
Une formulation mixte-hybride naturelle robuste pour la modélisation des coques courbes isotropes

Rezak Ayad

*Université de Reims Champagne-Ardenne
Groupe de Mécanique Matériaux et Structures (GMMS), EA 2617
ESIEC, Esp Roland Garros, BP 1029
F-51686 Reims
rezak.ayad@univ-reims.fr*

RÉSUMÉ. Ce travail traite d'une formulation mixte-hybride naturelle pour l'analyse linéaire des coques courbes homogènes et isotropes. Le modèle NHMiSP (Natural Hybrid-Mixed with Shear Projection) est formulé sur la base de l'approche géométrique du solide dégénéré. En conséquence, il peut-être utilisé pour modéliser des coques de forme quelconque présentant un gauchissement. Le modèle de membrane est basé sur l'approche hybride naturelle de Pian. La formulation du modèle de flexion est basée sur le principe classique de Hellinger-Reissner. La satisfaction, au niveau variationnel, des équations d'équilibre en flexion, pour définir les contraintes de cisaillement transversal (CT), rend le présent modèle partiellement hybride. Le verrouillage en CT est évité par l'introduction des déformations de substitution (méthode ANS : Assumed Natural Strains). L'élément fini ainsi obtenu (un quadrilatère courbe à 4 nœuds) est validé avec succès à travers des tests standard de coques.

ABSTRACT. This work deals with a natural hybrid-mixed variational formulation for the linear analysis of isotropic and homogeneous curved shells. The model NHMiSP (Natural Hybrid-Mixed with Shear Projection) is based on the 3D-degenerated solid approach. It can be used to simulate arbitrary shells presenting a warpage. The membrane model is based on the Pian's natural approach. The bending model is formulated using the classical Hellinger-Reissner principle. Two bending equilibrium equations are satisfied at the variational level, allowing to get a partially hybrid transverse shear model. The shear locking problem is avoided using the ANS method (Assumed Natural Strains). The derived finite element model (4-node quadrilateral) is validated using some standard shell tests.

MOTS-CLÉS : élément fini, coque, mixte/hybride, solide dégénéré, Reissner/Mindlin, formulation naturelle.

KEYWORDS: finite element, shell, hybrid/mixed, degenerated solid, reissner-mindlin, natural formulation.

1. Introduction

Pourquoi continuer à développer de nouveaux éléments finis ? Une question qui m'a été posée il y a dix ans (avril 1994) par un Professeur mécanicien lors d'un séminaire local organisé à Charleville-Mézières (France). Je n'avais pas de réponse, ni d'avis personnel à donner, mais je me suis souvenu d'une réponse du professeur Zienkiewicz à la même question, posée par un chercheur finlandais, lors de la dernière European conference on new advances in computational structural mechanics (avril 1991, Giens). Sa réponse a été « Cher monsieur, sachez qu'au jour d'aujourd'hui, il n'existe aucun élément fini de structures minces qualifié de meilleur. Si vous avez des idées pour faire évoluer encore d'avantage ce créneau, allez-y et ne vous arrêtez pas. »

Avec le recul, je pense que des éléments finis comme DKT ou DKQ peuvent être qualifiés de meilleurs dans le domaine des plaques minces où le cisaillement transversal est loin de créer un danger ; il est négligeable. Ces éléments sont simples de géométrie et de formulation. Ils ont donné globalement des résultats qui ont réjouis et satisfait bon nombre de professionnels, dans pratiquement toutes les applications liées à l'analyse linéaire et non linéaire des structures minces. Attention tout de même à la partie membrane, souvent présente dans les coques, mais dont la seule contribution d'éléments comme CST ou Q4 fausse les performances induites par l'approche Kirchhoff Discret. Celle-ci a été proposée dès 1969 par (Striklin *et al.*, 1969) et par (Dhatt, 1970), et exploitée avec pertinence par (Batoz *et al.*, 1980, 1982) et ses nombreux collaborateurs, en proposant DKT, DKQ et leurs dérivés.

