
Calculs couplés fluide/structure en formulation pression/déplacement axisymétrique harmonique

Jean-François Sigrist* — Stéphane Garreau**

* *Service Scientifique et Technique*
DCN Propulsion
F-44620 La Montagne
jean-francois.sigrist@dcn.fr

** *Cadoe*
Immeuble Einstein
11, avenue Albert Einstein
F-69100 Villeurbanne
stephane.garreau@cadoe.com

RÉSUMÉ. Nous présentons dans cet article les développements réalisés dans le code de calcul éléments finis généraliste Ansys afin de permettre l'analyse modale de structures couplées avec un fluide dans le cas de géométries à symétrie de révolution. L'approche proposée consiste à développer un élément fini fluide formulé en pression et utilisant une représentation en série de Fourier. Cet élément fluide peut être couplé avec des éléments structure formulés en déplacement avec développement en série de Fourier. Nous justifions ce choix du point de vue de l'ingénieur en rappelant les avantages d'une telle approche avec un code généraliste. Nous présentons un cas de validation élémentaire des développements réalisés, ainsi qu'une application industrielle relative à l'analyse modale d'un réacteur de propulsion navale.

ABSTRACT. This paper deals with numerical developments carried out within a commercial finite element code in order to perform modal analysis on coupled fluid-structure problems for axi-symmetric geometry, with a pressure-displacement formulation. A new finite element is developed in the Ansys code: the theoretical bases of such an element are presented, together with elementary validation. An industrial application is then exposed: a modal analysis of a naval propulsion nuclear reactor is performed with the new fluid finite element developed in Ansys.

MOTS-CLÉS : interactions fluide/structure, formulation pression/déplacement, représentation axisymétrique en série de Fourier, analyse modale, couplage de modes, masse ajoutée.

KEYWORDS: fluid-structure interaction, pressure-displacement formulation, harmonic axi-symmetric model, modal analysis, mode coupling, added mass.

1. Introduction

La problématique de modélisation et de résolution de problèmes d'interactions fluide/structure a fait l'objet de nombreuses études (Mackerle, 1999), et les méthodes numériques de type éléments finis développées pour résoudre ce type de problèmes sont maintenant bien formalisées et validées (Morand-Ohayon, 1995).

L'application de ces méthodes en bureau d'études sur des projets industriels n'est envisageable qu'à condition de réaliser l'intégration de ces méthodes dans des codes éléments finis généralistes, et de proposer une mise en œuvre de calculs compatibles avec les exigences d'analyse en bureau d'étude (simplicité du modèle géométrique, interprétation aisée des modes propres, rapidité des calculs).

La plupart des grands codes développés dans des centres de recherche, par exemple, le code Castem (Verpeau *et al.*, 1989), permettent la mise en œuvre de calculs couplés dans de nombreuses situations de calcul (modèles tridimensionnel, bidimensionnel ou axisymétrique) avec des formulations adaptées. Dans la pratique, ces codes de calcul ne sont cependant que très rarement utilisés pour des études industrielles.

Les codes de calculs généralistes mis en œuvre en bureau d'étude n'offrent pas toutes les fonctionnalités des codes spécialisés. Un travail de développement spécifique doit donc être engagé pour répondre à des applications particulières avec un code de calcul commercial. Cette démarche représente un important travail qui implique à la fois les développeurs et les utilisateurs du code de calcul, pour proposer les formulations à intégrer, réaliser les tâches d'intégration, conduire les tests de validation, avant de mettre *in fine* en application le code sur un cas industriel.

Nous présentons dans le présent article les développements spécifiques engagés autour du code de calcul généraliste Ansys (Konkhe, 1986), pour permettre l'analyse modale de structures industrielles à symétrie de révolution, couplées avec un fluide acoustique, en utilisant :

- une formulation du problème couplé en pression/déplacement,
- une représentation en série de Fourier des inconnues du problème couplé.

Ces développements permettent de doter le code de nouvelles fonctionnalités de calcul avec des applications au dimensionnement de structures couplées avec un fluide, dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle axisymétrique (ce qui permet en particulier de ramener l'étude d'un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel et présente un avantage évident en temps de calcul). Le présent article propose un *benchmark* de validation du code Ansys pour ces nouvelles fonctionnalités de calculs.

Nous commençons par rappeler les deux formulations couplées disponibles dans le code de calcul, en les comparant du point de vue de leur mise en œuvre. Nous exposons ensuite la formulation d'un élément fluide en pression écrit en série de

Fourier ; le développement de cet élément dans le code est validé sur un cas élémentaire. Enfin, nous proposons une application industrielle relative à l'analyse modale de l'ensemble panier/cuve d'un réacteur nucléaire de propulsion navale.

2. Formulations d'un problème d'interactions fluide/structure

La formulation d'un problème d'interactions fluide/structure peut être réalisée au moyen de différentes approches (Axisa, 2001 ; Gibert, 1986 ; Morand-Ohayon, 1995). Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un problème *élasto-acoustique* : la structure est décrite avec les équations de l'élasticité linéaire, le fluide avec les équations de l'acoustique. En particulier, le modèle de fluide utilisé ne prend pas en compte les effets de viscosité et de gravité.

