

---

# Application de la méthode asymptotique numérique au contact des dents d'engrenage

Frej Chaouachi\* — Michel Potier-Ferry\*\* — Ali Zghal\*

\* *Unité de Mécanique des Solides,  
des Structures et Développement technologique  
École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis  
5 Avenue Taha Hussein  
BP 56, Bâb Manara  
Tunis, Tunisie  
{frej.chaouachi, ali.zghal}@esstt.rnu.tn*

\*\* *Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux  
I.S.G.M.P. – Ile du Saulcy, Université de Metz  
F-57045 Metz  
potier-ferry@lpm.univ-metz.fr*

---

*RÉSUMÉ. Ce travail consiste à appliquer la méthode asymptotique numérique conjointement à la méthode des éléments finis, et à la loi classique de contact pour formuler l'engrènement. L'étude met en évidence les limites des effets du contact dans l'épaisseur de la dent, afin de déterminer la part du déplacement due au contact. Cette composante sera comparée avec des approches analytiques en faisant varier les différents paramètres liés à la méthode asymptotique numérique et à la loi de contact. Ainsi on peut choisir ces paramètres pour être en bonne adéquation avec les approches analytiques.*

*ABSTRACT. This work consists in jointly applying the asymptotic numerical method to the finite element method, and the classical contact law to formulate gearing. In order to determine the component of displacement only due to contact, the study highlights the limits of the effects of the contact in the thickness of the tooth. The various parameters related to the numerical asymptotic method and the law of contact are varied in different simulations and the results are compared with those of the literature. These parameters are chosen to be in good adequacy with the analytical approaches.*

*MOTS-CLÉS : méthode asymptotique numérique, contact, engrenage, déplacement, éléments finis.*

*KEYWORD: asymptotic numerical method, contact, gear, displacements, finite element.*

---

## 1. Introduction

Le dimensionnement, la vibration, le bruit, l'usure, la fatigue et l'échauffement des engrenages sont des problèmes souvent abordés par les équipes de recherche. L'amélioration des conditions de fonctionnement, l'augmentation de la durée de vie et la minimisation du bruit, sont les objectifs de ces recherches. Ces différents phénomènes sont étroitement liés aux effets du contact entre les dents.

Pendant la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle, la formulation du problème des engrenages est basée sur la théorie de contact de (Hertz, 1996) et la théorie de la résistance des matériaux (Walker, 1938-1 ; Weber, 1949). Par ailleurs, des études expérimentales (Walker, 1938-1, 1938-3, 1940) sont menées simultanément pour valider ces approches.

Avec le développement de l'outil informatique de la fin du XX<sup>e</sup> siècle, des nouvelles orientations de recherches sur les engrenages ont vu le jour, essentiellement axées sur la méthode des éléments finis et la théorie de l'élasticité. Les travaux sur les éléments finis sont orientés vers l'influence du type d'élément et de la densité de maillage sur la qualité des résultats (Coy *et al.*, 1982 ; Gagnon *et al.*, 1991). De plus, de nouvelles modélisations et formulations de contact sont établies pour s'accommoder au mieux avec la méthode des éléments finis (Refaat *et al.*, 1995).

Jusqu'alors la méthode de Newton Raphson est la plus utilisée dans les calculs numériques des problèmes non linéaires et notamment les problèmes de contact. A chaque pas de calcul, un grand nombre de traitements matriciels s'impose, ce qui nécessite un temps de calcul très élevé, une grande puissance informatique, et un utilisateur expérimenté. Dans le but d'améliorer les techniques de résolution, des travaux utilisant la méthode asymptotique numérique (MAN) sont menés, (Cochelin, 1994), visant la réduction du temps de calcul. L'élément-clé de cette méthode est la transformation d'un problème non linéaire en une succession de problèmes linéaires où la résolution se fait par branche au voisinage d'un point de départ.

Dans le but de contribuer à l'investigation des engrenages, on propose une application du principe des travaux virtuels pour formuler l'équilibre de la roue et du pignon. D'un autre côté, l'interface de contact est formulée par l'application de la relation classique de contact. La résolution du problème est basée sur la méthode asymptotique numérique conjointement à la méthode des éléments finis.

La première partie de ce travail contient l'étude théorique, où l'injection de la loi de contact dans la formulation est faite après une régularisation de cette loi. Une méthode ciblant l'homogénéisation du contact, est proposée pour déterminer les différents paramètres de cette régularisation en fonction du nœud potentiellement en contact.

La deuxième partie du travail traite des limites de l'effet de contact suivant l'épaisseur de la dent pour déterminer la part du déplacement qui n'est due qu'au contact. Le choix des paramètres liés à la formulation de contact, à la méthode des

éléments finis et à la méthode asymptotique numérique est assuré après plusieurs simulations où des rectifications successives sur ces paramètres sont réalisées. Ces choix sont faits par des comparaisons avec des résultats découlant d'autres approches. Enfin les résultats du présent travail sont confrontés aux résultats des approches analytiques (Weber, 1949 ; Cornell, 1981).

## 2. Présentation théorique

### 2.1. Etude de l'équilibre de l'engrenage

Les travaux de la référence (Elhage Hussein *et al.*, 1998) sont basés sur la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner où on suppose une variable mixte  $U = (u, S)$ , où  $u$ ,  $S$  sont respectivement le vecteur déplacement et le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce.

Changement d'indice

$$P_e \int_{\Omega_0} ({}^t \mathbf{S} : \delta \gamma + \delta \mathbf{S} : \gamma - {}^t \mathbf{S} : \mathbf{D}^{-1} : \delta \mathbf{S}) dv - \lambda P_e (\delta u) - \delta P_c(u) = 0$$

$$\delta P_c(u) = \int_{\partial \Omega_c} \mathbf{R}(u) \delta \mathbf{u} ds$$

$$P_e(u) = \int_{\Omega_0} \rho b \mathbf{u} dv + \int_{\partial \Omega_f} \mathbf{t} \mathbf{u} ds$$

- $D$  est le tenseur d'élasticité,
- $\lambda$  est le paramètre de charge,
- $\gamma$  est le tenseur de déformation de Green-Lagrange,
- $\rho$  est la densité volumique de la force de volume.

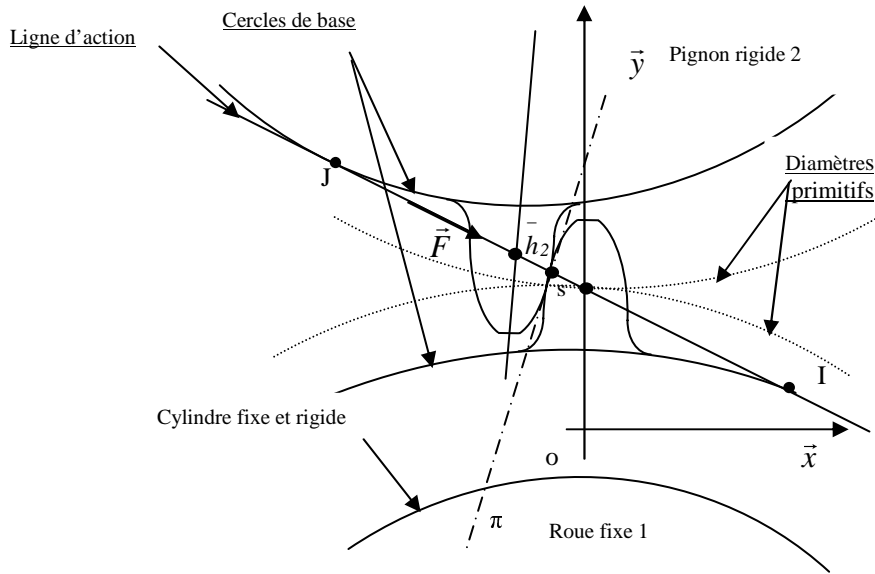
On remarque que la puissance de contact est injectée directement dans l'équation aux dérivées partielles, cette approche est adaptée à un problème de contact unilatéral où le corps rigide est fixe alors que le corps déformable est encastré et soumis à une force extérieure le mettant en contact avec le corps rigide. Dans ces conditions le corps déformable supporte une puissance extérieure  $P_e(u)$  et une puissance de contact  $P_c(u)$ .

