quad \forall i \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{\Theta_w}^c \mathbf{q}_{\Theta_w}^c = \mathcal{B}_{\Theta_w}^0 \mathbf{q}_0 \quad [19]$$

En supposant les matrices $\{\mathcal{B}_{\Gamma_i}^c\}_i$ et $\mathcal{B}_{\Theta_w}^c$ inversibles — impliquant $s_i = n_c^i \forall i$ et $s_0 = n_c^0$ — on détermine de façon unique les déplacements de l'élément de couplage

sur les interfaces $\{\Gamma_i\}_i$ et Θ_w en fonction des déplacements des guides d'ondes et des déplacements imposés,

$$\mathbf{q}_{\Gamma_i}^c = (\mathcal{B}_{\Gamma_i}^c)^{-1} \mathcal{B}_{\Gamma_i}^{(i)} \mathbf{q}_{\Gamma_i}^{(i)} \quad \forall i \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_{\Theta_w}^c = (\mathcal{B}_{\Theta_w}^c)^{-1} \mathcal{B}_{\Theta_w}^0 \mathbf{q}_0 \quad [20]$$

En outre, on détermine de façon unique, au vu de [17], les forces appliquées aux guides d'ondes sur les interfaces $\{\Gamma_i\}_i$ en fonction des forces appliquées à l'élément de couplage :

$$\mathbf{F}_{\Gamma_i}^{(i)} = -(\mathcal{B}_{\Gamma_i}^{(i)})^T (\mathcal{B}_{\Gamma_i}^c)^{-T} \mathbf{F}_{\Gamma_i}^c \quad \forall i \quad [21]$$

Les équations [20] et [21] permettent de décrire les relations désirées entre les ondes réfléchies par l'élément de couplage et les ondes incidentes, dès lors que l'on condense l'opérateur \mathbb{K} sur les ddl's des interfaces $\{\Gamma_i\}_i$. La réponse dynamique de l'élément de couplage se formule :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{II} & \mathbb{K}_{IF} \\ \mathbb{K}_{FI} & \mathbb{K}_{FF} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_I^c \\ \mathbf{q}_F^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^c \end{pmatrix} \quad [22]$$

où \mathbf{q}_I^c désigne les déplacements des ddl's internes, hors des excitations ; $\mathbf{q}_F^c = ((\mathbf{q}_{\Gamma}^c)^T (\mathbf{q}_{\Theta_w}^c)^T (\mathbf{q}_{\Theta_f}^c)^T)^T$ et $\mathbf{F}^c = ((\mathbf{F}_{\Gamma}^c)^T (\mathbf{F}_{\Theta_w}^c)^T (\mathbf{F}_{\Theta_f}^c)^T)^T$ représentent les déplacements et forces définis sur la surface de couplage $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$ — $\mathbf{q}_I^c = ((\mathbf{q}_{\Gamma_1}^c)^T (\mathbf{q}_{\Gamma_2}^c)^T \dots (\mathbf{q}_{\Gamma_M}^c)^T)^T$ et $\mathbf{F}^c = ((\mathbf{F}_{\Gamma_1}^c)^T (\mathbf{F}_{\Gamma_2}^c)^T \dots (\mathbf{F}_{\Gamma_M}^c)^T)^T$ —, sur la surface Θ_w et sur la surface Θ_f , respectivement. Par condensation sur les ddl's des excitations, on obtient à partir de [22] :

$$\mathbb{K}^* \mathbf{q}_F^c = \mathbf{F}^c \quad [23]$$

où la matrice \mathbb{K}^* représente l'opérateur de rigidité dynamique de l'élément de couplage condensé sur les ddl's des excitations :

$$\mathbb{K}^* = \mathbb{K}_{FF} - \mathbb{K}_{FI} (\mathbb{K}_{II})^{-1} \mathbb{K}_{IF} \quad [24]$$