Le problème structure est dans la plupart des cas formulé en déplacement ; le problème fluide peut être formulé de différentes façons : en déplacement, en potentiel des déplacements, en potentiel des vitesses, en pression, ou en formulation mixte pression/potentiel des déplacements. Ces formulations couplées sont disponibles dans différents codes de calcul. Le code Ansys propose une formulation du problème couplé basé sur une modélisation en déplacement de la structure et une modélisation en pression ou en déplacement du fluide.

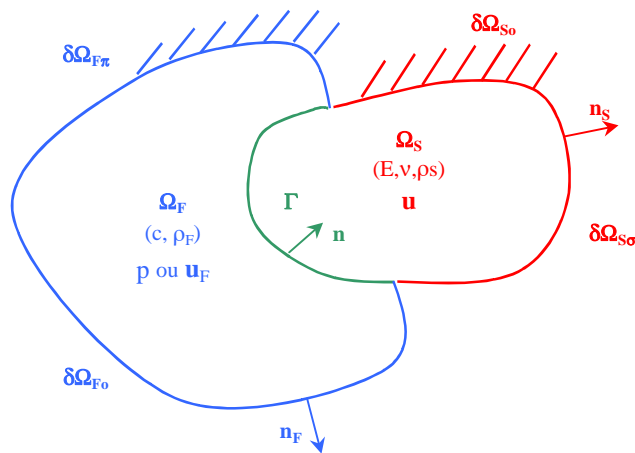


Figure 1. Représentation générale d'un problème d'interactions fluide/structure

Un problème d'interactions fluide/structure peut être représenté par la figure 1 ci-dessus. La structure occupe le domaine Ω_S , de frontière $\partial\Omega_S = \partial\Omega_{S_0} \cup \partial\Omega_{S_\sigma} \cup \Gamma$ ($\partial\Omega_{S_0}$ représente la portion de frontière à déplacement imposé, $\partial\Omega_{S_\sigma}$ la portion de frontière à effort imposé, Γ est l'interface de contact

avec le fluide); sur $\partial\Omega_S$, \mathbf{n}_S est la normale sortante au domaine structure. Le fluide occupe le domaine Ω_F , de frontière $\partial\Omega_F = \partial\Omega_{F_o} \cup \partial\Omega_{F\pi} \cup \Gamma$ ($\partial\Omega_{F_o}$ représente la portion de frontière à pression imposée ou déplacement libre, $\partial\Omega_{F\pi}$ la portion de frontière à gradient normal de pression ou déplacement normal imposé, Γ est l'interface de contact avec la structure); sur $\partial\Omega_F$, \mathbf{n}_F est la normale sortante au domaine fluide. Sur l'interface fluide/structure \mathbf{n} est la normale sortante au milieu fluide et rentrante au milieu structure.

2.1. Formulation pression/déplacement

La formulation du problème couplé en pression/déplacement est donnée par les équations ci-dessous. Les équations du problème structure sont les suivantes, en reprenant les conventions de notation de la figure 1 (Morand-Ohayon, 1995) et en supposant les efforts appliqués, les déplacements et la pression imposés nuls :

$$\begin{aligned} \rho_S \omega^2 u_i + \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} &= 0 & \text{dans} & \Omega_S \\ u_i &= 0 & \text{sur} & \partial\Omega_{S_o} \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S &= 0 & \text{sur} & \partial\Omega_{S\sigma} \end{aligned} \quad [1]$$

Les équations du problème fluide sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} p + \frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2} &= 0 & \text{dans} & \Omega_F \\ p &= 0 & \text{sur} & \partial\Omega_{F_o} \\ \frac{\partial p}{\partial x_j} n_j^F &= 0 & \text{sur} & \partial\Omega_{F\pi} \end{aligned} \quad [2]$$

Les deux sous-problèmes sont couplés par les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S &= p n_i \\ \frac{\partial p}{\partial x_j} n_j^F &= \rho_F \omega^2 u_j n_j \end{aligned} \right\} \text{sur } \Gamma \quad [3]$$

Ces équations traduisent d'une part la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes à l'interface fluide/structure (action du fluide sur la structure par un effort normal imposé) et la continuité de la composante normale de l'accélération à l'interface fluide/structure (action de la structure sur le fluide par un mouvement normal imposé).

La formulation variationnelle du problème couplé est obtenue avec la méthode des fonctions test (Raviart-Thomas, 1993). Soient $\delta \mathbf{u}$ et δp des champs de déplacement et de pression virtuels ; en multipliant l'équation locale structure par $\delta \mathbf{u}$ et l'équation locale fluide par δp , puis en intégrant sur les domaines fluide et structure, nous obtenons, en tenant compte de la formule de Green, les expressions suivantes.

– Problème structure soumis à l'action du fluide :

$$\int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) - \omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S u_i \delta u_i - \int_{\Gamma} p n_i \delta u_i = 0 \quad [4]$$

– Problème fluide soumis à l'action de la structure :

$$\int_{\Omega_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} - \omega^2 \int_{\Omega_F} \frac{p \delta p}{c^2} - \rho_F \omega^2 \int_{\Gamma} u_i n_i \delta p = 0 \quad [5]$$

La discrétisation de la forme faible des équations du problème couplé avec une technique de type éléments finis permet d'obtenir la formulation suivante du problème couplé :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{R} \\ 0 & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \rho_F \mathbf{R}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad [6]$$

Dans cette expression, le couplage des problèmes est réalisé au moyen de la matrice d'interaction fluide/structure \mathbf{R} , définie par l'expression suivante ; cette matrice est calculée au niveau des éléments en contact avec l'interface fluide/structure :

$$\mathbf{R} = \int_{\Gamma} \langle N_F \rangle [N_S] \{n\} d\Gamma \quad [7]$$

avec $\langle N_F \rangle$ les fonctions de forme de l'élément fini fluide, $[N_S]$ les fonctions de forme de l'élément structure et $\{n\}$ les composantes de la normale locale sur Γ .

