

---

# Résolution des équations de Saint Venant par un schéma éléments finis et un schéma volumes finis

**Mohammed Boulerhcha — Farid Boushaba — Imad Elmahi  
Hamid Amaoui**

*Faculté des Sciences,  
Département de Physique,  
Oujda, Maroc*

*{mboulerhcha, boushaba, amaoui}@sciences.univ-oujda.ac.ma*

*{ielmahi}@ensa.univ-oujda.ac.ma*

---

*RÉSUMÉ. Les équations de Saint Venant bidimensionnelles sont résolues par deux méthodes différentes. La première, centrée, est de type éléments finis. La seconde, décentrée, est de type volumes finis. Toutes les deux sont de second ordre dans le temps et dans l'espace. La validité des deux méthodes est démontrée sur des tests numériques et les performances de chacune analysées et comparées.*

*ABSTRACT. Two dimensional shallow water equations are resolved by two different methods. The first one, is centred and is the finite element type. The second one, is an upwind method and is finite volume type. Both methods are second order in space and time. The validity of the two methods is demonstrated over examples and their performances are analysed and compared.*

*MOTS-CLÉS : équations de Saint Venant, capture de choc, schéma de Lax-Wendroff, schéma de Roe, éléments finis, volumes finis*

*KEYWORDS: Shallow Water Equations, Shock Capturing, Lax-Wendroff Scheme, Roe Scheme, Finite Element Method, Finite Volume method*

---

## 1. Introduction

La classe des écoulements à surface libre, modélisés par les équations de Saint Venant, est un sujet très étudié en mécanique des fluides numérique et en mathématiques appliquées. En effet, le contrôle du débit est un paramètre essentiel pour l'industrie, l'agriculture ou l'alimentation en eau potable. L'aménagement des ressources en eau est aussi d'une importance capitale, notamment la prédiction des ruptures des barrages et les ondes de crue.

Plusieurs classes de méthodes numériques sont utilisées dans la littérature pour résoudre les équations de Saint Venant, chacune ayant ses mérites et ses points faibles. Dans ce travail les schémas suivants ont été utilisés pour résoudre les équations de Saint Venant :

- schéma de Lax-Wendroff à deux étapes en version éléments finis,
- schéma de Roe de type volumes finis.

La méthode des éléments finis de type Galerkin s'étant heurtée à des difficultés d'instabilité dans la résolution des équations de convection, Donea (1984), suivant les travaux de Lax et Wendroff en différences finies, proposa de procéder d'abord à la discrétisation du temps par un schéma d'Euler explicite de second ordre, et d'effectuer ensuite la discrétisation de l'espace par la méthode de Galerkin. Il obtint un schéma d'ordre deux stable sous condition. Ce schéma a été amélioré par une procédure en deux étapes par Lohner (Lohner *et al.*, 1985b) et appliqué avec succès aux écoulements à surface libre par G. Dhatt (Meftah *et al.*, 1999).

Dans le cadre des volumes finis, la question principale est comment estimer le flux normale à chaque facette de l'élément en tenant compte de la physique associée aux équations hyperboliques. Le schéma de Roe, basé sur le schéma de Goudunov qui résout un problème de Riemann, est construit dans ce but (Roe, 1981). Le schéma que nous présentons est une variante du schéma de Roe dont la précision est améliorée grâce à la technique MUSCL (Benkhaldoun *et al.*, 1996).

L'objectif de cette étude est de comparer les performances du schéma Lax-Wendroff de type éléments finis au schéma de Roe modifié de type volumes finis. Après avoir écrit les équations de Saint Venant dans la section 2, nous présentons dans la section 3 le schéma de Lax-Wendroff (LW) et ses principales caractéristiques. Dans la section 4, nous présentons le schéma de Roe, puis sa version du second ordre, ainsi que ses principales propriétés. L'étude s'achève par des tests numériques, mettant en évidence les caractéristiques de chaque schéma en effectuant des comparaisons sur leurs performances.

## 2. Modèle mathématique

Les variables de description physique sont :

$h$	hauteur d'eau
$\mathbf{V} = (u, v)$	vecteur vitesse de l'écoulement
$g$	accélération de la pesanteur
$c = \sqrt{gh}$	vitesse du son
$\Delta t$	pas de temps
$t^n = n\Delta t$ et $\mathbf{U}^n = \mathbf{U}(t^n)$	

Dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  et sous les hypothèses suivantes :

- fluide incompressible
- pression hydrostatique
- pente nulle
- force du vent et force de Coriolis nulles

un écoulement à surface libre, est régi par les équations de Saint Venant qui peuvent être organisées sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0 \quad [1]$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{Bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{Bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{Bmatrix}$$

Le système 1 représente le système des équations de Saint Venant sous forme conservative. Pour avoir un problème bien posé, il faut adjoindre à ce système un jeu de conditions aux limites et de conditions initiales.

