

---

# Approche multiéchelle des systèmes de tensegrité

**Shéhérazade Nineb — Pierre Alart — David Dureisseix**

*Laboratoire de Mécanique et Génie Civil UM2-CNRS CC048  
Place Eugène Bataillon F-34095 Montpellier CEDEX 5  
nineb@lmgc.univ-montp2.fr*

---

*RÉSUMÉ. Une des particularités des problèmes multicontacts réside dans le très grand nombre de contacts ou d'interactions qui conduit à des problèmes de grande taille. Ces derniers, source de difficultés numériques, ont engendré l'élaboration de différentes approches, notamment la parallélisation d'algorithmes. Nous poursuivons donc dans ce sens en nous intéressant à une approche multiéchelle de type LATIN (Large Time INcrement) restreinte dans un premier temps à une problématique intermédiaire : celle des systèmes de tensegrité vus comme des milieux discrets modèles.*

*ABSTRACT. A specific feature of multicontact problems is the large number of contact or interaction conditions that leads to large scale problems. Several approaches, among them algorithm parallelization, have been designed to tackle the numerical difficulties arising from such problems. This work belongs to these algorithms, using the LATIN (LArge Time INcrement) multiscale approach. As a first step, the case of tensegrity systems is considered as a particular discrete medium.*

*MOTS-CLÉS : LATIN micro/macro, multiéchelle, systèmes discrets, non régulier, décomposition de domaine*

*KEYWORDS: LATIN micro/macro, multiscale, discrete systems, nonsmooth, domain decomposition*

---

## 1. Introduction

Les systèmes discrets non réguliers peuvent provenir de différentes modélisations mécaniques. Par exemple, les systèmes granulaires (Moreau 1999) où les interactions entre grains sont de type contact frottant, ou encore les systèmes de tenségrité (Motro 2003) où un grand nombre de câbles peuvent se détendre, conduisent à des problèmes non réguliers de grande taille. Lorsque le nombre de grains, ou de câbles, devient important, une approche multiéchelle intégrant une technique d'homogénéisation peut être bien adaptée comme stratégie de résolution de ces problèmes en complément de techniques numériques avancées (parallélisation (Renouf *et al.* 2004b), gradient conjugué (Renouf *et al.* 2004a),...). On s'intéresse ici au cas des structures de tenségrité, notamment dans le cas où elles sont construites à partir de l'agencement de modules élémentaires. Dans cet article, l'approche LATIN micro-macro (Ladevèze *et al.* 2000) initialement développée pour les milieux continus hétérogènes et testée sur des cas bidimensionnels (Loiseau *et al.* 2002, Nouy *et al.* 2002) est étendue au cas des milieux discrets et appliquée à une nappe de tenségrité tridimensionnelle.

La section suivante présente le problème de référence et sa formulation dans une approche de décomposition de domaine multiéchelle. La section 3 est consacrée à la stratégie de résolution et la section 4 présente la simulation réalisée d'une nappe de tenségrité.

## 2. Formulation du problème

Les systèmes de tenségrité sont des systèmes réticulés, spatiaux, constitués d'éléments rectilignes nommés "barres" ou "câbles", voir figure 1 (Motro 2003, Quirant *et al.* 2003). Les barres sont soumises à des sollicitations de compression et ne sont pas connectées entre elles, les câbles à des sollicitations de traction. Les liaisons entre ces éléments se font par l'intermédiaire de rotules parfaites portant le nom de "nœuds". Par la suite, les câbles et les barres seront qualifiés de "liens". Ces systèmes admettent des états d'autocontrainte c'est-à-dire des états de tension non nulle vérifiant l'équilibre sans chargement extérieur et assurant la rigidité de la structure. On se place sous les hypothèses de petites perturbations, dans le cas statique. La structure étudiée occupe un domaine  $\Omega$ . Elle est soumise à des déplacements imposés,  $U_d$ , sur une partie  $\Omega_1$  des nœuds, et à des charges imposées,  $F_d$ , sur la partie  $\Omega_2$  complémentaire. On considère qu'il n'y a pas de charge répartie pour simplifier la présentation. La configuration finale étant supposée confondue avec la configuration initiale, et comme seul cet état nous intéresse, le temps n'est pas un paramètre du problème. On définit la déformation dans chaque élément  $j$  (barre ou câble) par  $\epsilon_j = \frac{W_j}{l_j}$  où  $l_j$  est la longueur de l'élément et  $W_j$  la variation de cette longueur (analogue du champ de déformation en milieu continu). Le vecteur des valeurs de variation de longueurs,  $W$ , s'exprime linéairement en fonction du vecteur des déplacements des nœuds  $U$  sous la forme  $W = BU$ .