De nos jours, il faudra désormais compter sur des éléments finis de structures minces prenant en compte le cisaillement transversal (CT). La théorie est là ! (Reissner, 1945) et (Mindlin, 1951) ont fait ce qu'ils avaient à faire. A nous de compléter leur œuvre en leur dédiant le bon modèle élément fini qui les confortera dans leur démarche d'il y a cinquante ans. Le verrouillage en CT a été et restera le principal guide pour l'obtention de bons éléments de Mindlin, valables pour les structures épaisses et minces. Une synthèse bibliographique est donnée par (Kerber, 1990 ; Ayad *et al.*, 1998 ; Mackerle, 2002), etc. Un grand nombre d'auteurs, comme Bathe, Hughes, Zienkiewicz, Belytscko, Taylor, Batoz, Dhatt... – pour ne citer que ceux-là car ils sont connus –, ont apporté leurs contributions en y mettant sur la grande table de la science un grand savoir-faire ayant permis de rendre la formulation des éléments finis de Reissner-Mindlin facile et abordable. J'ai voulu contribuer à cette extraordinaire réalisation en y proposant de bons éléments mixtes-hybrides de plaques, dans le cadre de ma thèse de doctorat (Ayad, 1993). Une fois passés en coque, les bons éléments qu'étaient MiSP3 et MiSP4 ont vu leur performance légèrement affectée par la contribution d'éléments classiques de membrane comme CST ou Q4. Le nouveau modèle NHMiSP4 que je présente dans ce travail améliore sensiblement les résultats de coques présentant des comportements plus ou moins complexes en membrane et/ou en flexion. Il sera formulé sur la base d'un élément quadrilatéral à 4 nœuds et 6 degrés de liberté par

nœud. En flexion/CT, il devient l'élément de plaque MiSP4 (Ayad *et al.*, 1998) avec toutes ses bonnes performances. En coque, il est courbe (solide dégénéré), sa formulation reste mixte-hybride. Ce que n'a pas été MiSP4-Q4 développé dans nos travaux antérieurs (Ayad, 1993 ; Ayad *et al.*, 2002) qui était simplement mixte. Toujours en coque, le modèle NHMiSP4 est enrichi avec une représentation hybride naturelle des contraintes de membrane. Nous verrons par la suite que cette représentation est plus complète que celle proposée par (Pian *et al.*, 1984), car elle prend en compte la distorsion de l'élément dans un maillage quelconque.

Rappelons que les éléments finis utilisés pour modéliser des coques de forme quelconque sont parmi les plus difficiles à concevoir. Deux approches sont aujourd'hui largement utilisées. La première approche consiste à discrétiser la coque par un ensemble de surfaces (ou facettes) planes, de préférence triangulaires pour tenir compte des surfaces gauches si elles existent. C'est l'approche dite « facettes planes », les normales aux nœuds sont en général discontinues. Les éléments finis correspondants sont obtenus par combinaison des éléments de membrane et de plaque en flexion avec ou sans effet de cisaillement transversal (CT). Le couplage membrane-flexion est mis en évidence après transformation des variables nodales locales dans le repère global. Les travaux traitant de cette approche sont très nombreux. On pourra consulter les ouvrages de (Bathe, 1996 ; Cook *et al.* 1989 ; Zienkiewicz *et al.*, 1991 ; Batoz *et al.*, 1992) pour plus de détails. Les éléments de coque à facettes planes sont simples à formuler et sont capables de représenter les mouvements de corps rigides. Ces éléments ont quelques inconvénients (Yang *et al.*, 1990) : une limitation à leur forme triangulaire si la coque discrétisée présente un gauchissement, et une lenteur de la convergence dans le cas des problèmes sensibles aux défauts de géométrie, tels que le flambement (Lardeur, 1990). L'approche par facettes planes a été introduite pour la première fois en 1961 par (Greene *et al.*, 1961). Une liste d'éléments plats assez connus est présentée par (Yang *et al.*, 1990). Des éléments mixtes et hybrides sont également formulés à l'aide de cette approche (Mau *et al.*, 1973 ; Yoshida, 1974 ; Batoz *et al.*, 1980, 1982 ; Pol, 1992 ; Chatelain, 1987), etc., l'ont utilisé en combinant les éléments de plaque de Kirchhoff Discret DKT et DKQ aux éléments de membrane classiques CST (*Constant Strain Triangle*) et Q4 bilinéaire standard. Ils ont obtenu de bons résultats pour des problèmes non linéaires statiques et dynamiques.