### 3. Méthode des éléments finis : schéma de Lax-Wendroff

#### 3.1. Discrétisation

L'essentiel du schéma de Lax-Wendroff à deux pas réside dans le traitement de la discrétisation temporelle qui précède la discrétisation spatiale. Le choix judicieux de l'approximation spatiale donne un schéma de deuxième ordre dans le temps et dans l'espace (Boulerhcha *et al.*, 1996). Il s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{U}^n - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^n}{\partial y} \right) \\ \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \Delta t \left( \frac{\partial \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right) \end{cases} \quad [2]$$

avec

$$\mathbf{F}^n = \mathbf{F}(\mathbf{U}^n) \text{ et } \mathbf{G}^n = \mathbf{G}(\mathbf{U}^n)$$

Pour obtenir le modèle éléments finis, les relations 2 vont être écrites sous formes faibles. En appelant  $\Psi$  la fonction de pondération, nous obtenons :

$$W_I = \int_{\Omega} \Psi \left( U^{n+\frac{1}{2}} - U^n \right) d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \Psi \left( \frac{\partial \mathbf{F}^n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^n}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad [3]$$

et

$$\begin{aligned} W_{II} = \int_{\Omega} \Psi \left( U^{n+1} - U^n \right) d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \left( \Psi_{,x} \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} + \Psi_{,y} \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}} \right) d\Omega \\ + \Delta t \int_{\Gamma} \Psi \left( \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} n_x + \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}} n_y \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad [4]$$

Après avoir maillé le domaine  $\Omega$  en éléments triangulaires  $\Omega_e$ , la discrétisation par éléments finis va se faire en deux étapes :

**Étape 1.** Les espaces admissibles pour  $W_I$  s'expriment par les conditions :

- $\Psi$  égal à 1 sur l'élément  $\Omega_e$  et nul ailleurs.
- $U^{n+\frac{1}{2}} = U_e^{n+\frac{1}{2}}$ , constant sur l'élément  $\Omega_e$  et nul ailleurs.
- $U^n, \mathbf{F}^n, \mathbf{G}^n$  de type  $C^0$ .

Ces choix permettent de déduire de la forme [3] :

$$W_I^e = \int_{\Omega_e} \Psi \left( U^{n+\frac{1}{2}} - U^n \right) d\Omega_e + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \Psi \left( \frac{\partial \mathbf{F}^n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^n}{\partial y} \right) d\Omega_e = 0$$

soit :

$$\mathcal{A}_e U_e^{n+\frac{1}{2}} = \int_{\Omega_e} U^n d\Omega_e - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^n}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad [5]$$

$\mathcal{A}_e$  est l'aire de l'élément triangulaire.

$U^n, \mathbf{F}^n, \mathbf{G}^n$  étant approximés par des fonctions linéaires, nous obtenons à l'issue de cette étape le terme  $U_e^{n+\frac{1}{2}} = \bar{U}^{n+\frac{1}{2}}$  constant sur chaque élément.

**Étape 2.** Les espaces admissibles pour  $W_{II}$  s'expriment par :  $\Psi, U^{n+1}, U^n$  de type  $C^0$  ;  $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}$  sont définis par

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{F}^n + \left( \bar{\mathbf{F}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}^n \right) \\ \mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{G}^n + \left( \bar{\mathbf{G}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{G}}^n \right) \end{aligned} \quad [6]$$

avec :

$$\bar{\mathbf{F}}^n = \frac{1}{\mathcal{A}_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{F} d\Omega_e, \quad \bar{\mathbf{G}}^n = \frac{1}{\mathcal{A}_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{G} d\Omega_e \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{F}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F} \left( \bar{U}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

La variation de  $\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}$  est alors de même nature que celle de  $\mathbf{F}^n$ ,  $\mathbf{G}^n$ . Ensuite, la forme  $W_{II}$  est mise sous la forme :

$$W_{II} = \sum_e W_{II}^e \quad [7]$$

qui en utilisant les approximations relatives à  $W_{II}$  et en effectuant l'assemblage mène à un système linéaire :

$$[M]\{\Delta\mathbf{U}\} = \{\mathbf{R}\} \quad [8]$$

où  $[M]$  est la matrice masse,  $\{\mathbf{R}\}$  le résidu et  $\{\Delta\mathbf{U}\} = \{\mathbf{U}^{n+1}\} - \{\mathbf{U}^n\}$ . Il est très fréquent que le système 8 soit diagonalisé par l'utilisation de la matrice masse diagonale  $[M_L]$ .