L'équation [23] s'exprime :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{\Gamma\Gamma}^* & \mathbb{K}_{\Gamma\Theta_w}^* & \mathbb{K}_{\Gamma\Theta_f}^* \\ \mathbb{K}_{\Theta_w\Gamma}^* & \mathbb{K}_{\Theta_w\Theta_w}^* & \mathbb{K}_{\Theta_w\Theta_f}^* \\ \mathbb{K}_{\Theta_f\Gamma}^* & \mathbb{K}_{\Theta_f\Theta_w}^* & \mathbb{K}_{\Theta_f\Theta_f}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\Gamma}^c \\ \mathbf{q}_{\Theta_w}^c \\ \mathbf{q}_{\Theta_f}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\Gamma}^c \\ \mathbf{F}_{\Theta_w}^c \\ \mathbf{F}_0^c \end{pmatrix} \quad [25]$$

La dynamique du système peut être condensée sur les ddl's de la surface de couplage $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$: en effet, la première équation du système [25] s'écrit :

$$\mathbb{K}_{\Gamma\Gamma}^* \mathbf{q}_{\Gamma}^c + \mathbb{K}_{\Gamma\Theta_w}^* \mathbf{q}_{\Theta_w}^c + \mathbb{K}_{\Gamma\Theta_f}^* \mathbf{q}_{\Theta_f}^c = \mathbf{F}_{\Gamma}^c \quad [26]$$

L'inconnue $\mathbf{q}_{\Theta_f}^c$ est exprimée en fonction des autres variables, à partir de la troisième équation du système [25] :

$$\mathbf{q}_{\Theta_f}^c = (\mathbb{K}_{\Theta_f\Theta_f}^*)^{-1} (\mathbf{F}_0^c - \mathbb{K}_{\Theta_f\Gamma}^* \mathbf{q}_{\Gamma}^c - \mathbb{K}_{\Theta_f\Theta_w}^* \mathbf{q}_{\Theta_w}^c) \quad [27]$$

En injectant [27] dans [26], on obtient alors :

$$\mathbb{K}^{**} \mathbf{q}_\Gamma^c = \mathbf{F}_\Gamma^c + \mathbb{R}_w \mathbf{q}_{\Theta_w}^c + \mathbb{R}_f \mathbf{F}_0^c \quad [28]$$

où la matrice \mathbb{K}^{**} représente l'opérateur de rigidité dynamique de l'élément de couplage condensé sur les ddl's de la surface $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$, défini par

$$\mathbb{K}^{**} = \mathbb{K}_{\Gamma\Gamma}^* - \mathbb{K}_{\Gamma\Theta_f}^* (\mathbb{K}_{\Theta_f\Theta_f}^*)^{-1} \mathbb{K}_{\Theta_f\Gamma}^* \quad [29]$$

où la matrice \mathbb{R}_w traduit les excitations par déplacements $\mathbf{q}_{\Theta_w}^c$,

$$\mathbb{R}_w = -\mathbb{K}_{\Gamma\Theta_w}^* + \mathbb{K}_{\Gamma\Theta_f}^* (\mathbb{K}_{\Theta_f\Theta_f}^*)^{-1} \mathbb{K}_{\Theta_f\Theta_w}^* \quad [30]$$

et où la matrice \mathbb{R}_f traduit les excitations par forces \mathbf{F}_0^c ,

$$\mathbb{R}_f = -\mathbb{K}_{\Gamma\Theta_f}^* (\mathbb{K}_{\Theta_f\Theta_f}^*)^{-1} \quad [31]$$