La deuxième approche géométrique que nous avons adoptée pour formuler notre modèle NHMiSP4 a été initiée au début des années 1970 par (Ahmad *et al.*, 1970). Il s'agit de l'approche isoparamétrique courbe. Elle trouve son application dans des domaines variés de calcul des structures : coques composites multicouches (Vlachoutsis, 1987, 1990 ; Wilt, 1990 ; Rammerstofer, 1991), etc., analyse des non-linéarités géométriques et matérielles (Fezans, 1981 ; Hughes *et al.*, 1981 ; Dvorkin *et al.*, 1984 ; Bathe *et al.*, 1986 ; Ramm *et al.*, 1986 ; Simo *et al.*, 1989, 1990 ; Boisse *et al.*, 1992 ; Cofer *et al.*, 1991 ; Parisch, 1991 ; Ayad, 2002) ... Cette approche, appelée également approche du solide 3D-dégénéré, permet de discrétiser directement les équations tridimensionnelles de la mécanique des solides.

L'introduction d'hypothèses cinématiques et mécaniques conduit à une formulation dégénérée, avec une représentation isoparamétrique de la géométrie \bar{x}_p et des déplacements \bar{u}_p d'un point de la surface moyenne. Le vecteur \bar{u}_p est défini par ses composantes cartésiennes (U, V, W) . Les composantes de rotation sont au nombre de deux ou trois, suivant que les normales aux nœuds sont continues ou discontinues, d'un élément à un autre. L'introduction de l'hypothèse des sections droites (Hencky-Mindlin-Reissner) permet de retenir une mesure des déformations de CT. Une revue historique conduisant à la formulation d'éléments basés sur ce type d'approche est faite par (Irons, 1976). Les ouvrages de (Bathe, 1996 ; Crisfield, 1986 ; Hughes, 2000 ; Cook *et al.*, 1989 ; Zienkiewicz *et al.*, 1991 ; Batoz *et al.*, 1992) offrent des possibilités assez variées sur la manière de présenter le formalisme variationnel relatif à cette approche. Ces possibilités incluent notamment les différentes formes du principe des travaux virtuels, avec intégration numérique ou explicite suivant l'épaisseur des matrices élémentaires. C'est le deuxième type d'intégration qui est retenu dans ce travail. L'épaisseur étant considérée constante par élément.

2. Formulation théorique du modèle NHMiSP coque dégénéré à 4 nœuds

Nous rappelons uniquement les quantités géométriques et cinématiques nécessaires à la construction du modèle variationnel NHMiSP. Pour obtenir plus de détails sur la géométrie différentielle associée à une coque, on pourra consulter (Batoz *et al.*, 1992).

Le nouveau modèle NHMiSP4 est construit à partir d'un formalisme variationnel mixte généralisé. Le modèle de membrane est hybride naturel au sens de Pian, avec une représentation complète des contraintes contravariantes dans le repère naturel. Nous verrons par la suite que cette hypothèse réduit de façon conséquente la sensibilité aux distorsions géométriques, observée sur le modèle hybride classique de (Pian *et al.*, 1984). La partie flexion est basée sur le principe de Hellinger-Reissner avec deux modifications principales. La première consiste à satisfaire deux équations de l'équilibre tridimensionnel en contrainte d'une coque. Cela permet de réduire les paramètres d'approximations des contraintes et donc le coût des calculs. La seconde modification concerne la définition des déformations covariantes de cisaillement transversal (CT), nécessaire pour l'élimination du problème de verrouillage en CT. La méthode des déformations de CT de substitution (*Assumed Natural Strain method*), définie dans le repère covariant naturel, est adoptée à cette fin. Le modèle NHMiSP4 final est un élément fini de coque dégénéré à 4 nœuds et 6 ddl par nœuds : 3 déplacements selon les axes globaux X,Y,Z et 3 rotations autour de ces mêmes axes.