2.2. Formulation déplacement/déplacement

La formulation déplacement/déplacement du problème couplé utilise la relation suivante donnant la pression à partir du champ de déplacement fluide :

$$p = -\rho_F c^2 \frac{\partial u_j^F}{\partial x_j} \quad [8]$$

Le fluide est considéré comme un milieu continu et décrit avec les équations [1] en déplacement, dans le cas particulier d'un matériau ayant une raideur en cisaillement proche de zéro (le tenseur des contraintes est alors diagonal, la contrainte normale étant donnée par le terme de pression). Les équations du problème fluide sont alors les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j^F}{\partial x_j} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} u_j^F &= 0 & \text{dans } \Omega_F \\ u_j^F n_j^F &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_{F\pi} \\ \frac{\partial u_j^F}{\partial x_j} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_{Fo} \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

Les équations de la structure sont inchangées (équation [1]) ; les équations de couplage [3] sont alors réécrites sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j &= \rho_F c^2 \frac{\partial u_j^F}{\partial x_j} n_i \\ u_j n_j &= u_j^F n_j \end{aligned} \right\} \text{sur } \Gamma \quad [10]$$

La condition de couplage fluide/structure requiert en particulier de lier les degrés de liberté des éléments fluide et structure dans la direction normale à l'interface fluide/structure.

La formulation variationnelle du problème couplé est obtenue en utilisant la méthode des fonctions test, à partir de champs de déplacement virtuels structure $\delta \mathbf{u}$ et fluide $\delta \mathbf{u}_F$. Elle s'écrit ainsi sous la forme suivante (Morand-Ohayon, 1995) :

$$\int_{\Omega_F} \rho_F c^2 \frac{\partial u_i^F}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_j^F}{\partial x_j} + \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) - \omega^2 \left(\int_{\Omega_F} \rho_F u_j^F \delta u_j^F + \int_{\Omega_S} \rho_S u_i \delta u_i \right) = 0 \quad [11]$$

Les champs de déplacement virtuels admissibles $\delta \mathbf{u}_F$ doivent en outre vérifier la condition $rot(\delta \mathbf{u}_F) = \mathbf{0}$. La discrétisation de cette condition est assez complexe en pratique. Lorsque cette contrainte n'est pas prise en compte, il existe de modes propres non physiques pour le problème fluide, correspondant à des modes de circulation locale du fluide.

La discrétisation de la forme faible ci-dessus avec une méthode de type éléments finis permet d'obtenir le problème matriciel suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{U}_F(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad [12]$$

Cette expression ne fait pas apparaître de termes d'interactions : le couplage des problèmes est réalisé à l'aide de la condition cinématique de liaison à l'interface fluide/structure :

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_F)_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad [13]$$

2.3. Comparaison des formulations

La formulation en pression/déplacement permet de mettre en œuvre un calcul couplé avec peu de degrés de liberté pour le problème fluide, une interprétation directe de la variable fluide (pression), une définition immédiate de la condition d'interface (*via* le calcul de la matrice d'interaction fluide/structure) de l'interface fluide/structure ; elle conduit néanmoins à un système matriciel non symétrique, nécessitant l'utilisation d'un algorithme d'extraction de valeurs propres non symétrique (Rajakumar-Rogers, 1991), très coûteux en temps de calcul.

Formulation pression/déplacement	Formulation déplacement/déplacement
<ul style="list-style-type: none"> – Taille du problème fluide plus restreinte (un degré de liberté par nœud fluide) – Définition aisée de la condition d'interface fluide/structure – Interprétation directe de la variable fluide 	<ul style="list-style-type: none"> – Problème avec des matrices symétriques
<ul style="list-style-type: none"> – Problème avec des matrices non symétriques 	<ul style="list-style-type: none"> – Taille des problèmes relativement importante (trois degrés de liberté par nœud fluide) – Définition laborieuse de la condition d'interface fluide/structure – Analyse modale plus difficile (perturbation par les modes de cisaillement)

Tableau 1. Comparaison des formulations couplées en pression/déplacement et déplacement/déplacement

La formulation en déplacement/déplacement permet d'obtenir un problème symétrique, mais avec une taille de problème plus importante côté fluide, une

définition peu aisée des conditions d'interface fluide/structure, et l'existence de modes propres non physiques pour le fluide. L'apparition de ces modes dépend des paramètres du modèle (maillage, géométrie) et perturbe assez fortement l'analyse modale. Les principales différences entre les deux formulations sont synthétisées dans le tableau 1 (Woyak, 1995).