Dans le présent travail on suppose l'engrènement entre la roue 1 déformable encastrée sur un cylindre fixe (figure 1) et le pignon rigide 2. On considère que le pignon exerce sur la roue une force d'intensité donnée. On introduit un paramètre de charge  $\lambda$  qui décrit l'intensité de cette force. Cette dernière équilibre les réactions de contact  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ .

$$\lambda F_o \cdot \mathbf{n} = \int_{sc} \mathbf{R}(\mathbf{x}) ds$$

sc : La surface de contact

Où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la surface de contact. Alors la roue n'est soumise qu'à la réaction de contact et à l'encastrement.



**Figure 1.** *Engrènement de la roue et du pignon*

On a formulé les équilibres de la roue et du pignon séparément en appliquant le principe des travaux virtuels qui se traduit par une équation scalaire [1] pour le pignon rigide animé d'un déplacement  $\mathbf{u}_\pi$  porté par la normale au contact ; et par une équation aux dérivées partielles [2] pour la roue déformable.

$$\int_{sc} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{u}_\pi \, ds = \lambda \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}_\pi \quad \forall \delta \mathbf{u}_\pi = \delta u_\pi \mathbf{n} \quad [1]$$

$$\int_{roue} \mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\gamma} \, dv - \int_{sc} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}(x) \quad [2]$$

- $\mathbf{u}$  : Le vecteur déplacement des points de la roue,
- $\mathbf{u}_\pi$  : Le vecteur déplacement du pignon rigide 2,
- $\mathbf{S}$  : Le tenseur de contrainte,
- $\boldsymbol{\gamma}$  : Le tenseur de déformation.

## 2.2. Etude de la loi de contact

La loi de contact est supposée sans frottement, elle associe à chaque point de contact, une variable scalaire  $h$ , représentant la distance suivant la normale  $\mathbf{n}$ , entre un point du corps déformable et le corps rigide. Le module de la force  $\mathbf{R}$  est lié à  $h$  par la loi [3] illustrée par la figure 2 ; cette loi n'est pas analytique. Pour surmonter ce problème, l'auteur (Elhage Hussein *et al.*, 1998) propose une régularisation décrite par [4] et illustrée par la figure 3.

$$\mathbf{R} = R\mathbf{n} , \quad h \geq 0 , \quad R \geq 0 , \quad hR = 0 \quad [3]$$

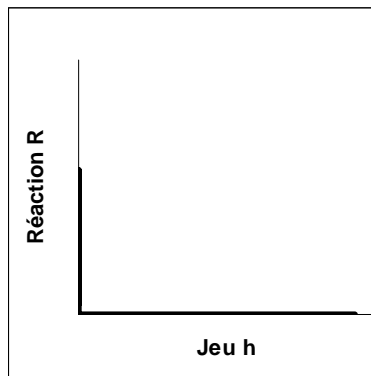
$$hR = \eta (\delta - h) \quad [4]$$

$\eta$  le coefficient de régularisation de valeur positive.

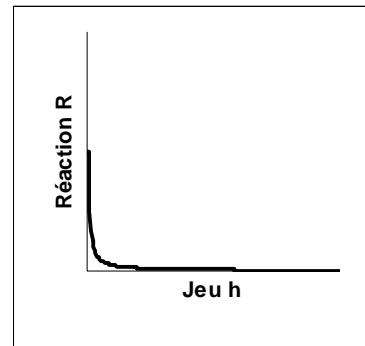
$\delta$  le jeu initial.

Une étude géométrique simple permet de donner une relation entre les paramètres intervenants dans le contact, soit :

$$h = \delta + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi) \cdot \mathbf{n} \quad [5]$$



**Figure 2.** La loi classique de contact en fonction du jeu  $h$



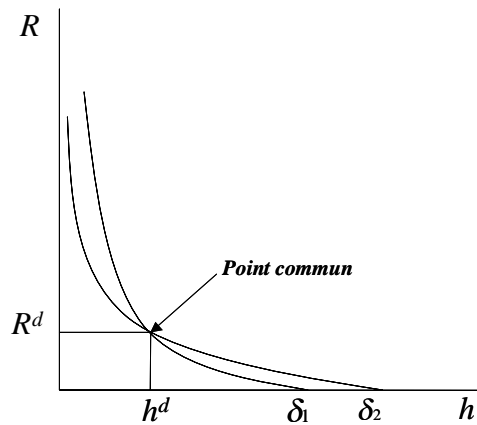
**Figure 3.** Régularisation de la loi classique de contact

## 2.3. Détermination des paramètres de régularisation

La régularisation [4] met en évidence la relation entre la réaction de contact  $\mathbf{R}$  et le jeu initial  $\delta$  qui à son tour varie d'un nœud à un autre ; ce qui pose un problème d'homogénéisation de la loi de contact. L'idée pour surmonter ce problème, consiste à choisir le paramètre de contact  $\eta$  en fonction de  $\delta$  assurant l'homogénéité.

A. El Hage Hussein (Elhage Hussein *et al.*, 1998), suppose l'existence d'un point de coordonnées  $(h^d, R^d)$  (figure 4) qui soit l'intersection des deux lois de contact régularisées dont l'une est complètement connue ; l'autre est de jeu initial  $\delta_e$  connu, alors que le paramètre de contact  $\eta_e$  est à déterminer à partir de l'équation suivante :

$$R^d h^d = \eta_e (\delta_e - h^d)$$



**Figure 4.** Définition du paramètre de contact par un point

Une même procédure est suivie pour déterminer les différentes valeurs de  $\eta$  correspondant aux différents jeux initiaux  $\delta_e$ . Cette méthode ne permet qu'une quasi-homogénéité au voisinage du point  $R^d, h^d$ . Dans le paragraphe suivant, on élabore une méthode qu'on estime capable de permettre une homogénéisation sur une plage de valeurs du jeu  $h$ .

Remarquons que la loi [4] revient à :

$$\mathbf{R.n} = R(h) = \eta (\delta - h) / h$$

Connaissant le jeu initial  $\delta_1$  et le paramètre  $\eta_1$  relatifs au nœud se trouvant au centre de la zone de contact et par conséquent  $R_1(h)$  (figure 5), on détermine  $\eta_2$  correspondant à un autre nœud de jeu initial connu  $\delta_2$ .

La stratégie consiste à rapprocher au maximum les lois de comportement  $R_2(h_i)$  et  $R_1(h_i)$  et ce, en minimisant la somme des différences  $d$  :

$$d = R_2(h_i) - R_1(h_i).$$

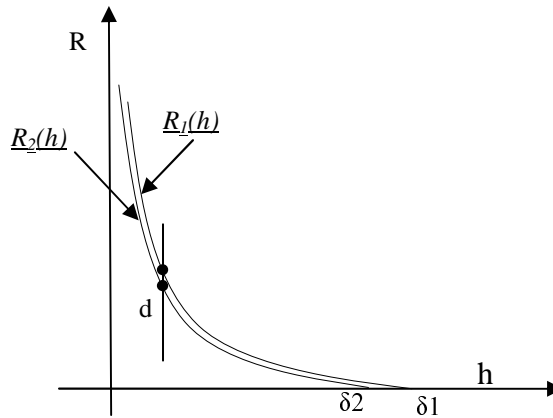
Pour effectuer la minimisation, on se donne une famille de jeux  $h_i$  équidistants :

$$h_i - h_{i-1} = \delta / n$$

Pour déterminer  $\eta_2$ , on applique la méthode des moindres carrés en minimisant par rapport à  $\eta_2$ , soit :

$$\eta_2 = \frac{2\eta_1 \sum_1^n \left( \frac{(\delta_1 - h_i)(\delta_2 - h_i)}{h_i^2} \right)^2}{\sum_i^n \frac{(\delta_2 - h_i)^2}{h_i^2}}$$

Cette même technique se répète pour tous les nœuds potentiellement en contact.