L'équilibre dynamique de l'élément de couplage condensé sur les ddl's de la surface de couplage $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$ (équation [28]) permet d'exprimer une relation entre les déplacements $\mathbf{q}_\Gamma^{\text{wg}} = ((\mathbf{q}_{\Gamma_1}^{(1)})^T (\mathbf{q}_{\Gamma_2}^{(2)})^T \dots (\mathbf{q}_{\Gamma_M}^{(M)})^T)^T$ des guides d'ondes exprimés sur la surface Γ et les forces $\mathbf{F}_\Gamma^{\text{wg}} = ((\mathbf{F}_{\Gamma_1}^{(1)})^T (\mathbf{F}_{\Gamma_2}^{(2)})^T \dots (\mathbf{F}_{\Gamma_M}^{(M)})^T)^T$ appliquées aux guides d'ondes sur Γ . En effet, à partir de [20] et [21], on a :

$$\mathbf{q}_\Gamma^c = \mathbf{T} \mathbf{q}_\Gamma^{\text{wg}} \quad , \quad \mathbf{F}_\Gamma^c = -\mathbf{T}^T \mathbf{F}_\Gamma^c \quad [32]$$

où la matrice \mathbf{T} s'exprime par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (\mathcal{B}_{\Gamma_1}^c)^{-1} \mathcal{B}_{\Gamma_1}^{(1)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} \dots & (\mathcal{B}_{\Gamma_M}^c)^{-1} \mathcal{B}_{\Gamma_M}^{(M)} & \end{bmatrix} \quad [33]$$

En considérant [32] et [20], l'équation [28] devient alors :

$$-\mathbf{T}^T \mathbb{K}^{**} \mathbf{T} \mathbf{q}_\Gamma^{\text{wg}} = \mathbf{F}_\Gamma^{\text{wg}} - \mathbf{T}^T \mathbb{R}_w \mathbf{T}_0 \mathbf{q}_0 - \mathbf{T}^T \mathbb{R}_f \mathbf{F}_0^c \quad [34]$$

où $\mathbf{T}_0 = (\mathcal{B}_{\Theta_w}^c)^{-1} \mathcal{B}_{\Theta_w}^0$. L'équation [34] est exprimée à partir des ondes réfléchies par l'élément de couplage et des ondes incidentes, en considérant [4] et [3]. Ainsi (Mencik et Ichchou 2005) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^T \mathbb{K}^{**} \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}} & | & \mathbf{T}^T \mathbb{K}^{**} \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{inc}} \\ \mathbf{Q}^{\text{ref}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbb{R}_w \mathbf{T}_0 \mathbf{q}_0 + \mathbf{T}^T \mathbb{R}_f \mathbf{F}_0^c \quad [35]$$

où les matrices $\Psi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}}$, $\Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}}$, $\Psi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}}$ et $\Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}}$ sont définies de la sorte :

$$\Psi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}} = \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}(1)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \Phi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}(M)} \end{bmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}} = \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}(1)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \Phi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}(M)} \end{bmatrix} \quad [36]$$

$$\Psi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}} = \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}(1)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \Phi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}(M)} \end{bmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}} = \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}(1)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \Phi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}(M)} \end{bmatrix}$$

En supposant la matrice $[\mathbf{T}^T \mathbb{K}^{**} \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}}]$ inversible, l'équation [35] permet d'exprimer une relation entre les amplitudes \mathbf{Q}^{ref} des modes qui sont réfléchis par l'élément de couplage et les amplitudes \mathbf{Q}^{inc} des modes incidents,

$$\mathbf{Q}^{\text{ref}} = \mathbb{C} \mathbf{Q}^{\text{inc}} + \mathcal{F}(\mathbf{q}_0, \mathbf{F}_0^c) \quad [37]$$

où la matrice \mathbb{C} représente la matrice de diffusion de l'élément de couplage (Mencik et Ichchou 2005), qui traduit pour chaque guide d'ondes les coefficients de réflexion et de transmission. Elle est définie par :

$$\mathbb{C} = - [\mathbf{T}^T \mathbb{K}^{**} \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}}]^{-1} [\mathbf{T}^T \mathbb{K}^{**} \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}}] \quad [38]$$

Le vecteur $\mathcal{F}(\mathbf{q}_0, \mathbf{F}_0^c)$ représente les effets des sources d'excitation :