La résolution de ce système algébrique est effectuée d'une manière itérative par une simple méthode de Jacobi (Strang, 1986). L'algorithme de résolution s'écrit :

$$\begin{cases} \{\Delta\mathbf{U}^{(0)}\} & = 0 \\ \{\Delta\mathbf{U}^{(k+1)}\} & = \{\Delta\mathbf{U}^{(k)}\} + [M_L^{-1}] (\{\mathbf{R}\} - [M] \{\Delta\mathbf{U}^{(k)}\}) \end{cases} \quad [9]$$

Du fait du bon conditionnement de la matrice  $[M]$ , trois itérations ( $k = 3$ ) sont en général suffisantes pour avoir une bonne approximation de la solution du système linéaire. Si l'on désire utiliser la matrice masse diagonale, il suffit de se limiter à une seule itération dans l'algorithme de résolution 9. Il convient de noter qu'aucun stockage de matrices n'est nécessaire.

### 3.2. Techniques de capture de chocs

En présence d'ondes de choc, l'algorithme du second ordre 2 est sujet à de fortes oscillations qui peuvent mener à l'instabilité totale en présence d'un ressaut hydraulique. Ceci est conforme au théorème de Godunov qui stipule qu'un schéma linéaire (Boulerhcha *et al.*, 1995, Deconninck, 1991) et de second ordre est nécessairement oscillatoire au voisinage d'une discontinuité. Une stabilisation du schéma par un amortissement numérique est donc nécessaire. Elle est basée sur l'addition d'un terme numérique de dissipation dans le but d'étaler la discontinuité (le choc) sur plusieurs éléments, sans affecter pour autant, la solution dans les régions lisses (Boulerhcha *et al.*, 1996, Löhner *et al.*, 1985a, Peraire *et al.*, 1987).

Soit  $\mathbf{U}^{n+1}$  la solution calculée par le schéma de Lax-Wendroff 8. La solution lissée  $\mathbf{U}_s^{n+1}$  ( $s$  pour smoothed) est définie par :

$$\mathbf{U}_s^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} + [M_L]^{-1} \mathbf{D}$$

$\mathbf{D}$  étant le vecteur d'amortissement numérique déduit par assemblage du vecteur nodal élémentaire  $\mathbf{d}$  :

$$\mathbf{d} = C_{FL_e} \nu s_e [m_e - m_{L_e}] \mathbf{U}_e \quad [10]$$

où  $m_e$  et  $m_{L_e}$  sont les matrices masse élémentaires, respectivement, pleine et diagonale.  $s_e$  contrôle la dissipation numérique en indiquant l'apparition de forts gradients, tout en devenant inactif dans les régions lisses.  $s_e$  est choisi comme étant le maximum des valeurs nodales élémentaires  $s_i$  définies par :

$$s_i = \left| \frac{\sum_e \{ [m_e - m_{L_e}] h_e \}_i}{\sum_e \{ [|m_e - m_{L_e}] h_e \}_i} \right| \quad [11]$$

La sommation s'étend à l'ensemble des éléments  $e$  ayant le nœud  $i$  en commun, l'opérateur  $[|\cdot|]$  désigne la valeur absolue et

$$h_e = \left\{ \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{array} \right\}$$

désigne la hauteur aux nœuds de l'élément  $e$ . Dans 10,  $\nu$  est une constante fixée par l'utilisateur, des valeurs de  $\nu$  comprises entre 1 et 3 donnent de bons résultats.  $C_{FL_e}$  est le nombre de Courant élémentaire

$$C_{FL_e} = \frac{\Delta t}{\Delta t_e}$$

$\Delta t_e$  est le temps maximum que met la perturbation la plus rapide pour parcourir l'élément, soit

$$\Delta t_e = \frac{l_e}{|V| + c}$$

$l_e$  étant une longueur caractéristique de l'élément, choisie ici comme étant la deuxième hauteur du triangle. L'expérience montre que ce choix constitue une bonne représentation de la taille de l'élément.