**Figure 5.** Définition d'un paramètre de contact sur une plage

La méthode asymptotique numérique suppose connues les solutions à l'ordre 0 ( $u_0, R_0, \lambda_0$ ), les différents paramètres du problème sont écrits sous forme d'une série asymptotique ; soit :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^p a^i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_\pi = \sum_{i=0}^p a^i \mathbf{u}_{\pi i}, \quad \mathbf{R} = \sum_{i=0}^p a^i \mathbf{R}_i, \quad \lambda = \sum_{i=0}^p a^i \lambda_i,$$

$$a = \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0) \lambda_1$$

La technique de perturbation est appliquée au problème formulé par, [1], [2], [4], [5], en tenant compte de la loi de comportement du matériau  $\mathbf{S} = \mathbf{L} : \boldsymbol{\gamma}$ . Les expressions des différentes variables aux différents ordres sont données par [6], [7],

[8]. On ne détaille ici que l'application aux relations de contact [4], [5] et à l'équilibre du pignon 1.

$$\mathbf{R}_0 = -\eta \frac{(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{\pi 0}) \cdot \mathbf{n}}{h_0} \mathbf{n} \quad [6]$$

$$\mathbf{R}_1 = -\frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{\pi 1}) \cdot \mathbf{n}}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \quad [7]$$

$$\mathbf{R}_p = -\frac{(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{\pi p}) \cdot \mathbf{n}}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) - \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{R}_r \frac{(\mathbf{u}_{p-r} - \mathbf{u}_{\pi p-r}) \cdot \mathbf{n}}{h_0} \mathbf{n} \quad [8]$$

avec :

$$h_0 = \delta + (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{\pi 0}) \cdot \mathbf{n}$$

#### 2.4. Ecriture du principe des travaux virtuels aux différents ordres

L'application du principe des travaux virtuels au problème, consiste à injecter [6], [7], [8] dans les équations [1] et [2]. Ainsi on obtient une succession de problèmes aux différents ordres.

##### Ordre 1

$$\int_{\text{pignon}} -\frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{\pi 1}) \cdot \mathbf{n}}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \cdot \delta \mathbf{u}_\pi \, ds = \lambda_1 \mathbf{F}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_\pi \quad \forall \delta \mathbf{u}_\pi$$

$$\int_{\text{roue}} \mathbf{S}_1 : \delta \boldsymbol{\gamma} \, dv + \int_{sc} \frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{\pi 1}) \cdot \mathbf{n}}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

##### Ordre p $p > 2$

$$\int_{\text{pignon}} -\frac{h_p}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \delta \mathbf{u}_\pi - \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{R}_r \frac{h_{p-r}}{h_0} \delta \mathbf{u}_\pi = \lambda_p \mathbf{F}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_\pi \quad \forall \delta \mathbf{u}_\pi$$

$$\int_{\text{roue}} \mathbf{S}_p \delta \boldsymbol{\gamma} \, dv + \sum_{ndc}^{nfc} \left[ \frac{h_p}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) + \sum_{r=1}^p \frac{\mathbf{R}_r h_{p-r}}{h_0} \right] \delta \mathbf{u} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$



$ndc$  : Premier nœud potentiellement en contact

$nfc$  : Dernier nœud potentiellement en contact

$$h_p = (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{\pi p}) \cdot \mathbf{n}$$

### 2.5. Discrétisation par éléments finis

La discrétisation est très semblable à celle décrite dans (Cochelin, 1994). Posons  $\{v\}$  le vecteur déplacement des nœuds de composantes  $v_x$  et  $v_y$ .

$$[\delta \gamma] = [B] \{\delta v\}$$

$$[\gamma] = [\gamma^l] + [\gamma^{nl}]$$

$$[\gamma^{nl}] = 1/2[A] [\theta(v)] = 1/2[A] [G] [v]$$

$[\gamma^l]$ ,  $[\gamma^{nl}]$  sont les parties linéaires et non linéaires du tenseur de déformation.

$[\theta(v)]$  : le vecteur gradient de déplacement.

$[G]$  : la matrice du gradient des fonctions de forme.

$[D]$  : la matrice de comportement élastique.

$[A]$  : la matrice du gradient de déplacement.

#### Ordre 1

L'équation [1] sera comme suit :

$$\sum_{ndc}^{nfc} - \frac{(v_1 - v_{\pi 1}) \cdot \mathbf{n}}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \cdot \delta v_{\pi} = \lambda_l \mathbf{F}_0 \cdot \delta v_{\pi}$$

Rappelons que les variables  $\delta$  et  $\eta$  dépendent des points de contact mais pour éviter l'encombrement des équations nous avons évité d'introduire des indices reflétant cette dépendance. En tenant compte des travaux de (Cochelin *et al.*, 1994), l'équation [2] devient ;

$$\int_{roue} ([B]^t [D] [B] + [G]^t [S_0] [G]) dv \{v\} \{\delta v\} + \sum_{ndc}^{nfc} \frac{(v_1 - v_{\pi 1}) \cdot \mathbf{n}}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \cdot \{\delta v\} = 0$$

Enfin on injecte les égalités suivantes,

$$\sum_{ndc}^{nfc} -\frac{(v_1 - v_{\pi 1}) \mathbf{n}}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \delta v_{\pi} = \sum_{ndc}^{nfc} \frac{\eta + R_0}{h_0} [\delta v_{\pi}] \begin{bmatrix} I & -I & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{I\pi} \\ v_{Ix} \\ v_{Iy} \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{ndc}^{nfc} \frac{(v_1 - v_{\pi 1}) \mathbf{n}}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \cdot \{\delta v\} = \sum_{ndc}^{nfc} \frac{\eta + R_0}{h_0} [\delta v_x \quad \delta v_y] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{I\pi} \\ v_{Ix} \\ v_{Iy} \end{Bmatrix}$$

L'équation [1] s'écrit sous la forme matricielle comme suit :

$$\sum_{ndc}^{nfc} \frac{\eta + R_0}{h_0} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{K_1} \begin{Bmatrix} v_{I\pi} \\ v_{Ix} \\ v_{Iy} \end{Bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{F}_0.$$

Par ailleurs, rappelons que l'élément de la roue est rectangulaire à quatre nœuds, et que le déplacement est dans le plan ainsi l'équation [2] s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\int_{roue} ([B]^t [D][B] + [G]^t [S_0][G]) dv \begin{Bmatrix} v_{Ix} \\ v_{Iy} \\ v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{4x} \\ v_{4y} \end{Bmatrix} + \sum_{ndc}^{nfc} \frac{\eta + R_0}{h_0} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K_2} \begin{Bmatrix} v_{I\pi} \\ v_{Ix} \\ v_{Iy} \end{Bmatrix} = 0$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{nelemr} \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{81} & \dots & k_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{Ix} \\ v_{Iy} \\ v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{4x} \\ v_{4y} \end{Bmatrix} + \sum_{ndc}^{nfc} \frac{\eta + R_0}{h_0} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K_2} \begin{Bmatrix} v_{I\pi} \\ v_{Ix} \\ v_{Iy} \end{Bmatrix} = 0$$

avec *nelemr*, le nombre des éléments de la roue.