3. Développement dans Ansys d'un élément fini fluide formulé en pression avec représentation en série de Fourier

3.1. Formulation en pression/déplacement avec développement en série de Fourier

Compte tenu des différents avantages et inconvénients des deux formulations couplées, du caractère axisymétrique de la structure industrielle à étudier et du caractère non axisymétrique du chargement qui lui est appliqué, nous nous proposons de mettre en œuvre une formulation en pression/déplacement avec représentation des inconnues du problème sous forme d'une série de Fourier, c'est-à-dire en écrivant :

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_r^0 \\ u_\theta^0 \\ u_z^0 \\ p^0 \end{Bmatrix} + \sum_{s=1}^{s=+\infty} \begin{Bmatrix} u_r^s \cos(s\theta) \\ u_\theta^s \sin(s\theta) \\ u_z^s \cos(s\theta) \\ p^s \cos(s\theta) \end{Bmatrix} + \sum_{a=1}^{a=+\infty} \begin{Bmatrix} u_r^a \sin(a\theta) \\ -u_\theta^a \cos(a\theta) \\ u_z^a \sin(a\theta) \\ p^a \sin(a\theta) \end{Bmatrix} \quad [14]$$

Cette formulation permet de classer les modes couplés en faisant apparaître les modes purement axisymétriques (exposant 0), les modes symétriques (exposants $s \geq 1$) et les modes anti-symétriques (exposants $a \geq 1$).

Le choix d'une telle représentation des inconnues en pression/déplacement présente les avantages suivants, et répond aux exigences d'une analyse pour application en bureau d'étude :

- représentation simple du problème fluide par la variable pression ;
- non-singularité des matrices de masse et de raideur du problème fluide pour les harmoniques $s \geq 1$ et $a \geq 1$;
- absence de modes propres non physiques pouvant parasiter l'analyse modale.

Une telle approche n'était pas possible jusqu'à ce jour avec le code de calcul généraliste Ansys. Des développements spécifiques ont donc été réalisés pour permettre une application en bureau d'étude dans le cadre d'analyses de pré-dimensionnement appliquée à des projets industriels.

Les développements sont relatifs à l'élément fini fluide fluid29 du code de calcul, afin d'intégrer la représentation axisymétrique harmonique donnée par l'équation [14].

La discrétisation du terme de raideur du problème fluide nécessite le calcul du produit scalaire $\nabla p \cdot \nabla \delta p$, dont l'expression en coordonnées cylindriques est :

$$\nabla p \cdot \nabla \delta p = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \delta p}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \quad [15]$$

Compte tenu de cette expression et du développement donné par l'équation [14], la matrice de raideur fluide se calcule de la façon suivante pour un mode symétrique d'ordre s quelconque¹ :

$$\mathbf{K}_F = \mathbf{K}'_F + s^2 \mathbf{K}''_F \quad [16]$$

avec :

$$\mathbf{K}'_F = \int_{\hat{\Omega}_F} \left(\frac{\partial \{N_F\}}{\partial r} \frac{\partial \langle N_F \rangle}{\partial r} + \frac{\partial \{N_F\}}{\partial z} \frac{\partial \langle N_F \rangle}{\partial z} \right) r dr dz \quad [17]$$

$$\mathbf{K}''_F = \int_{\hat{\Omega}_F} \{N_F\} \langle N_F \rangle \frac{dr dz}{r} \quad [18]$$

Dans ces expressions, N_F désigne la fonction de forme de l'élément fini fluide, $\hat{\Omega}_F$ est le domaine fluide bidimensionnel dans le plan $\theta = 0$.

Le terme de couplage fluide/structure (matrice \mathbf{R}) se calcule en spécialisant au cas axisymétrique harmonique l'expression [7].

3.2. Comparaison des formulations

Une série de cas tests élémentaires est réalisée pour valider les développements engagés dans le code. Nous présentons les résultats de calcul pour le cas défini par la figure 2.

Le cas élémentaire est celui d'une coque cylindrique de rayon $R = 0.1$ m, d'épaisseur $e = 0.001$ m, de hauteur $h = 0.75$ m, de module d'Young $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et de masse volumique $\rho_S = 8000$ kg/m³. La coque est couplée avec un fluide acoustique de masse volumique $\rho_F = 1000$ kg/m³, de célérité des ondes acoustique $c = 1500$ m/s, contenu dans une cavité cylindrique concentrique de rayon $R' = 0.2$ m.

1. Une formulation identique peut être obtenue pour les modes anti-symétriques d'ordre a quelconque.

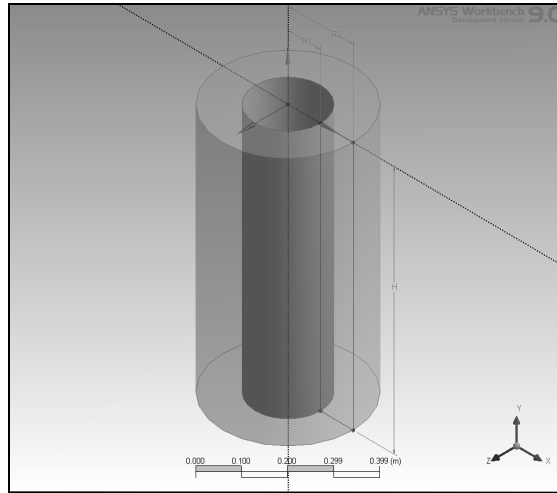


Figure 2. Coque cylindrique couplée avec un fluide acoustique contenue dans une cavité concentrique