### 3.3. Stabilité

Pour un système d'équations hyperboliques bidimensionnelles, une perturbation peut se propager dans une infinité de directions  $\mathbf{n}$ . Pour tout choix de  $\mathbf{n}$ , les vitesses de propagation sont égales à :

$$\begin{array}{l} \lambda^{(1)} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \lambda^{(2)} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \\ \lambda^{(3)} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} + c \quad , \quad \lambda^{(4)} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} - c \end{array}$$

La vitesse maximale à laquelle peut se propager une perturbation est donc  $V + c$ , où  $V$  est le module de la vitesse. Nous définissons alors le nombre de Courant par :

$$\sigma = \frac{(V + c) \Delta t}{l_e} \quad [12]$$

Les critères de stabilité relatifs aux équations de Saint Venant sont déduits des critères obtenus pour l'équation scalaire de convection (Boulerhcha *et al.*, 1995, Peraire *et al.*, 1987) avec la nouvelle définition du nombre de Courant 12. Nous obtenons alors pour le pas de temps permis :  $\Delta t \leq l_e/\sqrt{3}(V + c)$  pour le schéma LW avec masse pleine et  $\Delta t \leq l_e/(V + c)$  pour le schéma LW avec masse diagonale.

#### 4. Méthode des volumes finis : schéma de Roe

##### 4.1. Discrétisation

Partons du système d'équations de Saint Venant :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0 \quad [13]$$

nous l'intégrons sur le volume fini triangulaire  $T_i$  de frontière  $\partial T_i$ ,

$$\int_{\partial T_i} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \right) d\Omega = 0$$

$\mathbf{U}$  étant supposé constant par élément, nous appliquons le théorème de Green et nous obtenons :

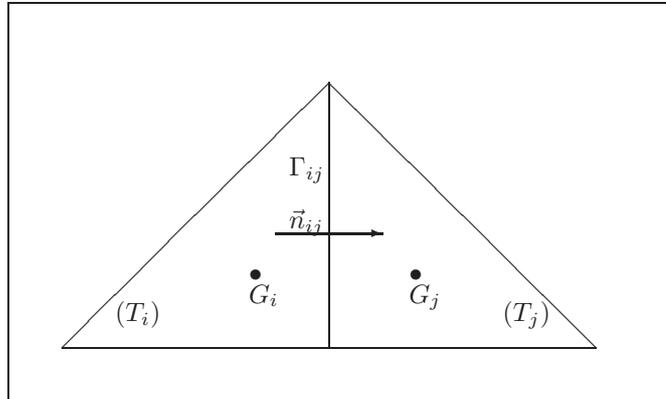
$$\mathcal{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \int_{\partial T_i} (\mathbf{F}n_x + \mathbf{G}n_y) d\Gamma = 0 \quad [14]$$

$\mathbf{U}_i$  est l'approximation de  $\mathbf{U}$  sur le triangle  $T_i$ ,  $\mathcal{A}_i$  est l'aire de  $T_i$ ,  $\mathbf{n}(n_x, n_y)$  est le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur. La frontière  $\partial T_i$  est décomposée en union de frontières partielles associées à chaque côté de la cellule  $T_i$  :

$$\partial T_i = \bigcup_{j \in E(i)} \Gamma_{ij} \quad [15]$$

où  $\Gamma_{ij}$  est l'interface entre les volumes  $T_i$  et  $T_j$ ,  $E(i)$  est l'ensemble des triangles qui ont une arête commune avec le triangle  $T_i$ . La forme [14] devient :

$$\mathcal{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \sum_{j \in E(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (\mathbf{F}n_x + \mathbf{G}n_y) d\Gamma = 0 \quad [16]$$



**Figure 1.** Interface entre deux volumes finis

Nous notons :

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}, \mathbf{n}) = \mathbf{F} n_x + \mathbf{G} n_y \quad [17]$$

le flux convectif à travers les trois arêtes du triangle  $T_i$ , et nous cherchons une approximation de  $\int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F}(\mathbf{U}, \mathbf{n}) d\Gamma$  sous la forme :

$$\int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F}(\mathbf{U}, \mathbf{n}) d\Gamma = \Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{n}_{ij}) \text{mes}(\Gamma_{ij}) \quad [18]$$

$\Phi$  est appelé flux numérique,  $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j$  sont les valeurs de  $\mathbf{U}$  sur le triangle  $T_i, T_j$  et  $\mathbf{n}_{ij}$  le vecteur normal à  $\Gamma_{ij}$  (figure 1).

Le schéma de Roe (1981) est basé sur la décomposition caractéristique des différences du flux en s'assurant de la conservation du schéma, il est défini par :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{n}_{ij}) &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}(\mathbf{U}_i, \mathbf{n}_{ij}) + \mathcal{F}(\mathbf{U}_j, \mathbf{n}_{ij})) \\ &- \frac{1}{2} |\mathbf{A}^*(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{n}_{ij})| \cdot (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i) \end{aligned} \quad [19]$$

La matrice  $\mathbf{A}^*$  doit vérifier les conditions suivantes (Roe, 1981) :

- $\mathbf{A}^*(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{n})(\mathbf{V} - \mathbf{U}) = \mathcal{F}(\mathbf{V}, \mathbf{n}) - \mathcal{F}(\mathbf{U}, \mathbf{n})$
- $\mathbf{A}^*(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{n}) = \mathbf{A}(\mathbf{U}, \mathbf{n}) = n_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} + n_y \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}}$  : matrice jacobienne
- $\mathbf{A}^*(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{n})$  possède des valeurs propres réelles pour tout  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , et les vecteurs propres de  $\mathbf{A}^*$  sont linéairement indépendants.