2.1. Géométrie de l'élément NHMiSP4

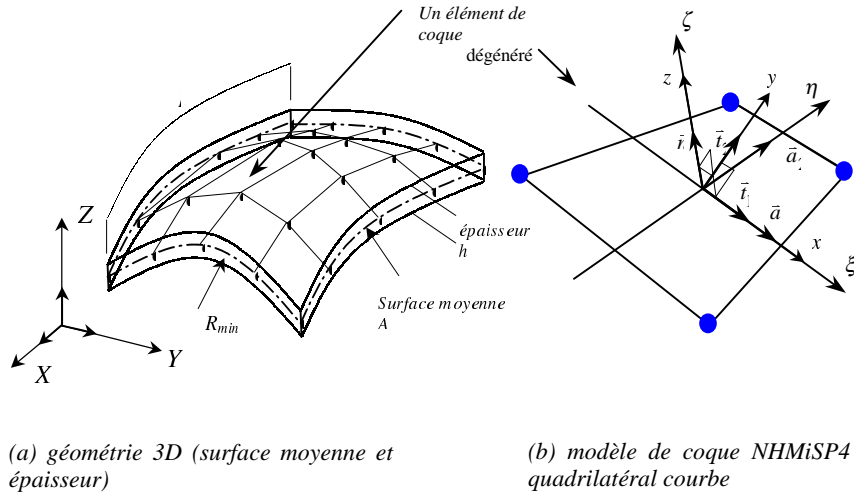


Figure 1. Description du modèle de coque courbe NHMiSP4

La géométrie de l'élément NHMiSP4 (figure 1) est représentée par sa surface moyenne courbe A autorisant un gauchissement. Son épaisseur h est considérée comme constante. Le vecteur position d'un point quelconque q de la coque s'écrit, en termes des coordonnées isoparamétriques (ξ, η) :

$$\bar{x}_q(\xi, \eta, \zeta) = \bar{x}_p(\xi, \eta) + z\bar{n}(\xi, \eta) \quad ; \quad z = \zeta \frac{h}{2} \quad [1]$$

\bar{x}_p est le vecteur position du point p de la surface moyenne, défini par :

$$\bar{x}_p(\xi, \eta) = \sum_{i=1,4} N_i(\xi, \eta) \bar{x}_{p_i} \quad ; \quad \langle x_{p_i} \rangle = \langle X_i \quad Y_i \quad Z_i \rangle \quad [2]$$

X_i, Y_i, Z_i sont les coordonnées cartésiennes du nœud i dans le repère global $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $N_i(\xi, \eta)$ sont les fonctions d'interpolation bilinéaires de l'élément standard à 4 nœuds. La base covariante au point p est donnée par :

$$[F_0] = [\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \bar{n}] \quad (\text{en } \zeta = 0) \quad [3]$$

Les vecteurs de base \vec{a}_1 et \vec{a}_2 (figure 1) sont généralement non orthogonaux. Ils sont définis par :

$$\vec{a}_1 = \vec{x}_{p,\xi} = \sum_{i=1,4} N_{i,\xi} \vec{x}_{pi} \quad \text{et} \quad \vec{a}_2 = \vec{x}_{p,\eta} = \sum_{i=1,4} N_{i,\eta} \vec{x}_{pi} \quad [4]$$

$$\langle a_1 \rangle = \langle a_{1X} \quad a_{1Y} \quad a_{1Z} \rangle \quad ; \quad \langle a_2 \rangle = \langle a_{2X} \quad a_{2Y} \quad a_{2Z} \rangle$$

La normale \vec{n} au point p s'écrit :

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|} \quad ; \quad \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = \begin{Bmatrix} a_{1Y}a_{2Z} - a_{1Z}a_{2Y} \\ a_{1Z}a_{2X} - a_{1X}a_{2Z} \\ a_{1X}a_{2Y} - a_{1Y}a_{2X} \end{Bmatrix} \quad [5]$$