Le problème à résoudre consiste donc à trouver le couple  $(U, F)$  vérifiant :

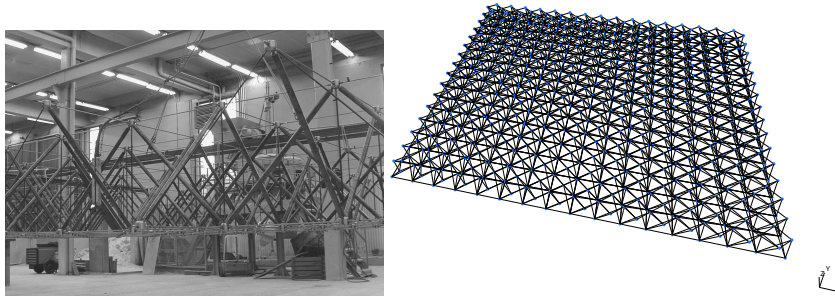
- l'admissibilité cinématique :  $U|_{\Omega_1} = U_d$  et  $W = BU$ ,
- l'équilibre écrit sous forme faible :

$$\forall U^*, U^*|_{\Omega_1} = 0, \quad \sum_{j \in \Omega} F_j \cdot W_j^* = \sum_{i \in \Omega_2} F_{d_i} \cdot U_i^*$$

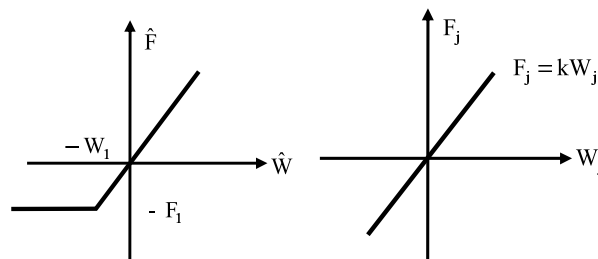
avec  $W^* = BU^*$ , où  $F_j$  représente l'effort dans un lien  $j$  (analogue du champ de contrainte en milieu continu),

- le comportement des câbles et des barres (voir figure 2) où  $F_1$  est la précontrainte initiale installée dans les câbles supposée connue ici, et  $W_1 = kF_1$  où  $k$  est la raideur du câble.

La stratégie proposée pour résoudre ce type de problème est une extension des approches micro-macro développées pour les milieux continus (Ladevèze *et al.* 2000) au cas des systèmes discrets.



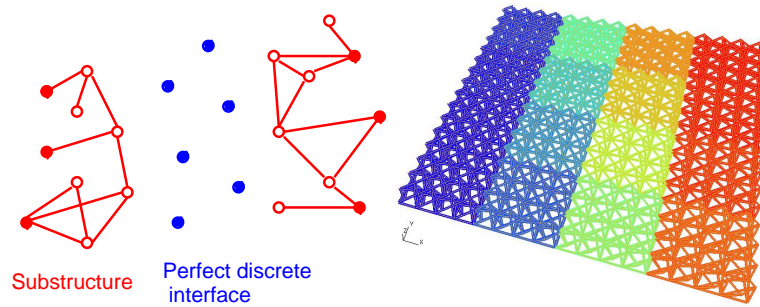
**Figure 1.** A gauche, structure de tensegrité du projet Tensarch (d'après R. Motro); à droite, maillage d'une nappe bidimensionnelle