Pour évaluer la matrice  $A^*$  nous introduisons le vecteur paramètre constitué par les moyennes de Roe (Benkhaldoun *et al.*, 1996) :

$$U^*(U_i, U_j) = \begin{cases} h^* &= \frac{1}{2}(h_i + h_j) \\ u^* &= \frac{u_i\sqrt{h_i} + u_j\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}} \\ v^* &= \frac{v_i\sqrt{h_i} + v_j\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}} \end{cases} \quad [20]$$

La matrice  $A^*$  est alors définie par :

$$A^*(U_i, U_j, \mathbf{n}_{ij}) = A(U^*(U_i, U_j), \mathbf{n}_{ij})$$

$A$  étant la matrice jacobienne :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{U}, \mathbf{n}) &= n_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} + n_y \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (gh - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y \\ (gh - v^2)n_y - uvn_x & vn_x & un_x + 2vn_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.2. Schéma de Roe-MUSCL de second ordre

Le schéma de Roe est un schéma décentré de premier ordre. Afin d'acroître l'ordre de précision nous introduisons la technique MUSCL (Benkhaldoun, 1998). La variable  $U$  est approximée par un système de fonctions linéaires par morceaux ; sur l'interface  $\Gamma_{ij}$ , les états à droite et à gauche de  $U$  sont définis par l'interpolation linéaire suivante :

$$\begin{cases} U_{ij}^l &= U_i + \frac{1}{2} \vec{\nabla} U_i \cdot \overrightarrow{G_i G_j} \\ U_{ij}^r &= U_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla} U_j \cdot \overrightarrow{G_i G_j} \end{cases} \quad [21]$$

$G_i(x_i, y_i)$  et  $G_j(x_j, y_j)$  sont respectivement les barycentres des triangles  $T_i$  et  $T_j$  (figure 1).  $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}, \frac{\partial U_i}{\partial y}\right)$  sont évalués comme étant le minimum de la fonction quadratique suivante (Benkhaldoun *et al.*, 1996) :

$$\Theta_i(X, Y) = \sum_{j \in K(i)} |U_i + (x_j - x_i)X + (y_j - y_i)Y - U_j|^2 \quad [22]$$

$K(i)$  est l'ensemble d'indices des triangles voisins du triangle  $T_i$ . Cependant, le schéma ainsi construit n'est pas monotone, pour contourner cette difficulté, nous utilisons le limiteur MinMod pour déterminer  $\vec{\nabla}U_i$  et  $\vec{\nabla}U_j$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^{lim}U_i}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[ \min_{j \in K(i)} \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) + \max_{j \in K(i)} \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) \right] \min_{j \in K(i)} \left| \frac{\partial U_j}{\partial x} \right| \\ \frac{\partial^{lim}U_i}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[ \min_{j \in K(i)} \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) + \max_{j \in K(i)} \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) \right] \min_{j \in K(i)} \left| \frac{\partial U_j}{\partial y} \right| \end{cases}$$

Ces valeurs sont utilisées dans la relation [21] pour évaluer  $U_{ij}^l$  et  $U_{ij}^r$ .

Le schéma de Roe-MUSCL de second ordre consiste à utiliser  $U_{ij}^l$  et  $U_{ij}^r$  déterminés ci-dessus à la place de  $U_i$  et  $U_j$  pour calculer le flux numérique de la relation [19] :

$$\begin{aligned} \Phi(U_{ij}^l, U_{ij}^r, \mathbf{n}_{ij}) &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}(U_{ij}^l, \mathbf{n}_{ij}) + \mathcal{F}(U_{ij}^r, \mathbf{n}_{ij}) \right) \\ &- \frac{1}{2} \left| \mathbf{A}^*(U_{ij}^l, U_{ij}^r, \mathbf{n}_{ij}) \right| \cdot (U_{ij}^r - U_{ij}^l) \end{aligned} \quad [23]$$

où :

$$\mathbf{A}^*(U_{ij}^l, U_{ij}^r, \mathbf{n}_{ij}) = \mathbf{A}(U^*(U_{ij}^l, U_{ij}^r), \mathbf{n}_{ij})$$