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}_0, \mathbf{F}_0^c) = [\mathbf{T}^T \mathbb{K}^{**} \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}}]^{-1} [\mathbf{T}^T \mathbb{R}_w \mathbf{T}_0 \mathbf{q}_0 + \mathbf{T}^T \mathbb{R}_f \mathbf{F}_0^c] \quad [39]$$

Le modèle décrit par l'équation [37] est général, et permet en particulier de retrouver les résultats classiques de conditions aux limites (Yong et Lin 1989) : Par exemple, pour un guide d'ondes excité par une force \mathbf{F}_0 à une extrémité libre, $\mathbb{K}^{**} = \mathbf{0}$, on obtient $\mathbb{C} = -(\Phi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}})^{-1} \Phi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}}$ et $\mathcal{F}(\mathbf{F}_0) = (\Phi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}})^{-1} \mathbf{F}_0$; Par ailleurs, pour un guide d'ondes excité par un déplacement \mathbf{q}_0 à une extrémité, $\mathbb{K}^{**} \rightarrow \infty$, on obtient $\mathbb{C} = -(\Phi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}})^{-1} \Phi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}}$ et $\mathcal{F}(\mathbf{q}_0) = (\Phi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}})^{-1} \mathbf{q}_0$.

4. Résultats numériques

La formulation théorique de la matrice de diffusion \mathbb{C} (équation [38]) et du vecteur $\mathcal{F}(\mathbf{q}_0, \mathbf{F}_0^c)$ (équation [39]), décrivant les effets des sources d'excitation, est validée numériquement comparativement à une solution analytique « classique » issue de la théorie de l'élasticité linéaire (Graff 1991). A cette fin, on considère trois guides d'ondes (1, 2 et 3) homogènes, de sections rectangulaires, couplés longitudinalement (selon l'axe x) par un élément de couplage composé de trois ressorts linéaires connectés à une masse ponctuelle (figure 3). Les caractéristiques des guides d'ondes sont : densités : $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = 7800 \text{ kg/m}^3$, $\rho^{(3)} = 2700 \text{ kg/m}^3$; modules d'Young : $E^{(1)} = E^{(2)} = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $E^{(3)} = 7 \times 10^{10} \text{ Pa}$; amortissements $\eta^{(i)} = 10^{-2} \forall i$; sections : $h_y^{(i)} \times h_z^{(i)}$ où $h_y^{(1)} = h_y^{(2)} = 30 \times 10^{-2} \text{ m}$, $h_y^{(3)} = 24 \times 10^{-2} \text{ m}$, $h_z^{(i)} = 20 \times 10^{-2} \text{ m} \forall i$. Les caractéristiques de l'élément de couplage sont : masse : $M = 30 \text{ kg}$; raideurs : $K_1 = K_2 = K_3 = 15 \times 10^9 \text{ N/m}$. La résonance de l'élément de couplage avec interfaces de couplage fixes intervient à 6 164 Hz. La masse de l'élément de couplage est excitée selon l'axe x par une force $F_0^c = 1000 \text{ N}$.

Dans le contexte de l'*Approche Multimodale* décrite en section 2, les modes d'ondes se propageant dans chaque guide sont obtenus numériquement par résolution du problème aux valeurs propres [2] (Zhong et Williams 1995), en considérant le modèle éléments finis d'une sous-structure correspondante (figure 4). Chaque sous-structure est décrite par 16 éléments linéaires 3D (Zienkiewicz et Taylor 2000).