Fréquence	Calculs 3D	Calculs 2D-axi	Ecart
$f_{1,1}$	99.7 Hz	99.7 Hz	0.00 %
$f_{1,2}$	490.1 Hz	490.0 Hz	0.02 %
$f_{2,1}$	50.9 Hz	50.7 Hz	0.39 %
$f_{2,2}$	251.8 Hz	251.3 Hz	0.20 %
$f_{3,1}$	89.6 Hz	89.1 Hz	0.56 %
$f_{3,2}$	172.1 Hz	171.3 Hz	0.47 %
$f_{3,3}$	396.8 Hz	394.8 Hz	0.51 %
$f_{4,1}$	183.8 Hz	182.3 Hz	0.82 %
$f_{4,2}$	211.9 Hz	210.2 Hz	0.81 %
$f_{4,3}$	325.6 Hz	323.0 Hz	0.80 %

Tableau 2. Validation élémentaire des développements de l'élément fluid29 couplé avec l'élément shell61 sur le cas élémentaire. Comparaison des calculs 3D et 2D-axisymétriques

La validation est réalisée en comparant les résultats d'un calcul tridimensionnel (couplage des éléments coques 3D linéaires shell63 et des éléments fluides 3D linéaires fluid30) et un calcul bidimensionnel axisymétrique (couplage entre les éléments coques 2Daxi shell61 et l'élément fluide 2Daxi fluid29 développé dans Ansys). Quelques résultats de calcul sont présentés dans le tableau 2. Les fréquences

sont classées par mode de Fourier (valeurs croissantes de s ou a), puis par valeurs croissantes.

Les résultats de calcul sont proches, avec des écarts entre les deux approches inférieurs à 1 % ; le calcul 3D nécessite par contre un maillage dense dans la direction θ , ce qui entraîne des temps de calcul très importants par rapport à l'approche 2D-axi pour laquelle la taille du problème est moindre (typiquement plusieurs heures pour le calcul 3D et quelques minutes pour le calcul 2Daxi).

Cette analyse valide ainsi les développements réalisés dans le code Ansys. Nous proposons maintenant une application industrielle, qui a motivé ces développements.

4. Application industrielle

Le problème posé est celui du calcul des modes propres d'un réacteur nucléaire de propulsion navale. Un modèle simplifié axisymétrique de la structure étudiée est proposé par la figure 3. Le réacteur est constitué des éléments suivants :

- le corps du panier (**1**) : il s'agit de la partie supérieure de la structure intérieure du réacteur, qui contient les éléments combustibles. La géométrie est essentiellement cylindrique. Les caractéristiques géométriques et physiques sont notées E_1 (module d'Young), ρ_1 (masse volumique), ν_1 (coefficient de Poisson) et e_1 (épaisseur) ;
- le fond du panier (**2**) : il s'agit de la partie inférieure de la structure intérieure du réacteur, dont la géométrie est plus complexe. Les grandeurs caractéristiques sont notées E_2 , ρ_2 , ν_2 et e_2 ;
- la cuve (**3**) : il s'agit de l'enveloppe externe du réacteur. Elle est modélisée en première analyse d'une partie cylindrique et d'une partie hémisphérique. Les grandeurs caractéristiques sont notées E_3 , ρ_3 , ν_3 et e_3 ;
- le fluide primaire (**4**) : il est contenu entre le panier et la cuve. On note ρ_F sa masse volumique et c la célérité des ondes sonores dans ce milieu.

Il s'agit de calculer les modes propres du système, en prenant en compte les effets d'interactions fluide/structure, en considérant les modes symétriques d'ordre un ($s = 1$) qui sont les modes sollicités par le chargement dynamique appliqué sur la structure. La modélisation d'ensemble est alors réalisée dans le code Ansys, en utilisant un couplage en pression/déplacement avec les éléments fluid29 développés dans le code. Le modèle numérique est représenté par la figure 4. La modélisation du fluide utilise deux types d'éléments :

- des éléments de fluide « pur », qui ne sont pas en contact avec la structure et qui servent au calcul des opérateurs de masse \mathbf{M}_F et de raideur \mathbf{K}_F du problème fluide ;
- des éléments fluide « d'interface », qui sont en contact avec la structure et qui servent au calcul de l'opérateur d'interaction fluide/structure \mathbf{R} .