$U^*(U_{ij}^l, U_{ij}^r)$  étant formé à partir des moyennes de Roe :

$$U^*(U_{ij}^l, U_{ij}^r) = \begin{cases} h^* &= \frac{1}{2}(h_{ij}^l + h_{ij}^r) \\ u^* &= \frac{u_{ij}^l \sqrt{h_{ij}^l} + u_{ij}^r \sqrt{h_{ij}^r}}{\sqrt{h_{ij}^l} + \sqrt{h_{ij}^r}} \\ v^* &= \frac{v_{ij}^l \sqrt{h_{ij}^l} + v_{ij}^r \sqrt{h_{ij}^r}}{\sqrt{h_{ij}^l} + \sqrt{h_{ij}^r}} \end{cases} \quad [24]$$

**Discretisation temporelle :**

En combinant les relations [16],[17] et [18] nous avons :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{1}{\mathcal{A}_i} \sum_{j \in E(i)} (\Phi(U_i, U_j, \mathbf{n}_{ij}) \cdot \operatorname{mes}(\Gamma_{ij}))$$

ce que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{U}) \quad [25]$$

La discrétisation temporelle est réalisée à l'aide d'un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 2 (Hirsch, 1988) :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{U}}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}(\mathbf{U}^n) \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{H}(\bar{\mathbf{U}}^{n+1}) \end{cases} \quad [26]$$

## 5. Tests numériques

### 5.1. Ressaut hydraulique oblique

Les deux schémas (Lax-Wendroff et Roe-MUSCL) décrits dans l'étude précédente sont comparés sur un premier test numérique constitué d'un ressaut hydraulique oblique. Il s'agit d'un courant circulant dans un canal de largeur  $30m$ , ses caractéristiques à l'entrée sont :  $u_1 = 8,57m/s$ ,  $v_1 = 0m$ ,  $h_1 = 1m$ ,  $Q = 257,1m^3/s$  et un nombre de Froude  $F_{r1} = 2,74$ ; ce courant est dévié par une paroi latérale d'angle  $\theta = 8,95^\circ$ . Théoriquement, cela donne naissance à une onde de choc stationnaire d'angle  $\beta = 30^\circ$  et un courant aval parallèle à la paroi, de hauteur  $h_2 = 1,50m$  et une vitesse  $u_2 = 7,96m/s$ . Numériquement, nous résolvons les équations de Saint Venant sans terme source sur un domaine maillé en éléments triangulaires et contenant 1 329 noeuds et 2 521 éléments (figure 2). A l'entrée ( $x = 0, 0 \leq y \leq 30$ ), des conditions aux limites de type Dirichlet sont imposées :

$$\begin{cases} u_1 = 8,57m/s \\ v_1 = 0m/s \\ h_1 = 1m \end{cases}$$

La condition de glissement est imposée sur la paroi; le reste de la frontière est laissée libre. Le pas de temps est  $\Delta t = 0,008$  correspondant à un nombre de courant  $CFL = 0,26$ .

La figure 3 montre les iso-hauteurs obtenues par les deux méthodes. Par la méthode des éléments finis l'angle du choc est de l'ordre de  $30,1^\circ$ ; par la méthode des volumes finis il est de l'ordre de  $30,5^\circ$ . La capacité des deux méthodes à capturer le choc est donc satisfaisante. Nous présentons également la hauteur à la sortie du domaine sur la figure 4, nous constatons que la méthode des volumes finis est légèrement plus diffusive. Les deux méthodes convergent à  $0,5 \cdot 10^{-6}$  en erreur relative; le temps CPU (sur PC Pentium 3 à 1 GHz) consommé est de  $61s$  pour le schéma de Lax-Wendroff et de  $141s$  pour le schéma de Roe. La méthode des volumes finis consomme donc plus de temps CPU, cela est dû à l'évaluation du flux numérique au niveau de chaque facette.