Si on considère simultanément les deux équations du principe des travaux virtuels on obtient l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{matrix} \text{nelemr} \\ \sum \\ i=1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & k_{11} & \text{-----} & k_{18} \\ & | & & | \\ & k_{81} & \text{-----} & k_{88} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\pi}^I \\ v_{1x}^I \\ v_{1y}^I \\ v_{2x}^I \\ v_{2y}^I \\ v_{3x}^I \\ v_{3y}^I \\ v_{4x}^I \\ v_{4y}^I \end{bmatrix} + \sum_{\text{ndc}} \frac{\eta + R_0}{h_0} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\pi}^I \\ v_{1x}^I \\ v_{1y}^I \\ v_{2x}^I \\ v_{2y}^I \\ v_{3x}^I \\ v_{3y}^I \\ v_{4x}^I \\ v_{4y}^I \end{bmatrix} = \lambda_p \mathbf{F}_0$$

$[K_{el}]$   $[K_c]$

**Ordre p**

D'une manière explicite le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\left( \sum_{\text{ndc}} - \frac{h_p}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \right) \delta v_{\pi} = (\lambda_p \mathbf{F}_0 + \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{R}_r \frac{h_{p-r}}{h_0}) \delta v_{\pi}$$

$$\int_{\text{roue}} ([B]^T [D][B] + [G]^T [S_0][G]) dv \delta v + \sum_{\text{ndc}} \frac{h_p}{h_0} (\eta \mathbf{n} + \mathbf{R}_0) \delta v_{\pi} = -[G]^T \left\{ \sum_{r=1}^{p-1} [A(v_{p-r})]^T [s_r] \right\}$$

$$+ [B(v_0)]^T [D] \left\{ \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{2} [A(v_{p-r})] \theta(v_r) \right\} dv \delta v - \sum_{r=1}^p \mathbf{R}_r h_{p-r} \delta v$$

Ce qui se traduit par :

$$\begin{matrix} \text{nelemr} \\ \sum \\ i=1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & k_{11} & \text{-----} & k_{18} \\ & | & & | \\ & k_{81} & \text{-----} & k_{88} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\pi}^p \\ v_{1x}^p \\ v_{1y}^p \\ v_{2x}^p \\ v_{2y}^p \\ v_{3x}^p \\ v_{3y}^p \\ v_{4x}^p \\ v_{4y}^p \end{bmatrix} + \sum_{\text{ndc}} \frac{\eta + R_0}{h_0} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\pi}^p \\ v_{1x}^p \\ v_{1y}^p \\ v_{2x}^p \\ v_{2y}^p \\ v_{3x}^p \\ v_{3y}^p \\ v_{4x}^p \\ v_{4y}^p \end{bmatrix} = \lambda_p \{F_0\} + \{F_d^{nl}\} + \{F_c^{nl}\}$$

$[K_{el}]$   $[K_c]$

$$\{F_d^{nl}\} = \int_{roue} -[G]^T \left\{ \sum_{r=1}^{p-1} [A(v_{p-r})]^T [s_r] \right\} + [B(v_0)]^T [D] \left\{ \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{2} [A(v_{p-r})] [\theta(v_r)] \right\} dv$$

$$\{F_c^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=1}^{p-1} \frac{\mathbf{R}_r h_{p-r}}{h_0} \\ - \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{R}_r \frac{h_{p-r}}{h_0} \end{array} \right\}$$

Le calcul de la valeur du paramètre  $a$ , à sa valeur maximale  $a_m$ , relatif à chaque branche de solution, est donné en fonction de l'ordre de troncature  $n$  et d'un paramètre de précision  $\varepsilon$  à choisir assez petit (Cochelin, 1994). Soit :

$$a_m = \varepsilon \left( \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_n\|} \right)^{1/n-1}.$$

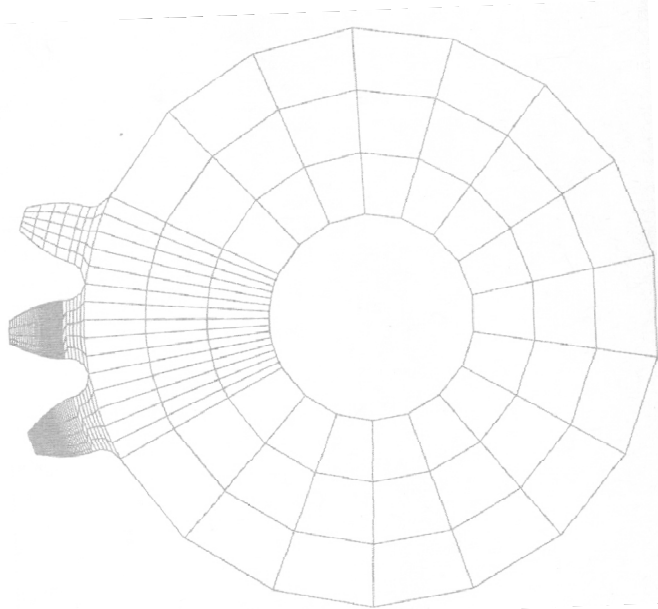
Ainsi la longueur de pas est définie après le calcul de la série (pas adaptatif), et les différentes inconnues  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_\pi$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $h$  sont données sous forme de séries asymptotiques.

### 3. Présentation du maillage

La qualité des résultats est étroitement liée aux choix adéquats du type de l'élément et de sa taille. Dans cette optique, les travaux des références (Coy *et al.*, 1982 ; Gagnon *et al.*, 1991) sont axés sur l'investigation de l'influence de la densité de maillage et du type des éléments sur la qualité des résultats.

En se basant sur ces travaux, on opte pour un élément rectangulaire à quatre nœuds et à quatre points de gauss. D'un autre côté les dimensions sont choisies afin de respecter les rapports des dimensions données par (Coy *et al.*, 1982). Dans l'élaboration de la densité de maillage on a tenu compte de la surface de contact très réduite et nécessitant un nombre élevé d'éléments, ce qui augmente la dimension du problème. Pour surmonter cette entrave, le maillage est très fin au niveau des contacts et de plus en plus grossiers en s'éloignant (figure 6).

Les éléments de contact sont à une seule dimension avec deux nœuds aux extrémités ; dont l'une est confondue avec un nœud des éléments de la roue, l'autre appartient au pignon. Les longueurs de ces éléments dépendent des positions d'engrènement. Pour chacune de ces positions, on détermine l'équation relative aux profils conjugués. Puis à chaque nœud de la roue on associe le point du pignon le plus proche, ce qui détermine le jeu  $\delta$  en ce point. Un mailleur automatique a été mis en place, qui tient compte de la position de l'engrènement.



**Figure 6.** *Maillage de la roue dentée*

#### **4. Influences des différents paramètres**

##### **4.1. Introduction**

La résolution numérique du problème nécessite des choix adéquats des paramètres ; à savoir :

- le paramètre de régularisation de contact,  $\eta$  ;
- le jeu initial,  $\delta$  ;
- l'ordre de troncature de la série asymptotique,  $n$  ;
- le paramètre de précision,  $\varepsilon$  ;
- la densité de maillage.

Des études séparées de chacun de ces paramètres sont menées, pour mettre en évidence leurs influences sur la qualité de résolution. Le critère qu'on estime bien adapté est le déplacement du profil de contact de la dent. Rappelons qu'on décompose le déplacement total (Cornell, 1981) en :

- déplacement dû à la flexion de la dent ;
- déplacement dû à la rotation de la racine de la dent ;
- déplacement local dû au contact.