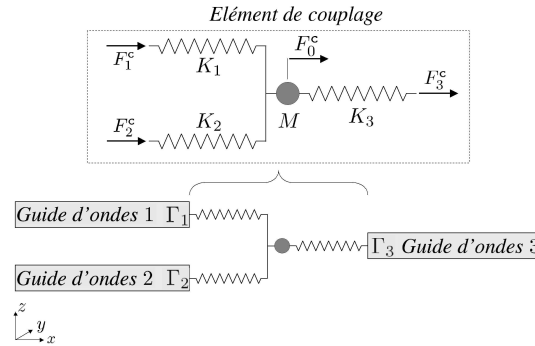


Figure 3. Trois guides d'ondes homogènes couplés longitudinalement par un système masse-ressorts

Les caractéristiques des sous-structures sont : sections : $h_y^{(i)} \times h_z^{(i)} \forall i$; longueurs : $d^{(i)} = d = 5 \times 10^{-2} \text{ m} \forall i$. Dans la bande de fréquences étudiée, on suppose que la longueur d (figure 4) est suffisamment faible pour décrire fidèlement les longueurs d'ondes des modes « contribuant » à la réponse dynamique de chaque guide d'ondes³.

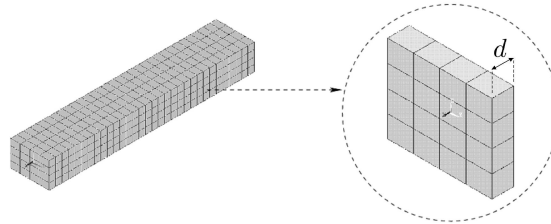


Figure 4. Modèle éléments finis d'une sous-structure

Dans le modèle de propagation multimodale, le champ de déplacement de l'élément de couplage et les champs de multiplicateurs de Lagrange sont supposés *uniformes* sur les interfaces de couplages $\{\Gamma_i\}_i$, c'est-à-dire (Mencik et Ichchou 2005) :

$$\mathbf{w}^c = \mathbf{I}_3 \mathbf{q}_{\Gamma_i}^c \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\lambda}_{\Gamma_i} = \mathbf{I}_3 \mathbf{p}_{\Gamma_i} \quad \text{sur } \Gamma_i \quad \forall i \quad [40]$$

Dans la bande de fréquences [40 Hz, 8 000 Hz], on a comparé le modèle numérique de propagation multimodale décrit par les équations [38] et [39] avec la solution analytique issue de la théorie de l'élasticité linéaire (Graff 1991). Dans ce sens, on a évalué pour les trois guides d'ondes : (i) les coefficients de réflexion et de transmission pour le mode longitudinal incident (figure 6) ; (ii) les effets de la source d'excitation sur le mode longitudinal réfléchi (figure 5). Les résultats établis par l'*Approche Multimodale* sont clairement validés en dessous de 4 000 Hz comparativement à la solution

3. le choix des modes à prendre en compte pour décrire la réponse du système, à une fréquence donnée, reste un problème ouvert à l'heure actuelle.

analytique. Au-delà de cette fréquence, des différences significatives entre les deux solutions apparaissent, aux alentours de la résonance du système masse-ressorts et particulièrement dans la bande de fréquences [7 500 Hz, 8 000 Hz]. Ces différences s'expliquent au vu des résultats établis en réf. (Mencik et Ichchou 2005) concernant l'évolution fréquentielle des modes : (i) la description en ondes planes n'est plus valides, (ii) des modes de section propagatifs, non prédits par la théorie « classique », apparaissent et échangent de l'énergie avec les autres modes.

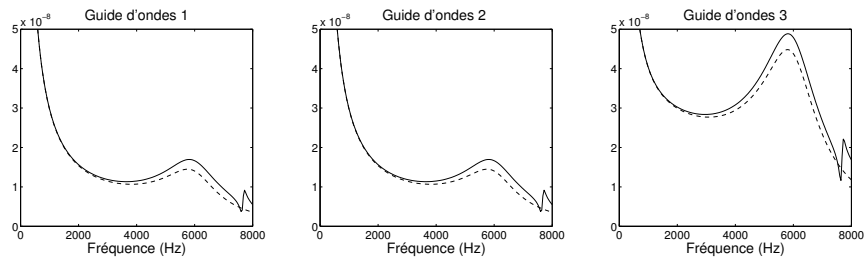


Figure 5. Effets de la source d'excitation sur le mode longitudinal réfléchi obtenus par l'Approche Multimodale (—) et par la théorie de l'élasticité linéaire (- - -)