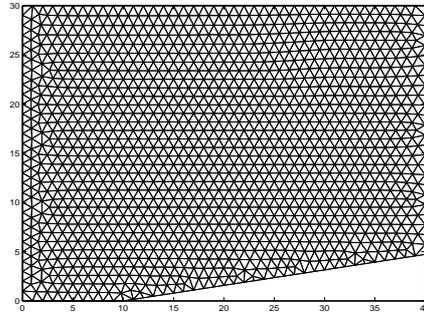


Figure 2. Géométrie du domaine et maillage

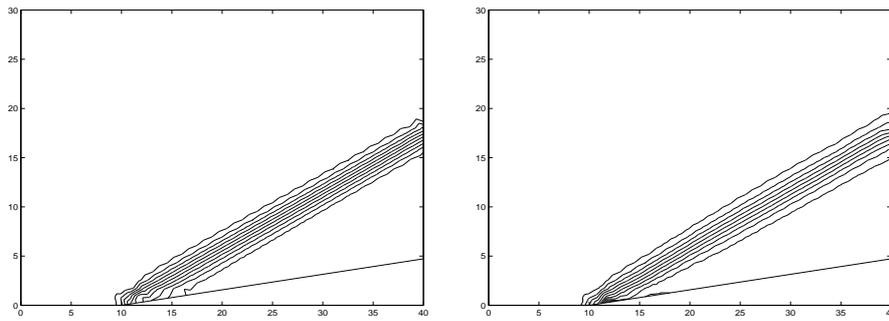


Figure 3. Iso-hauteurs, à gauche schéma LW, à droite schéma de Roe

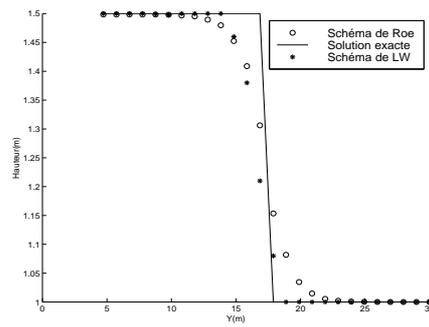


Figure 4. Hauteur à la sortie du domaine

### 5.2. Rupture partielle d'un barrage circulaire

Ce test (Alcrodo *et al.*, 1993) va nous permettre de comparer la capacité des deux schémas (Lax-Wendroff et Roe-MUSCL) à reproduire une solution symétrique. Le domaine est un carré, maillé avec des éléments triangulaires et contenant 2 601 noeuds et 5 000 éléments (figure 5 à gauche). Initialement, nous avons un barrage cylindrique de rayon  $25m$  retenant une colonne d'eau de hauteur  $10m$  (figure 5 à droite). Dans le reste du domaine la hauteur est  $1m$ . La vitesse à l'état initial est nulle partout. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet sur toute la frontière.

A  $t = 0$ , le barrage se rompt et nous assistons à une onde de crue qui se propage dans le domaine. La solution est calculée par les deux schémas. La figure 6 présente les iso-hauteurs, la figure 7 à gauche montre l'évolution de la hauteur au point milieu au cours du temps et la figure 7 à droite présente une coupe pour les hauteurs effectuée à  $y = 25$ .

Nous constatons que les iso-hauteurs ne sont pas parfaitement symétriques, nous pensons que cela est dû à l'influence du maillage d'une part, et surtout à l'état initial qui n'est pas un cercle parfait. La coupe selon  $y = 25$  montre une similitude des résultats sauf au niveau du front où l'on constate un surplus de diffusion du schéma de Roe. L'évolution du point central est identique dans les deux schémas.

## 6. Conclusion

Nous étudions dans cet article les écoulements à surface libre régis par les équations de Saint Venant en variables conservatives, connues pour leurs caractères hyperboliques. La résolution numérique est effectuée par la méthode des éléments finis en utilisant le schéma de Lax-Wendroff, et par la méthode des volumes finis couplée au schéma de Roe.

Aussi bien pour la recherche d'une solution permanente que pour la recherche d'une solution instationnaire, les deux méthodes réalisent des performances comparables. En particulier, les chocs droits sont capturés de façon précise par les deux méthodes. Le schéma de Roe montre toutefois un léger surplus de diffusion, et un temps CPU nettement plus grand comparé au schéma de Lax-Wendroff.