Cette dernière composante représente le critère d'évaluation qu'on propose pour l'étude de l'influence des différents paramètres sur la qualité de résolution.

On se propose de comparer les résultats obtenus avec deux approches théoriques donnant le déplacement dû au contact, dont celle présentée dans la référence (Cornell, 1981) où le déplacement local  $y_1$  est décomposé en deux parties. Une résulte du contact de Hertz  $y_h$ , et l'autre est due à la compression de l'épaisseur de la dent  $y_c$ , soit :

$$y_1 = y_h + y_c \quad [9]$$

$$y_h \approx \frac{4I}{\pi} \left( \frac{1-\mu_1}{E_1} + \frac{1-\mu_2}{E_2} \right) \approx a^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$a = \sqrt{\frac{4F}{\pi b} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right) / \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

$$y_c = \frac{F}{b} \left[ \frac{1-\mu_1^2}{E_1} \frac{\bar{h}_1}{2b-\bar{h}_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \frac{\bar{h}_2}{2b-\bar{h}_2} \right]$$

- \_  $\bar{h}_i$  : distance indiquée sur la figure 1 ;
- \_ I : moment d'inertie se la section de la dent se trouvant dans le plan d'action ;
- \_  $\mu_1, \mu_2$  : les coefficients de Poisson des matériaux de la roue et du pignon ;
- \_  $E_1, E_2$  : les modules d'élasticité des matériaux de la roue et du pignon ;
- \_  $r_1, r_2$  : les rayons de courbures des deux dents.
- \_  $b$  : la largeur de la dent.

La deuxième approche (Weber, 1949) donne directement le déplacement local de deux dents en contact en supposant des petites déformations ce qui permet de négliger des termes d'ordres élevés.

$$y_1 = \frac{2F}{\pi b} \left[ \frac{1-\mu_1^2}{E_1} \left( \ln \frac{2\bar{h}_1}{b} - \frac{\mu_1}{2(1-\mu_1)} \right) + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \left( \ln \frac{2\bar{h}_2}{b} - \frac{\mu_2}{2(1-\mu_2)} \right) \right] \quad [10]$$

La stratégie fixée par le présent travail consiste à choisir les différents paramètres cités ci-dessus donnant un déplacement local qui soit le plus proche possible des résultats donnés par les deux formules théoriques [9], [10].

Les différentes simulations sont faites sur un PC de fréquence 933 MHz et d'une mémoire RAM 128.

#### 4.2. Détermination du déplacement de contact

Un travail préliminaire consiste à trouver la distance minimale en profondeur dans l'épaisseur de la dent où le déplacement local devient insignifiant. L'engrènement dont le contact est au diamètre primitif et les caractéristiques mécaniques et géométriques sont décrites par le tableau 1 est simulé par la présente approche. Rappelons que toutes les caractéristiques géométriques d'un engrenage sont déterminées à partir du nombre de dents, et du module d'engrènement  $m$  qui est égal au rapport du pas de l'engrenage par le nombre  $\pi$ .

Nombre de dents : roue 1	20 dents
roue 2	20 dents
Module de l'engrenage	2 mm
Module d'élasticité longitudinale	207 000 Mpa
Coefficient de Poisson	0.3
Force normale maximale	2 000 N

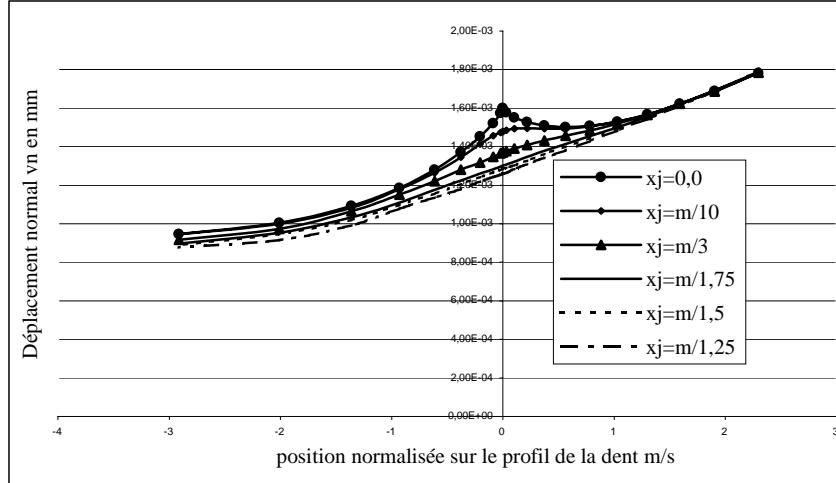
**Tableau 1.** Caractéristiques mécaniques et géométriques de l'engrenage

Pour déterminer le déplacement normal  $v_n$  d'un nœud de déplacement  $\mathbf{v}$ , il suffit de calculer le produit scalaire, soit :

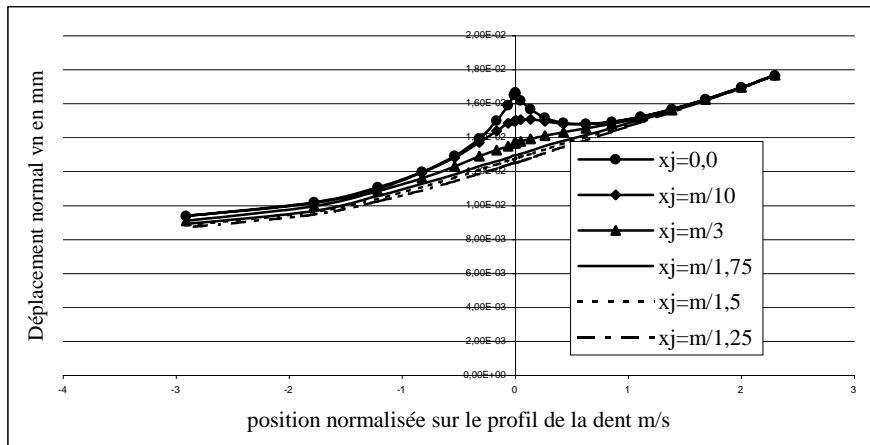
$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

Les résultats sont donnés par le déplacement  $v_n$  des différentes couches repérées par le vecteur  $x_j \cdot \mathbf{n}$ . ( $x_j = 0, m/10, m/3, m/1.75, m/1.5, m/1.25$ ) en fonction de la position d'engrènement  $m/s$ . Où  $s$  est la distance algébrique séparant le cercle primitif et le point de contact mesurée sur la ligne d'action (figure 1). Les simulations sont faites pour une plage de chargement jusqu'à 2 000 N et pour différents modules ( $m = 2, 3, 4, 5, 6$  mm), On donne à titre d'exemple les résultats (figures 7-8) de modules  $m=2$  et pour des chargements de 200 et 2 000N.

On remarque qu'à partir de la profondeur  $x_j = m/1.75$  la courbe devient droite ; et le déplacement devient insensible au contact. On estime que cette profondeur limite l'effet de contact. La composante locale de déplacement est supposée égale à la différence des déplacements, du point de contact et celui du point de profondeur  $x_j = m/1.75$ . Dans la suite du travail, on se base sur cette hypothèse pour étudier l'influence des différents paramètres sur la qualité des résultats.