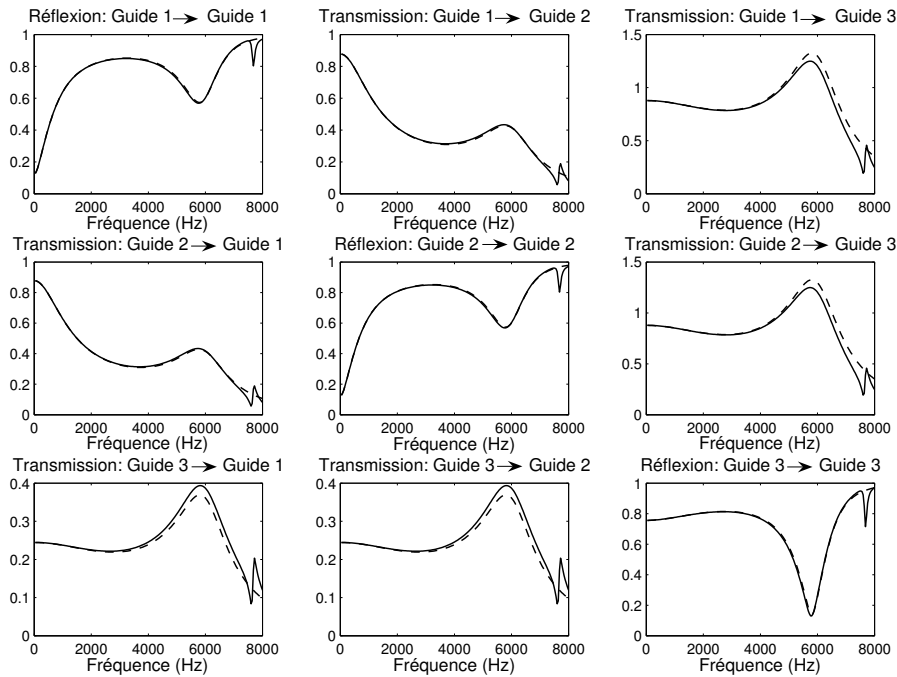


Figure 6. Coefficients de diffusion (modules) pour le mode longitudinal incident obtenus par l'Approche Multimodale (—) et par la théorie de l'élasticité linéaire (- - -)

5. Conclusion

On a proposé un modèle de couplage pour plusieurs guides d'ondes connectés par un élément élastique soumis à des sources d'excitation extérieures. Le modèle est applicable en MF et HF puisqu'il prend en compte les modes de section apparaissant aux fréquences élevées. L'*Approche Multimodale* a été validée en BF dans le cas de trois guides d'ondes homogènes couplés.

6. Bibliographie

- Brillouin L., *Wave Propagation in Periodic Structures*, Mc Graw Hill Publishing Compagny, New York, 1946.
- Graff K. G., *Wave Motion in Elastic Solids*, Oxford University Press, London, 1991.
- Mencik J.-M., Ichchou M. N., « Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements », *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 24, p. 877-898, 2005.
- Ohayon R., Sampaio R., Soize C., « Dynamic substructuring of damped structures using singular value decomposition », *Transactions of the ASME*, vol. 64, p. 292-298, 1997.
- Yong Y., Lin Y. K., « Propagation of decaying waves in periodic and piecewise periodic structures of finite length », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 129, p. 99-118, 1989.
- Zhong W. X., Williams F. W., « On the direct solution of wave propagation for repetitive structures », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 181 p. 485-501, 1995.
- Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method (first volume)*, Butterworth-Heinemann, fifth edition, Oxford, 2000.