**Figure 2.** Graphes du comportement des câbles (à gauche) et des barres (à droite)

### 2.1. Sous-structuration

Une première démarche vers une reformulation du problème, consiste en une décomposition de la structure en sous-structures et interfaces. On peut procéder de deux manières : soit on ventile les nœuds parmi les sous-structures, les interfaces sont alors les liens reliant une sous-structure à une autre ; soit on ventile les liens parmi les sous-structures, les interfaces sont alors les nœuds reliant une sous-structure à une autre. C'est ce dernier cas qui est envisagé ici, figure 3, le comportement des interfaces est alors parfait (équilibre des efforts et continuité des déplacements aux nœuds) et les non-régularités sont localisées dans les sous-structures. Cette stratégie est en quelque sorte duale de celle proposée dans (Nouy *et al.* 2002) où la non-linéarité (contact dans les fissures) est isolée dans les interfaces ; en ce sens elle est plus proche de celle utilisée dans (Barboteu *et al.* 2001).



**Figure 3.** Interface discrète et sous-structuration d'une nappe de tenségrité (en  $4 \times 4$  sous-structures)

### 2.2. Description micro/macro

La définition des champs microscopiques et macroscopiques porte sur les quantités d'interface du problème sous-structuré. On suit ici la démarche utilisée dans (Ladevèze *et al.* 2000, Dureisseix *et al.* 2001b). Par interface locale  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$ , étant donné un champ discret de forces aux nœuds de l'interface  $F_{E\Gamma}$  agissant sur  $\Omega_E$  par exemple, on définit sa partie macro  $F_{E\Gamma}^M$  comme étant sa résultante et son moment résultant. D'autres choix pourraient être retenus en particulier la possibilité de retenir des moments généralisés d'ordre plus élevé, mais cela augmente rapidement la taille du problème macro et n'est intéressant que si la convergence est suffisamment améliorée pour compenser ce coût. Ici, nous nous restreignons au choix précédent de partie macro limitée.

Avec une approche en effort, on choisit d'écrire  $F_{E\Gamma} = F_{E\Gamma}^M + F_{E\Gamma}^m$  où  $F_{E\Gamma}^m$  est le complément micro du champ d'effort. Les quantités micro  $V_{E\Gamma}^m$  et macro  $V_{E\Gamma}^M$  d'un champ de déplacement aux nœuds de l'interface  $V_{E\Gamma}$  sont obtenues par la dualité

sur l'interface  $F_{E\Gamma} \cdot V_{E\Gamma} = F_{E\Gamma}^M \cdot V_{E\Gamma}^M + F_{E\Gamma}^m \cdot V_{E\Gamma}^m$ . On en déduit directement que  $V_{E\Gamma}^M$  contient alors les translations et rotations moyennes du champ discret de déplacement.

À la différence d'un partitionnement d'un milieu continu (Ladevèze *et al.* 2000, Dureisseix *et al.* 2001b), le cas d'un milieu discret conduit à une connectivité de la décomposition plus élevée (grand nombre d'interfaces par rapport au nombre de sous-structures) mais aussi à quelques interfaces de petite taille (faible nombre de nœuds). De telles interfaces, qualifiées de "faibles", peuvent avoir trop peu de nœuds pour décomposer leur espace de discrétisation en un sous-espace macro et un sous-espace micro (par exemple moins de quatre nœuds en 3D). On choisit alors de ne pas définir de parties macro sur ces interfaces faibles.

### 3. Stratégie de calcul

L'approche utilisée est de type LATIN identique à (Dureisseix *et al.* 2001b). La stratégie est itérative, et chaque itération comporte une étape linéaire et une étape locale.