**Figure 7.** Déplacement normal des différentes couches de la dent pour une charge de 200 N



**Figure 8.** Déplacement normal de différentes couches de la dent pour une charge de 2000 N

#### 4.3. Etude de l'influence des différents paramètres sur la qualité de résolution

La stratégie de l'étude de cette influence repose sur la variation de chacun de ces paramètres en fixant les autres à des valeurs donnant des résultats satisfaisants choisies après des rectifications successives. Toutes les simulations des

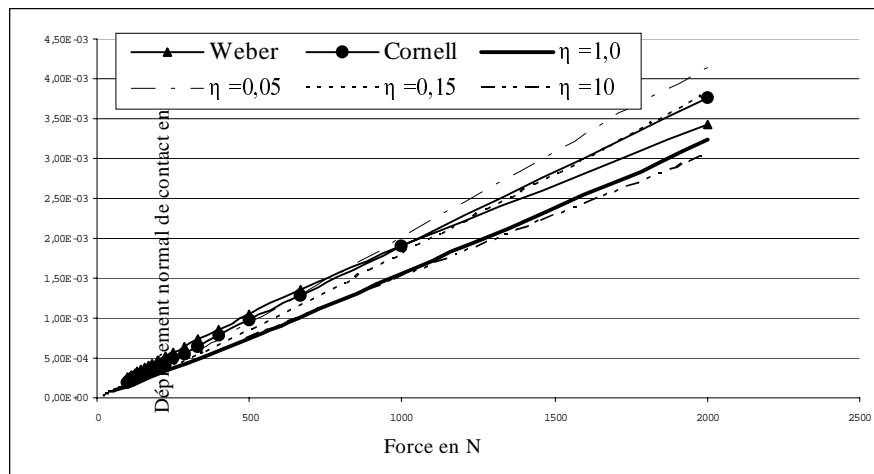


engrènements sont faites sur le diamètre primitif. Dans chaque simulation on détermine en fonction de la charge, le déplacement normal du nœud de centre de contact qui n'est dû qu'au contact. Ce centre de contact est repéré par la position normalisée d'engrènement  $m/s$ . Les résultats sont portés sur les mêmes graphes.

#### 4.3.1. Influence du paramètre de régularisation

L'ordre de troncature, $n$	20
La densité de maillage	350
Le jeu initial, $\delta$	0.15 mm
Le paramètre de précision, $\varepsilon$	$10^{-6}$

**Tableau 2.** Les paramètres de simulation pour différents paramètres de régularisation  $\eta$

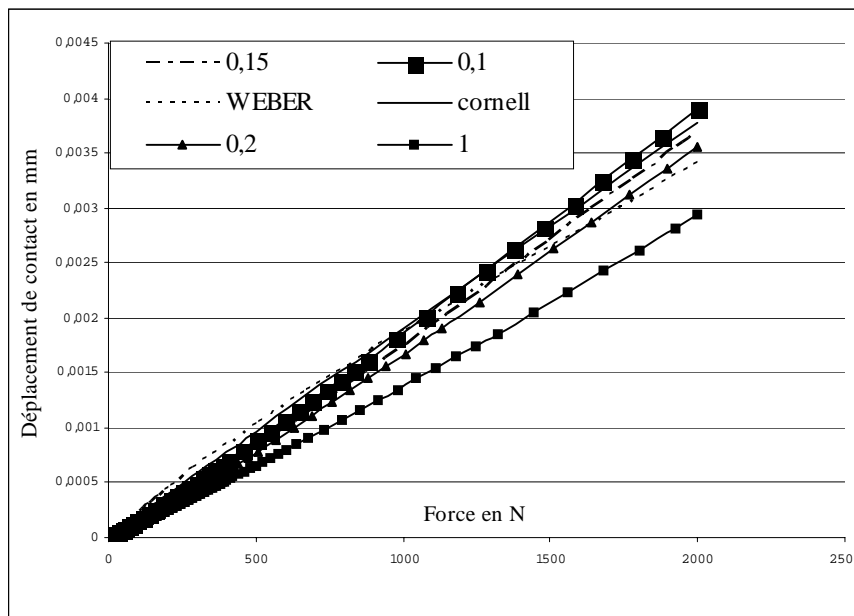


**Figure 9.** Déplacement normal dû au contact en fonction de la force pour différents paramètres de contact

On fait varier le paramètre de régularisation entre 0,05 et 10,0 pour les valeurs fixes donnés par le tableau 2. Les courbes correspondantes (figure 9), aux valeurs extrêmes des paramètres de contact ( $\eta = 0,05$  et  $\eta = 10$ ) montrent que la différence est nette avec les approches théoriques. Pour  $\eta = 0,05$  les déplacements sont plus grands que ceux donnés par les approches théoriques, au contraire pour  $\eta = 10$  la courbe est au-dessous des courbes théoriques. Les résultats donnés par  $\eta = 0,15$  sont les plus proches des résultats théoriques.

4.3.2. *Etude du jeu initial*

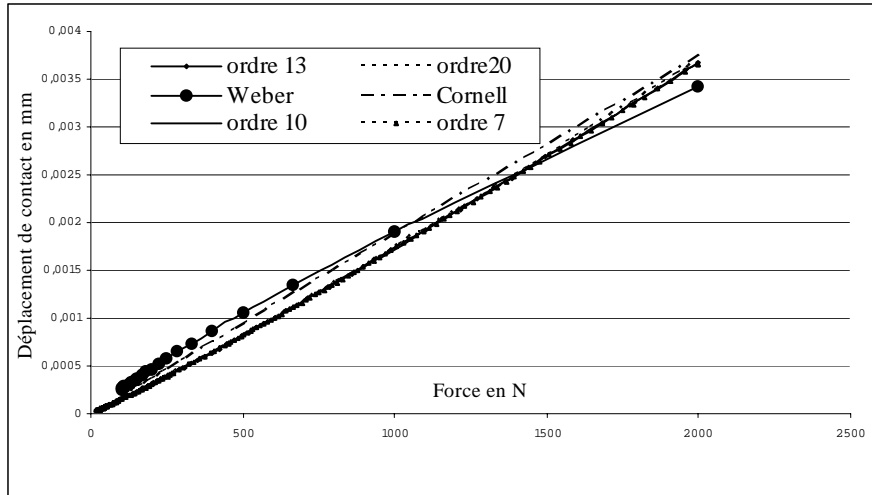
Dans le même esprit que l'analyse du paragraphe précédent, on fixe les différents paramètres à des valeurs testées d'avance donnant des résultats acceptables, et on fait varier le jeu initial dans une plage entre 0,1 et 1 mm. Dans le tableau 3, on donne les différents paramètres utilisés dans la simulation. On remarque sur la figure 10 que les valeurs extrêmes du jeu initial ( $\delta = 0,1$ ,  $\delta = 1,0$ ) engendrent l'éloignement des résultats du présent travail de ceux donnés par des approches théoriques. La valeur intermédiaire ( $\delta = 0,15$ ) donne des résultats suffisamment proches des résultats théoriques.