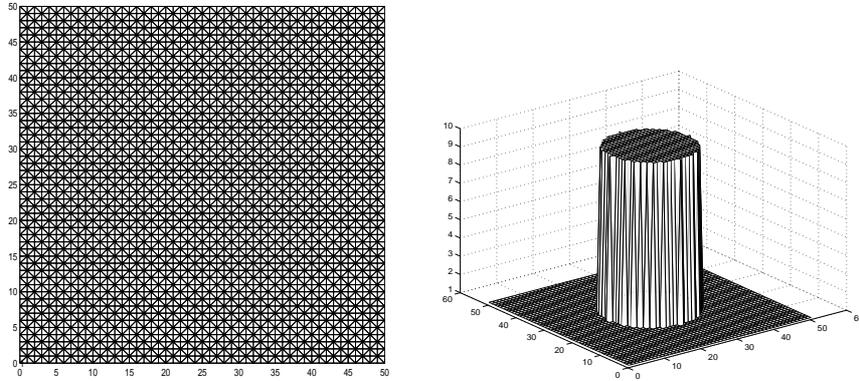


Figure 5. A gauche : Maillage. A droite : Solution initiale

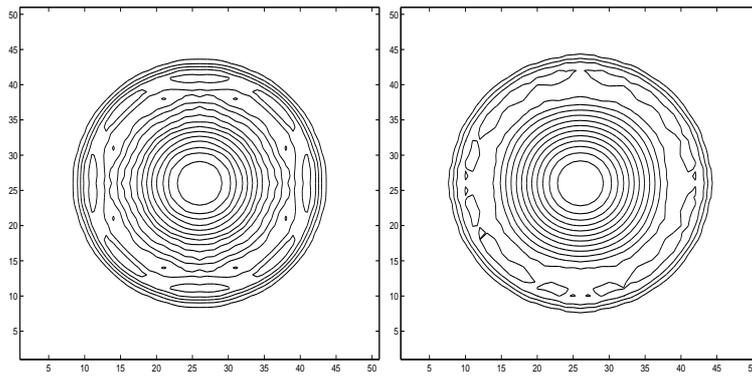


Figure 6. Iso-hauteurs. A gauche : schéma LW, à droite : schéma de Roe

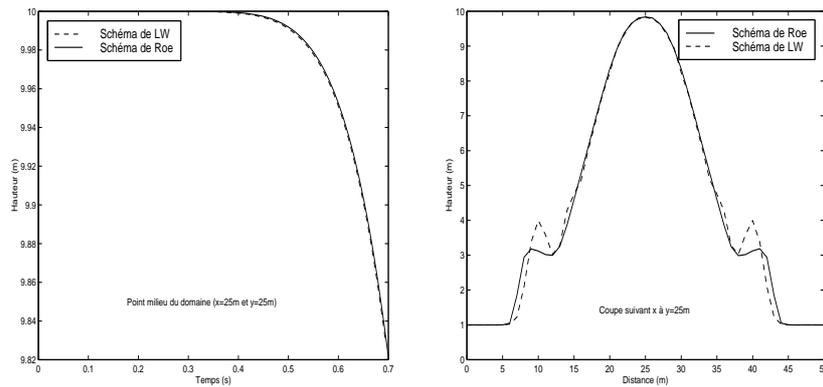


Figure 7. A gauche : Hauteur au point milieu. A droite : Coupe en  $y=25$

## 7. Bibliographie

- Alcrodo F., Garcia-Navaro P., « A high resolution Godunov type scheme in finite volumes for the 2D shallow water equation », *International Journal of Numerical Methods in Fluid*, vol. 16, 1993, p. 489-505.
- Benkhaldoun F., « Méthodes de volumes finis pour problèmes d'écoulements à fronts raides », Thèse d'Habilitation. Université de Rouen, 1998.
- Benkhaldoun F., Elmahi I., Monthe L., « Shallow water flow computations over initially dry areas using accurate upwind schemes and non structured meshed », *First international conference on environmental problems in coastal regions*. Computational Mechanics Publications. vol. 102, 1996, p. 305-314.
- Boulerhcha M., Secretan Y., Dhatt G., Nguyen D. N., « Application de la méthode des éléments finis aux équations 2-D hyperboliques : Partie I : équations scalaires de convection », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 4, n°3, 1995, p. 271-306.
- Boulerhcha M., Secretan Y., Nguyen D. N., Dhatt G., « Application de la méthode des éléments finis aux équations 2-D hyperboliques : Partie II : équations d'Euler en fluide compressible », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 5, n°1, 1996, p. 7-52.
- Deconninck H., « Upwind Methods and Multidimensional Splittings for the Euler Equations », *Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1991-01*, 1991, p. 1-46.
- Hirsch C., *Numerical Computation of Internal and External Flows : Fundamentals of Numerical Discretization*, vol. 1, Willey&Son, 1988.
- Löhner R., Morgan K., Peraire J., « A simple extension to multidimensional problems of the artificial viscosity due to Lapidus », *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 1, 1985, p. 141-147.
- Löhner R., Morgan K., Zienkiewicz O. C., « An Adaptive finite element procedure for compressible high speed flows », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 51, 1985, p. 441-465.
- Meftah K., Dhatt G., Tanguy J., « Ecoulement bidimensionnel à surface libre, Approche h-s », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 8, 1999, p. 747-789.
- Peraire J., Morgan K., « Finite element methods for compressible flows », *Von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series 1987-04*, 1987, p. 1-114.
- Roe P. L., « Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes », *Journal of Computational Physics*, vol. 43, 1981, p. 357-372.
- Strang G., *Introduction to applied mathematics*, Wellesley-Cambridge Press, 1986.