L'étape linéaire conduit à un problème de type élasticité linéaire, indépendant par sous-structure ainsi qu'à un problème global généralisé portant uniquement sur les quantités macro (résultantes et moments dans les interfaces). Il est très similaire à celui utilisé dans (Dureisseix *et al.* 2001b) et n'est pas détaillé ici. Le lecteur intéressé par le cas des systèmes discrets pourra trouver son expression détaillée dans (Nineb *et al.* à paraître). Dans l'étape locale, on obtient :

- par interface, un problème explicite local en chaque nœud d'interface. Avec le choix de la définition des interfaces fait ici, ce problème reste de plus linéaire, le comportement des nœuds consistant à transférer déplacement et effort de part et d'autre de l'interface.

- par sous-structure : on s'intéresse au comportement des câbles et des barres, en cherchant à obtenir les efforts intérieurs  $\widehat{F}$  dans les éléments et leur allongement  $\widehat{W}$ .

Pour les barres, les inconnues  $(\widehat{F}, \widehat{W})$  doivent vérifier :

- le comportement des barres (figure 2) :  $\widehat{F} = k\widehat{W}$ ,
- une direction de recherche à partir de l'estimation de la solution  $(F, W)$  obtenue à l'étape linéaire précédente :  $(\widehat{F} - F) + l(\widehat{W} - W) = 0$  où  $l$  est un paramètre de la méthode, homogène à  $k$ . Il n'influe pas sur la solution à convergence, mais peut changer le taux de convergence de l'algorithme. Le problème obtenu est linéaire et explicite en  $(\widehat{F}, \widehat{W})$ .

Pour les câbles, les inconnues  $(\widehat{F}, \widehat{W})$  doivent vérifier :

- le comportement des câbles (figure 2),

- une direction de recherche, prise sous la même forme que pour les barres.  
Avec le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \widehat{F}_T = \widehat{F} + F_1 \\ \widehat{R}_T = -(\widehat{W} + W_1) + k^{-1}(\widehat{F} + F_1) \end{cases} \quad [1]$$

où  $F_1$  est la précontrainte initiale installée dans les câbles et  $W_1 = kF_1$ , le problème obtenu est un problème de complémentarité (LCP) scalaire (Katta 1997) pour chaque câble :

$$\begin{cases} \widehat{R}_T - (l^{-1} + k^{-1})\widehat{F}_T = -[(W + W_1) + l^{-1}(F + F_1)] \\ 0 \leq \widehat{R}_T \perp \widehat{F}_T \geq 0 \end{cases} \quad [2]$$

Sous la forme précédente, la stratégie utilisée fait partie de la famille des méthodes de décomposition de domaine multiéchelles, contenant, entre autres, pour les problèmes de contact, les approches développées dans (Barboteu *et al.* 2001, Nouy *et al.* 2002, Dureisseix *et al.* 2001a).

Ici, nous ne sommes pas préoccupés par la parallélisation de l'approche proposée mais par son utilisation comme solveur séquentiel.

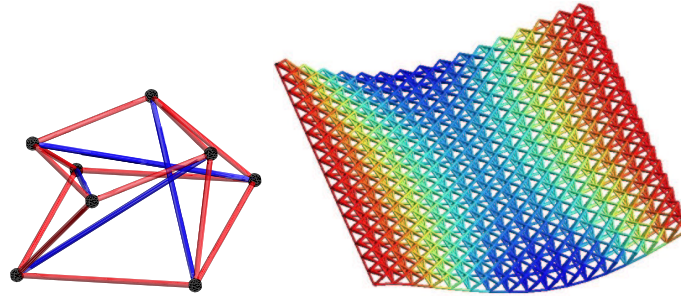
#### 4. Exemple de résultat

On s'intéresse à des nappes de différentes tailles obtenues par duplication d'un module autocontraint (Motro 2003, Quirant *et al.* 2003) constitué de 8 nœuds, 12 câbles et 4 barres (figure 4). Les nœuds de la partie inférieure sont bloqués sur deux bords uniquement et des efforts verticaux constants sont appliqués sur les nœuds complémentaires. En fonctionnement, le chargement (ou la surcharge) appliqué peut aller jusqu'à détendre une partie des câbles, jusqu'à une valeur critique où il y a perte de rigidité de la structure, analogue du flambement pour un milieu continu, pouvant aller jusqu'à l'apparition de mécanismes. On s'intéresse ici à ce type de chargement, et pour des structures de grande taille.