**Figure 10.** *Déplacement normal dû au contact en fonction de la force pour différents jeux initiaux*

L'ordre de troncature	20
La densité de maillage	350
Paramètre de régularisation	0,15
Le paramètre de précision	$10^{-6}$

**Tableau 3.** *Les paramètres de simulation pour différents jeux initiaux*



**Figure 11.** Influence de l'ordre de troncature sur la qualité des résultats

#### 4.3.3. Influence de l'ordre de troncature sur le déplacement local

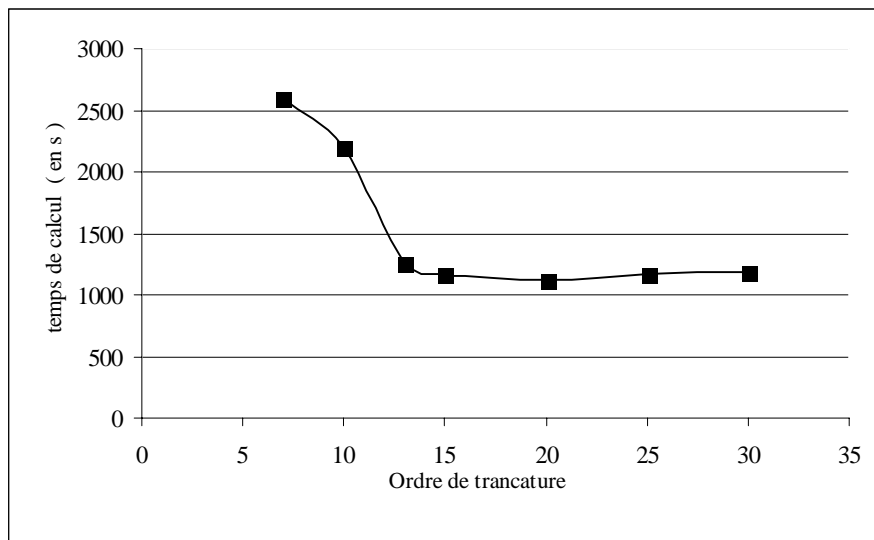
Sur la figure 11 le déplacement de contact est donné pour les différents ordres de troncatures allant de 7 à 20, où le résultat est insensible à l'ordre de troncature. Ce paramètre manifeste son influence essentiellement sur le temps de calcul, où à des ordres bas le calcul devient très lent, ce qu'on remarque bien sur la figure 12. On passe de 43 mm 25 pour l'ordre 7 à 18 mm 48 s pour l'ordre 20. Cette diminution de temps de calcul avec l'ordre provient de l'accroissement de la longueur des pas ; puis l'augmentation de l'ordre augmente légèrement le temps d'exécution du calcul. A partir de l'ordre 15 la variation de temps devient légère pour atteindre une valeur minimale à l'ordre 20 à partir de laquelle le temps de calcul commence à augmenter légèrement. Une analyse d'un pas de calcul (Cochelin, 1994), montre que le temps d'un pas contient essentiellement :

- le temps de calcul de la matrice tangente ;
- le temps de la triangularisation de la matrice tangente ;
- le temps de calcul de la force non linéaire ;
- le temps de calcul du déplacement.

Les deux premières composantes ne dépendent pas de l'ordre, au contraire de la troisième et la quatrième composantes, dont le temps de calcul augmente avec l'ordre. Ces deux dernières commencent à l'emporter sur le temps total à partir de l'ordre 20.

Le jeu initial	0,15
La densité de maillage	350
Paramètre de régularisation	0.15
Le paramètre de précision	$10^{-6}$

**Tableau 4.** Les paramètres de simulation pour différents ordres de troncature



**Figure 12.** Temps de calcul pour différents ordres

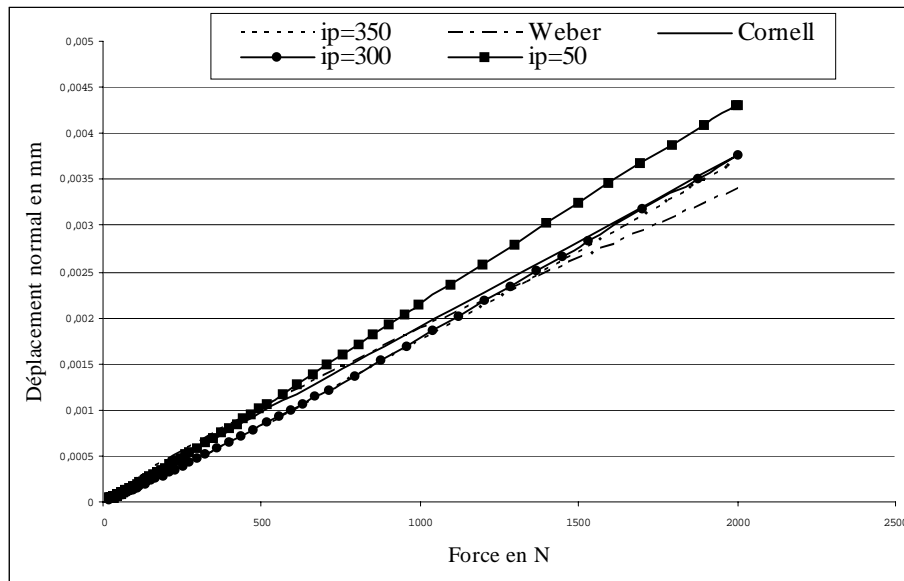
L'ordre de troncature	20
Le jeu initial	0.15
Paramètre de régularisation	0.15
Le paramètre de précision	$10^{-6}$

**Tableau 5.** Les paramètres de simulation pour différentes densités de maillages

#### 4.3.4. Influence de la densité de maillage

Il est bien vérifié que la qualité de la résolution est largement sensible à la densité de maillage (Coy *et al.*, 1982 , Gagnon *et al.*, 1991). Cette densité est égale au nombre de nœuds sur le profil en développante de cercle de la dent. Dans cette

étude on fait varier ce nombre de 50 jusqu'à 350, en conservant les autres caractéristiques qu'on donne sur le tableau 5. La figure 13 prouve que l'augmentation du nombre de nœuds améliore la qualité des résultats. La densité de maillage est limitée par la capacité du matériel informatique, un compromis est alors nécessaire.

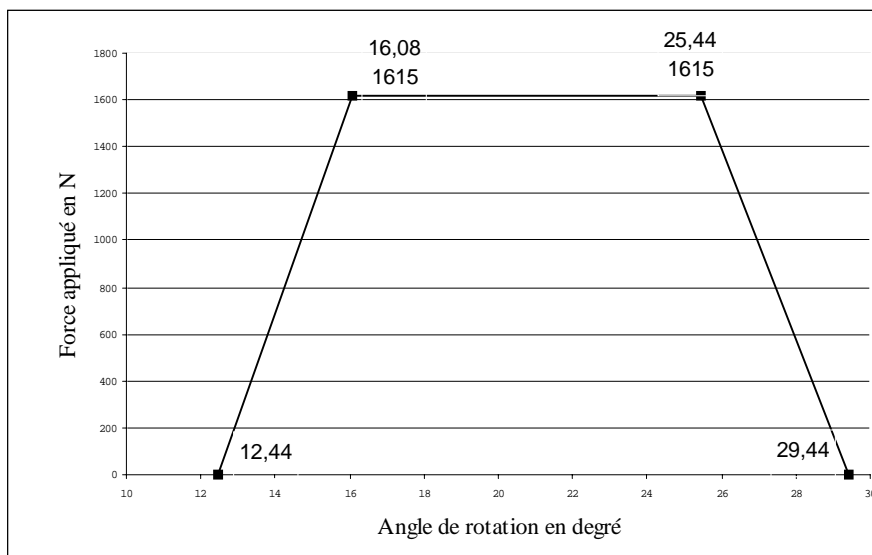


**Figure 13.** Influence de la densité de maillage sur la qualité des résultats

## 5. Etude de déplacement des points de contact

Dans leurs travaux, les auteurs de la référence (Coy *et al.*, 1982), ont simulé numériquement un cycle de chargement comme indiqué sur la figure 14, pour une roue dentée dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données par le tableau 6. La charge varie selon la position d'engrènement ; dans la première et la troisième phase où la charge est transmise par deux paires de dents, la variation est linéaire. Ainsi on décrit assez bien la charge réellement supportée par une seule paire de dent pendant ces deux phases. Dans la deuxième phase de l'engrènement, la charge est constante et complètement transmise par une seule paire de dent.