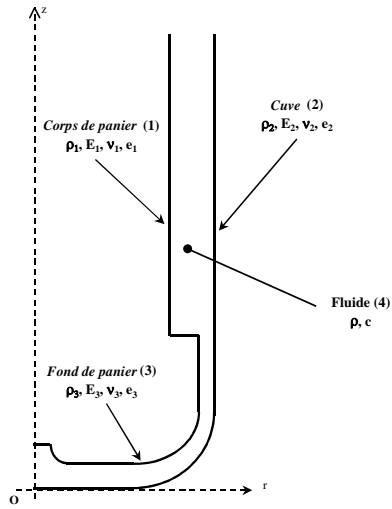


Figure 3. *Modèle simplifié de réacteur nucléaire de propulsion navale*

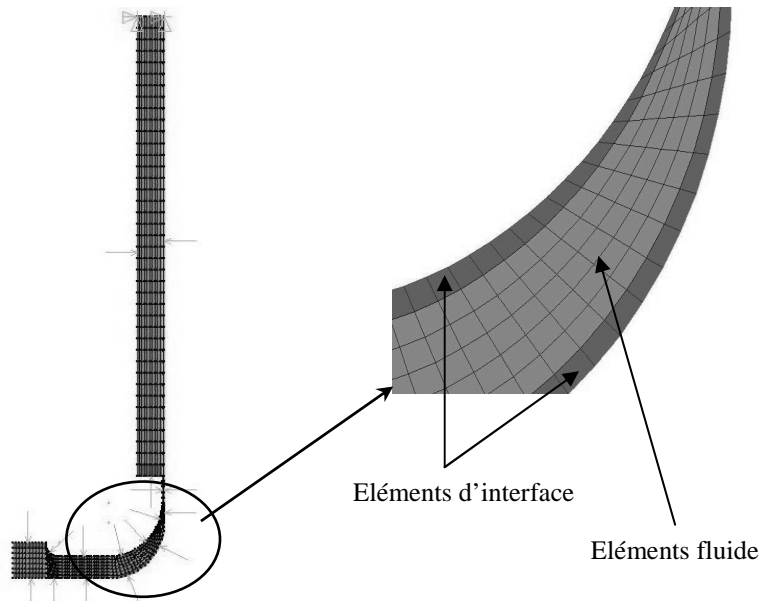


Figure 4. *Modélisation axisymétrique du problème couplé fluide/structure industriel. Eléments de structure coque axisymétrique formulée en déplacement (shell61), éléments de fluide acoustique axisymétrique formulée en pression (fluid29)*

Un premier calcul permet de déterminer les modes propres de la structure dans le vide, pour les modes symétriques d'ordre un ($s = 1$). Le premier mode propre est un mode de flexion du panier (44 Hz) et le second mode propre est un mode de flexion de la cuve (78 Hz). Les déformées modales sont représentées par la figure 5.

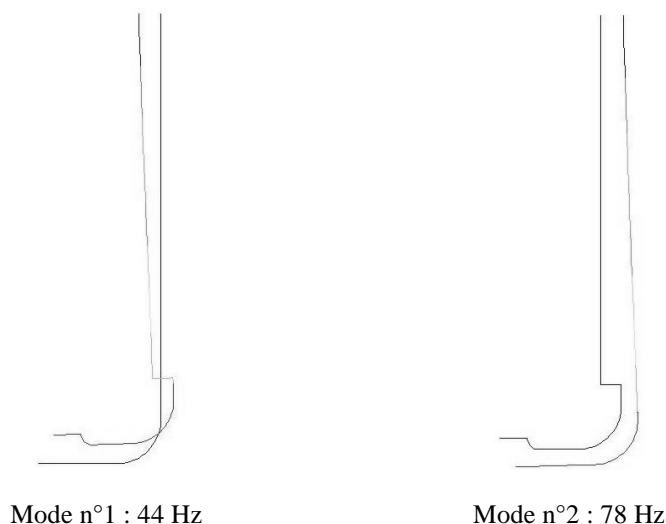


Figure 5. Premiers modes propres de la structure (iso-valeurs de déplacement). Mode de flexion du panier (44 Hz) et mode de flexion de la cuve (78 Hz). Modes symétriques d'ordre un ($s = 1$)

Nous poursuivons l'analyse avec le calcul des modes propres de la cavité fluide acoustique (c'est-à-dire en considérant seulement le problème fluide et la structure rigide). Le tableau 3 donne les résultats de calcul des premières fréquences propres pour les modes symétriques d'ordre un ($s = 1$) ; les calculs Ansys sont comparés avec les calculs réalisés avec un code Matlab, développé par DCN (Sigrist *et al.*, 2005). Les écarts entre les deux calculs sont inférieurs à 1 %, ce qui donne une validation supplémentaire des développements de l'élément fluid29.

Fréquence	Calcul Ansys	Calcul Matlab	Ecart
f_1	224.47 Hz	224.57 Hz	-0.02 %
f_2	307.12 Hz	307.04 Hz	0.03 %
f_3	410.38 Hz	406.12 Hz	1.05 %
f_4	480.38 Hz	482.52 Hz	-0.44 %

Tableau 3. Premières fréquences propres de la cavité fluide. Élément fluid29, modes symétriques d'ordre un ($s = 1$). Comparaison des calculs Ansys et Matlab

Les modes propres correspondant sont représentés dans le plan $\theta = 0$ en iso-valeurs de pression par la figure 6.