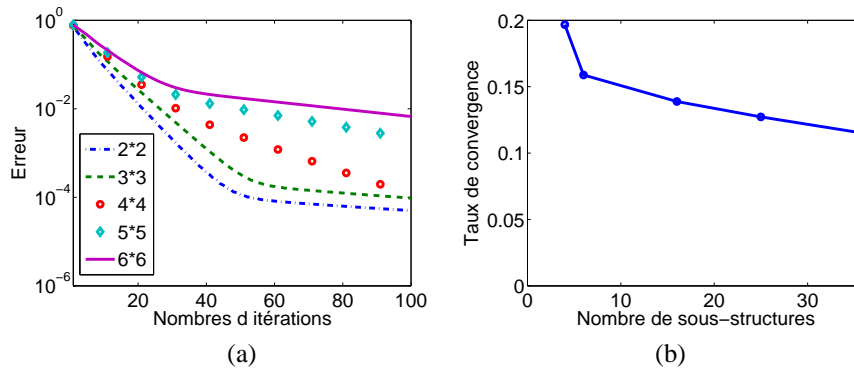
Les nappes successives sont constituées de 4, 9, 16, 25 et 36 sous-structures (contenant chacune 16 modules) et respectivement 6, 20, 42, 72 et 110 interfaces (dont 4, 12, 24, 40 et 60 interfaces fortes).

On s'intéresse à l'évolution du taux de convergence en fonction du nombre de sous-structures (figure 5). Afin de comparer des problèmes dont le taux de non-régularité est sensiblement équivalent, les efforts  $F_d$  appliqués aux nœuds de chacune des nappes sont ajustés pour obtenir une même fraction de câbles détendus lors de la mise en charge. Le type de problème posé ressemblant à une plaque sur appuis simples chargée uniformément, on peut s'attendre à une dérivée seconde de la flèche (liée à la déformation des modules constituant la plaque) qui évolue proportionnellement à la charge (dans le cas linéaire) et au carré de la longueur d'un côté.

Dans le cas des nappes de tensegrité étudiées, la charge est  $F_d$  et la longueur d'un côté évolue comme la racine du nombre de sous-structures  $N_S$ . On choisit donc un



**Figure 4.** Demi-cuboctaèdre utilisé (à gauche) et résultats sur une structure de tensegrité de 16 sous-structures (champ de déplacement amplifié 10 fois à droite)



**Figure 5.** Erreur au cours des itérations (a) et taux de convergence (b) pour des grilles de différentes tailles

chargement évoluant comme  $N_S^{-1/2}$ . Le tableau 1 précise les valeurs en question. Les autres caractéristiques des structures sont données dans le tableau 2.

La figure 4 présente la déformée obtenue dans le cas d'une grille composée de  $4 \times 4$  sous-structures. Dans les cas présentés, on arrive à une détente de 14 % en moyenne des câbles (tableau 1). On reste encore avec un niveau de charge choisi dans le domaine de fonctionnement stable de la structure, pour lequel elle continue de présenter une réserve de rigidité. La figure 6 donne la répartition des tensions dans les câbles après chargement de chacune des nappes.