Dans l'approche de (Coy *et al.*, 1982) on applique la méthode des éléments finis en supposant une charge concentrée en un nœud. La jante déformable de la roue est de rayon égal à 2,5 fois la hauteur de la dent. Le maillage de la dent est très fin par rapport à celui de la jante.



**Figure 14.** Cycle de chargement imposé à la roue dentée

Nombre de dents	28
Module	3,18
Angle de pression	20°
Epaisseur	6,25
Module de Young	207 000 Mpa
Coefficient de Poisson	0,3

**Tableau 6.** Caractéristiques mécaniques et géométriques de la roue dentée

Les résultats sont comparés à ceux donnés par (Walker, 1940 ; Coy *et al.*, 1982) ; Cornell, 1981 ; Wang *et al.*, 1981) où les approches sont différentes et basées sur la théorie de la résistance des matériaux et la théorie de contact de Hertz. Dans les travaux de Walker (1940), les auteurs considèrent le déplacement du point de contact de la dent comme la somme du déplacement dû au contact et le déplacement dû à la flexion de la dent assimilée à une poutre encastree. (Cornell, 1981), a ajouté à ces deux composantes le déplacement dû à la rotation de la racine de la dent ainsi que le déplacement dû à la compression de la dent, ce qui explique que les valeurs de ses résultats sont supérieures à celles données par Walker (1940).

Coy *et al.*, (1982) et Wang *et al.*, (1981) supposent une force concentrée en un point ; leurs résultats sont proches, et les valeurs des déplacements sont les plus élevées. Les allures de toutes les courbes sont très proches et même si le cycle de chargement est symétrique, le cycle de déplacement ne l'est pas. Ceci est dû essentiellement à la composante de déplacement de flexion qui dépend du chargement et de la position d'engrènement.

Nos résultats se situent dans la même zone que la plupart des résultats connus. Ils sont très proches de ceux de Cornell (1981) qui a présenté la modélisation la plus fine.

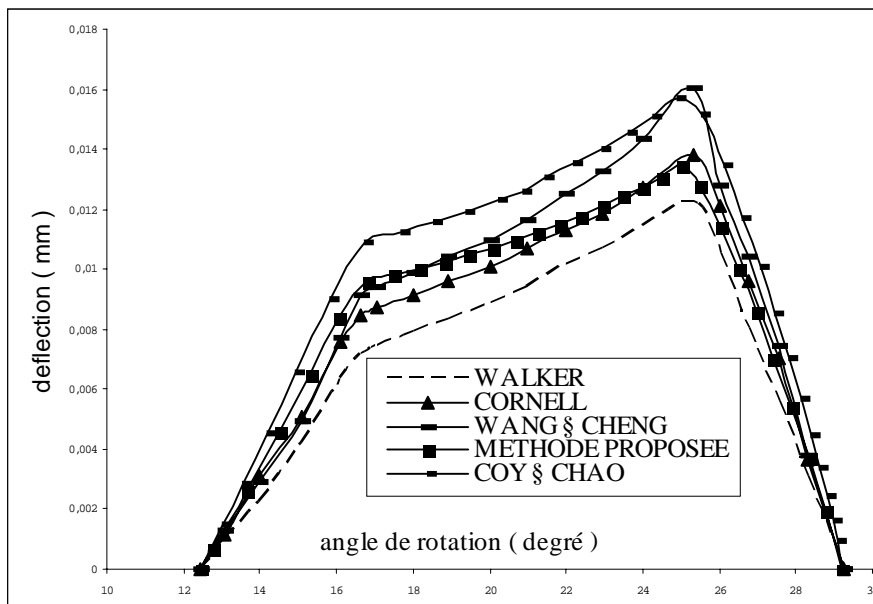


Figure 15. Déflexion des points de contact suivant la ligne d'action

## 6. Conclusion

Dans ce travail on a présenté une modélisation de l'engrènement, formulée par le principe des travaux virtuels et la loi classique de contact. La résolution est basée sur la méthode asymptotique numérique conjointement à la méthode des éléments finis. Un mailleur automatique approprié aux engrenages cylindriques droits est élaboré, permettant un maillage fin au niveau du contact.

L'effet de contact sur le déplacement normal se manifeste à une profondeur de  $x_j = m/1,75$ , et ce pour les différents modules et toute la plage de chargement étudiée. Cette constatation nous a permis de déterminer la composante de déplacement due au contact qu'on utilise pour faire une étude comparative avec des

approches théoriques. Les résultats de ce travail comparés à ceux donnés par des approches théoriques, montrent que les variations du paramètre de contact, du jeu initial et de la densité de maillage modifient sensiblement les résultats alors qu'ils sont insensibles à l'ordre de troncature. Ce dernier trouve son influence dans le temps de calcul.

La perspective de ce travail consiste à trouver un facteur où figurent conjointement les trois paramètres soit, le jeu initial, le paramètre de contact et les dimensions de maillage et permettant de voir son influence sur la qualité des résultats. Ainsi on identifie la plage de valeurs recommandées à un seul facteur pour garantir une meilleure qualité des résultats. Le choix des différents paramètres se fera en conséquence.

## 7. Bibliographie

- Abichou H, Simulation de l'emboutissage à froid par la méthode asymptotique numérique, Thèse de Doctorat, Université de Metz, 2001.
- Anand R., Mijar and Jasbir S., "Study of Variational Inequality and Equality Formulations for Elastostatic Frictional Contact Problems", *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 7, 4, 2000, p. 487- 449.
- Barber J. R., *Elasticity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/boston/London, 1993.
- Cochelin B., Méthodes Asymptotiques Numériques pour le calcul non linéaire, Habilitation à Diriger les recherches, Université de Metz, 1994.
- Cornell R. W., "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth", *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, vol. 103, 1981, p. 447-459.
- Coy J. J., Hu-Chih Chao C., "A Method of Selecting Grid Size to Account for Hertz Deformation in Finite Element Analysis of Spur Gears", *Journal of Mechanical Design*, vol. 104, 1982, p. 759-766.
- Elhage Hussein A., Damil N., Potier Ferry M., "An asymptotic numerical algorithm for frictionless contact problem", *Revue européenne des éléments finis*, vol. 7, 1998, p. 119-130.
- Gagnon P., Gosselin C., Cardou A., Cloutier L., "Assessment of FEA Calculation of Spur Gears tooth Deflection Using Electronic Pattern Interferometry", *JSME International Conference on Motion and Power transmissions*, Hiroshima, Japan, Nov. 22-26, 1991.
- Hertz H., "Miscellaneous Paper, Part V", *The Contact of Elastic Solid*, The MacMillan, London, 1896, p. 146-162.
- Johnson K. L., *Contact mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- Kikuchi N., Oden J. T., *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Siam. Philadelphia, 1988.
- Refaat M. H., Meguid S. A., "On the Contact Analysis of Spur Gears Using Variational Inequalities", *Computers and Structures*, vol. 57, 1995, p. 871-882.



- Walker H., "Gear tooth deflection and profile modification, Part I", *The Engineer*, vol. 166, 1938-1, p. 409-412.
- Walker H., "Gear tooth deflection and profile modification, Part II", *The Engineer*, vol. 166, 1938-2, p. 434-436.
- Walker H., "Gear tooth deflection and profile modification, Part III", *The Engineer*, vol. 170, 1940, p. 102-104.
- Wang K.L., Cheng H. S., "A Numerical Solution to the Dynamic Load, Film Thickness and Surface Temperatures in Spur Gear", *Journal of Mechanical Design*, vol. 103, 1981, p. 177-194.
- Weber C., *The Deformation of Loaded Gears and The Effect on their Load-Carrying Capacity*, British Dep of Scientific and Industrial Research, Report n° 3, 1949.