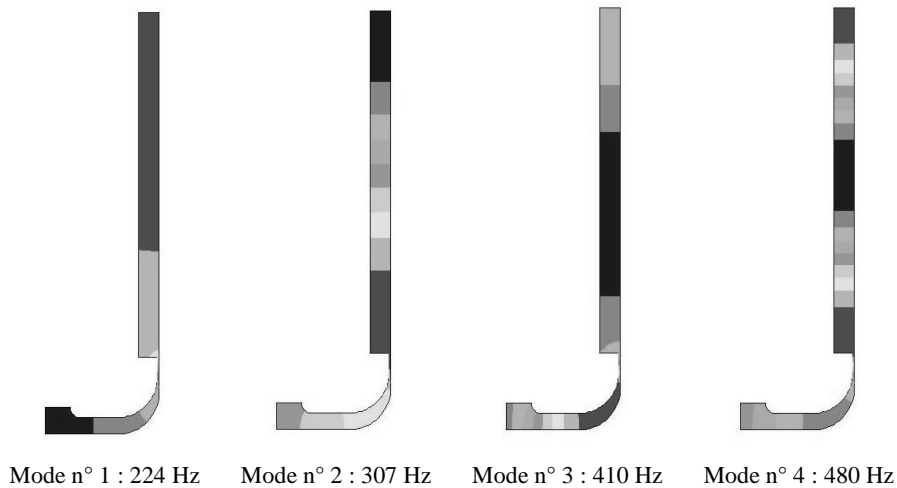


Figure 6. Premiers modes propres de la cavité fluide acoustique (iso-valeur de pression). Modes symétriques d'ordre un ($s = 1$)

Nous nous intéressons maintenant au calcul des modes propres du système couplé, obtenus par couplage des éléments finis shell61 (coque formulée en déplacement avec décomposition en série de Fourier) et fluid29 (fluide formulé en pression avec décomposition en série de Fourier), pour les modes symétriques d'ordre un ($s = 1$).

Le tableau 4 donne une comparaison du calcul de référence, obtenu avec le code DCN développé dans Matlab (Sigrist, 2004), avec le calcul Ansys. Les écarts constatés sont faibles et satisfaisants pour ce type de calcul ; le calcul Ansys donne des valeurs systématiquement inférieures au calcul effectué avec le code développé dans Matlab. Cette différence peut s'expliquer par les points suivants :

- l'algorithme d'extraction de valeurs propres utilisé dans le code Ansys est l'algorithme de Lanczos non symétrique (Rajakumar-Rogers, 1991), alors que le programme Matlab utilise la fonction de base **eig**, qui est basée sur l'algorithme QR, après transformation de Hessenberg et pré-conditionnement du système (Golub-Van Loan, 1984) ;

- le calcul des matrices élémentaires est analytique pour le code développé dans Matlab (Sigrist *et al.*, 2005) et numérique dans le code Ansys (Khonke, 1986).

Les résultats de calcul sont cependant équivalents, ce qui permet de valider l'utilisation du code Ansys pour des applications industrielles.

Fréquence	Calcul Ansys	Calcul Matlab	Ecart
f_1	25.94 Hz	26.03 Hz	-0.35 %
f_2	63.82 Hz	65.62 Hz	-2.74 %
f_3	99.84 Hz	102.94 Hz	-3.01 %
f_4	157.06 Hz	162.30 Hz	-3.23 %

Tableau 4. Premières fréquences propres du système couplé. Eléments shell61 et fluid29, modes symétriques d'ordre un ($s=1$). Comparaison des calculs Ansys et Matlab

La figure 7 donne une représentation des deux premiers modes couplés, en iso-valeurs de déplacement pour la partie structure et en iso-valeurs de pression pour la partie fluide.

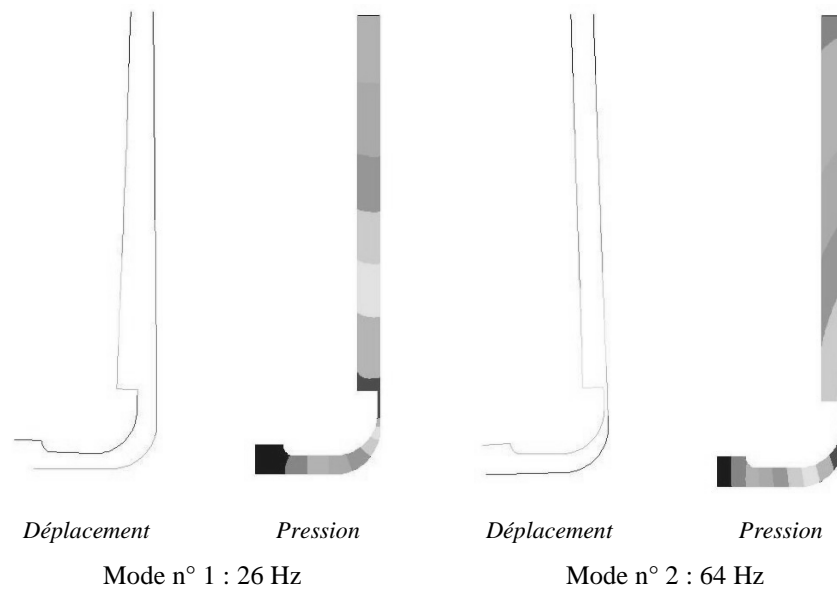


Figure 7. Premiers modes propres du système couplé fluide/structure (iso-valeurs de déplacement et de pression). Flexion du panier (26 Hz), mode couplé de panier et de cuve (64 Hz). Modes symétriques d'ordre un ($s=1$)

Le premier mode couplé est un mode de flexion du panier en présence de fluide, à une fréquence en eau (26 Hz) inférieure à la fréquence propre de flexion dans le vide (44 Hz) : ceci illustre l'effet de *masse ajoutée*, caractéristique des interactions

fluide/structure (Gibert, 1986). Le second mode est un mode de flexion de panier et de la cuve, couplés par l'intermédiaire du fluide, à une fréquence intermédiaire (79 Hz) entre les fréquences propres du panier et de la cuve découplés (44 Hz et 103 Hz). Ceci illustre l'effet de *couplage de mode*, également caractéristique des interactions fluide/structure pour le système étudié (Axisa, 2001).