Pour tester la convergence de l'algorithme, une solution de référence est tout d'abord obtenue pour chaque nappe avec un algorithme différent ; il s'agit ici d'un gradient projeté conjugué appliqué à une formulation LCP globale du problème, qu'on

peut trouver dans (Nineb *et al.* à paraître). À chaque itération de l'approche multi-échelle proposée, une erreur en énergie entre la solution produite et la référence est calculée, et son évolution est réportée sur la figure 5a.

$N_S$	Nombre de câbles	$F_d$	Pourcentage de câbles détendus	Taux de convergence initial
$2 \times 2$	768	$4 \times F_0$	14.06%	0.1967
$3 \times 3$	1728	$1.8 \times F_0$	11.92%	0.1588
$4 \times 4$	3072	$F_0$	13.28%	0.1388
$5 \times 5$	4800	$0.64 \times F_0$	15.42%	0.1272
$6 \times 6$	6912	$0.44 \times F_0$	16.52%	0.1149

**Tableau 1.** Caractéristiques des simulations numériques

$H = 0.5$ m	Hauteur du module
$L = 1$ m	Longueur du module
$S_c = 0.5 \cdot 10^{-4}$ m <sup>2</sup>	Section des câbles
$E_c = 10^{11}$ Pa	Module d'Young des câbles
$S_b = 2.8 \cdot 10^{-4}$ m <sup>2</sup>	Section des barres
$E_b = 2 \cdot 10^{11}$ Pa	Module d'Young des barres
$F_{1b} = 2000$ N	Précontrainte des câbles inférieurs
$F_{1c} = \sqrt{2} \times 2000$ N	Précontrainte des câbles supérieurs
$F_{1c} = \sqrt{(1 + 4 \frac{H^2}{L^2})} \times 2000$ N	Précontrainte des câbles inclinés
$F_{1b} = -\sqrt{(5 + 4 \frac{H^2}{L^2})} \times 2000$ N	Précontrainte des barres
$F_0 = 40$ N	Charge verticale en chaque nœud

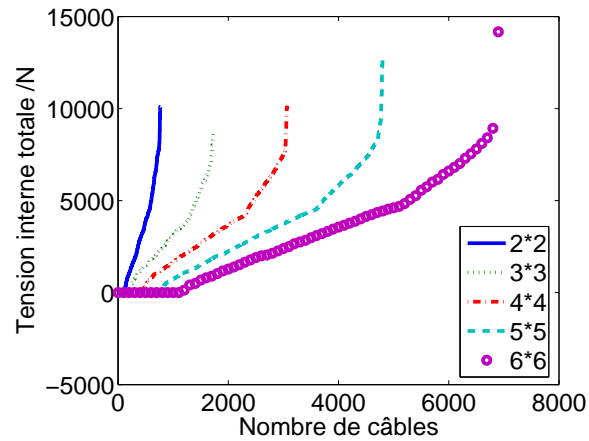
**Tableau 2.** Paramètres caractéristiques

De manière générale, on peut observer deux taux de convergence différents : un taux initial lorsque la solution est corrigée globalement lors des premières itérations, puis un deuxième, moins élevé après 30 à 40 itérations lorsque les corrections apportées sont plus locales. Ceci peut être dû à l'utilisation d'une direction de recherche constante prise égale à la "raideur" de chaque lien :  $l = k$ . Lorsque le statut des câbles est à peu près figé, il est clair que cette raideur est éloignée de la raideur tangente des câbles détendus. Une adaptation de la direction de recherche est l'une des premières études envisagées dans la suite des développements pour améliorer la convergence.

Ici, nous cherchons à quantifier la convergence en relevant pour chaque simulation le taux de convergence initial, calculé de la façon suivante :  $\tau = -\frac{\log \frac{e(n)}{e(1)}}{n-1}$  où  $e(n)$  désigne l'erreur obtenue à l'itération  $n$ . Les valeurs trouvées sont reportées sur la figure 5b et dans le tableau 1.



Une méthode de décomposition de domaine numériquement extensible exhibe un taux de convergence peu dépendant du nombre  $N_S$  de sous-structure utilisé, lorsque la taille du problème local (par sous-structure) reste constant. On observe ici une légère dépendance (si on excepte le cas  $N_S = 4$  où le nombre de sous-structures est très faible) du taux de convergence initial vis-à-vis de  $N_S$ . L'influence du choix de la direction de recherche sur cette extensibilité numérique devra aussi être précisée.



**Figure 6.** Tensions internes totales dans les câbles

## 5. Conclusions et perspectives

La simulation des systèmes de tenségrité de grande taille, lorsque les charges appliquées conduisent à la détente de nombreux câbles, nécessite la résolution de grands systèmes non réguliers. L'adaptation d'une approche multiéchelle de décomposition de domaine a été réalisée pour traiter ces systèmes discrets lorsque la non-régularité est présente à l'intérieur des sous-structures. L'influence du nombre de sous-structures sur le taux de convergence a été présenté.

À court terme, il sera intéressant d'avoir une sélection automatique d'une direction de recherche optimale, vis-à-vis du taux de convergence de l'algorithme ; le critère d'arrêt de ce dernier devra être robuste. La direction de recherche, choisie ici locale par élément (câble ou barre), pourrait aussi être prise globale par sous-structure ; auquel cas le problème LCP devient vectoriel et requiert une résolution adaptée (Nineb *et al.* 2005, Renouf *et al.* 2004a). La méthode fournit aussi en sous-produit une homogénéisation des sous-structures, c'est-à-dire d'un groupe de cellules autocontraintes, et une interprétation de ce comportement homogénéisé sera étudiée.

À plus long terme, l'utilisation de ce type d'approche pourra être étendu au cas de la dynamique des milieux granulaires, pour laquelle une difficulté supplémentaire est l'évolution importante de la configuration lors des écoulements éventuels des grains.

## Remerciements

Cette étude a été partiellement supportée par le projet européen IST2001-37172 SICONOS (Simulation and Control of Non Smooth Dynamical Systems).

## 6. Bibliographie

- Barboteu M., Alart P., Vidrascu M., « A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, p. 4785-4803, 2001.
- Dureisseix D., Farhat C., « A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, p. 2643-2666, 2001a.
- Dureisseix D., Ladevèze P., Loiseau O., « A micro/macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, p. 121-138, 2001b.
- Katta M., *Principal pivoting methods for LCP*, Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, 1997.
- Ladevèze P., Dureisseix D., « A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures », *Int. J. for Comput. Civil and Struct. Engng.*, vol. 1, p. 18-28, 2000.
- Loiseau O., Ladevèze P., Dureisseix D., « Sur une stratégie de calcul multiéchelle pour l'analyse des structures composites : discrétisation et performances », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 11, p. 349-362, 2002.
- Moreau J., « Numerical aspects of sweeping process », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 177, p. 329-349, 1999.
- Motro R., *Tensegrity*, Hermes Science Publishing, London, 2003.
- Nineb S., Alart P., Dubois F., Dureisseix D., « Solveurs de systèmes de complémentarité et application à la tensegrité », *Actes du 17<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique*, Troyes, 2005.
- Nineb S., Alart P., Dureisseix D., « Domain decomposition approach for nonsmooth discrete problems - example of a tensegrity structure », *Computers and Structures*, à paraître.
- Nouy A., Ladevèze P., Loiseau O., « A multiscale computational approach for contact problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, p. 4869-4891, 2002.
- Quirant J., Kazi-Aoual M., Motro R., « Designing tensegrity systems : the case of a double layer grid », *Engineering Structures*, vol. 25(9), p. 1121-1130, 2003.
- Renouf M., Alart P., « Conjugate gradient type algorithms for frictional multi-contact problems : applications to granular materials », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004a.
- Renouf M., Dubois F., Alart P., « A parallel version of non smooth contact dynamics algorithm applied to simulation of granular medium », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 168, p. 375-382, 2004b.