Cette analyse permet de montrer l'importance des phénomènes d'interactions fluide/structure pour le cas industriel et la nécessité de les prendre en compte dans la démarche de dimensionnement.

Nous terminons enfin l'étude en comparant les résultats de calcul Ansys obtenus à partir d'une formulation pression/déplacement et déplacement/déplacement du système couplé, dans le cadre de l'approche axisymétrique harmonique.

Le tableau 5 donne une comparaison des deux approches de modélisation. Les fréquences propres obtenues sont du même ordre de grandeur, l'obtention des modes couplés avec la formulation déplacement/déplacement devant faire l'objet d'une attention particulière compte tenu de l'existence de modes non physiques. Les calculs modaux sont réalisés avec l'algorithme itératif de Lanczos par bloc, adaptés aux problèmes symétriques (Chatelin, 1988), en initialisant le calcul avec une valeur de fréquence propre proche de celle attendue, et ce pour chaque mode propre.

Fréquence	Formulation (\mathbf{u}, p)	Formulation (\mathbf{u}, \mathbf{u}_F)	Ecart
f_1	25.94 Hz	26.66 Hz	-2.70 %
f_2	63.82 Hz	64.02 Hz	-0.31 %
f_3	99.84 Hz	108.33 Hz	-7.84 %
f_4	157.06 Hz	158.24 Hz	-0.75 %

Tableau 5. Premières fréquences propres du système couplé. Comparaison des résultats de calcul Ansys en formulation pression/déplacement et déplacement/déplacement, modes symétriques d'ordre un ($s=1$)

5. Conclusion

Nous avons présenté les développements réalisés dans le code de calcul généraliste Ansys permettant de proposer de nouvelles fonctionnalités de calculs couplés en formulation pression/déplacement avec représentation des inconnues en série de Fourier.

La formulation théorique du nouvel élément fini fluide fluid29 a été exposée, ainsi qu'un des cas de calculs élémentaires mis en place pour valider les développements.

Cette nouvelle fonctionnalité du code de calcul permet de proposer une analyse modale pour des problèmes à symétrie de révolution : une application à un cas industriel (étude de l'ensemble panier et cuve d'un réacteur de propulsion navale) est ainsi proposée.

Un travail de développement numérique actuellement en cours a pour objet l'intégration dans le code Ansys de la formulation couplée fluide/structure symétrique utilisant une modélisation de type (\mathbf{u}, p, φ) (Ohayon-Valid, 1983 ; Morand-Ohayon, 1995). Cette approche permet de disposer d'une modélisation couplée présentant les avantages des deux formulations étudiées dans le présent article ; elle permet ainsi l'utilisation de méthodes de type réponse spectrale pour l'analyse dynamique d'un système couplé soumis à une accélération imposée (type sismique). La validation des développements de la formulation symétrique dans le code Ansys et l'application industrielle à l'étude dynamique du réacteur de propulsion navale feront l'objet d'une prochaine publication.

6. Bibliographie

- Axisa F., *Modélisation des systèmes mécaniques, Interactions fluide/structure*, Hermès, 2001.
- Chatelin F., *Valeurs propres de matrices*, Masson, 1988.
- Gibert R.J., *Vibration des structures, Interaction avec les fluides, Sources d'excitation aléatoires*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 69, Eyrolles, 1986.
- Golub G.H., Van Loan C.F., *Matrix Computation*, John Hopkins University Press, 1984.
- Khonke P., *ANSYS Theory Reference*, Swanson Analysis System Inc, 2004.
- Makerle J., "Fluid-Structure Interaction Problems, Finite Element Approach and Boundary Elements Approaches. A Bibliography", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 31, 1999, p. 231-240.
- Morand H. J.P., Ohayon R., *Fluid Structure Interaction*, Wiley & Sons, 1995.
- Ohayon R., Valid R., "True Symmetric Formulation for Fluid-Structure Interaction in Bounded Domains, Finite Elements Results", *Numerical Methods in Coupled Systems*, Ed. Lewis R.W., Bettes P., Hinton E., 1983, p. 293-325.
- Rajakumar C., Rogers C.G., "The Lanczos Algorithm Applied to Unsymmetric Generalized Eigenvalue Problem", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 1991, p. 1009-1026.
- Raviart P.A., Tomas J.M., *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1993.
- Sigrist J.F., *Modélisation et simulation numérique d'un problème couplé fluide/structure non linéaire, Application au dimensionnement de structures nucléaires de propulsion navale*, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2004.

Sigrist J.F., Lainé C., Peseux B., « Analyse modale d'une structure industrielle avec prise en compte du couplage fluide/structure », (accepté pour publication dans) *Mécanique & Industries*, 2005.

Verpeaux P. *et al.*, "A Modern Approach of Computer Codes for Structural Analysis", *Structural Mechanics in Reactor Technology*, Anhiem, August 14-18, 1989.

Woyak D.B., *Acoustic and Fluid Structure Interaction*, Swanson Analysis System Inc, 1995.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method*, Basic Formulation and Linear Problems, Mac Graw Hill, 1989.