Un repère tangent orthonormé, sur lequel seront définies les composantes cartésiennes locales des tenseurs de contraintes $\vec{\sigma}_t$ et de déformations $\vec{\varepsilon}_t$, est nécessaire. L'épaisseur h étant constante par élément, le repère tangent $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$ est tel que la normale \vec{n} soit orthogonale à la surface moyenne ($\zeta = 0$). Le vecteur tangent \vec{t}_1 est considéré comme étant porté par le vecteur de base \vec{a}_1 et normalisé par rapport à son module $|\vec{a}_1|$:

$$\vec{t}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} \quad [6]$$

Le vecteur normal étant donné par la relation [5], le vecteur tangent \vec{t}_2 sera défini par le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{t}_1$. On définit ainsi un repère tangent orthonormé unique au point p, représenté par la matrice [Q] suivante :

$$[Q] = [\vec{t}_1 \quad \vec{t}_2 \quad \vec{n}] = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{2X} & n_X \\ t_{1Y} & t_{2Y} & n_Y \\ t_{1Z} & t_{2Z} & n_Z \end{bmatrix} \quad [7]$$

En conséquence, nous pouvons définir une base orthonormée $[Q_i] = [\vec{t}_{1i} \quad \vec{t}_{2i} \quad \vec{n}_i]$ en chaque nœud en utilisant la relation [7].

2.2. Cinématique de l'élément NHMiSP4

2.2.1. Champ de déplacements d'un point quelconque de la coque

Le champ de déplacements d'un point quelconque q de la coque s'écrit avec l'hypothèse de sections droites de Hencky/Mindlin/Reissner :

$$\bar{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = \bar{u}_p(\xi, \eta) + z\bar{\beta}(\xi, \eta) ; \quad \bar{\beta} = \beta_x \bar{t}_1 + \beta_y \bar{t}_2 ; \quad \bar{\beta} \cdot \bar{n} = 0 \quad [8]$$

$\bar{u}_p(\xi, \eta)$ est le vecteur déplacement du point p (z ou $\zeta=0$), $\bar{\beta}(\xi, \eta)$ le vecteur rotation orthogonal à la normale \bar{n} . $\bar{\beta}$ s'écrit également :

$$\bar{\beta} = \bar{\theta} \wedge \bar{n} = \theta_y \bar{t}_1 - \theta_x \bar{t}_2 ; \quad \bar{\theta} = \theta_x \bar{t}_1 + \theta_y \bar{t}_2 \quad \text{car } \bar{u}_q = \bar{u}_p + \bar{\theta} \wedge \bar{p}_q$$

Ainsi, au nœud i (figure 1), $\beta_{xi} = \theta_{yi}$ et $\beta_{yi} = -\theta_{xi}$; θ_x et θ_y sont les rotations de la normale \bar{n} autour des axes x et y respectivement. Le vecteur \bar{u}_q est donné par :

$$\bar{u}_q = \sum_{i=1,4} N_i \bar{u}_{pi} + z \sum_{i=1,4} N_i (-\theta_{xi} \bar{t}_{2i} + \theta_{yi} \bar{t}_{1i}) \quad [9a]$$

ou sous forme vectorielle,

$$\left\{ \bar{u}_q \right\} = \sum_{i=1,4} N_i \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} + z \sum_{i=1,4} N_i \left(-\theta_{xi} \begin{Bmatrix} t_{2X_i} \\ t_{2Y_i} \\ t_{2Z_i} \end{Bmatrix} + \theta_{yi} \begin{Bmatrix} t_{1X_i} \\ t_{1Y_i} \\ t_{1Z_i} \end{Bmatrix} \right) \quad [9b]$$

Les variables nodales sont définies par :

$$\langle u_n \rangle = \langle U_i \quad V_i \quad W_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \dots \quad i=1 \text{ à } 4 \rangle \quad [10]$$

où U_i, V_i, W_i sont les composantes cartésiennes du vecteur \bar{u}_{pi} dans le repère global, θ_{xi}, θ_{yi} les composantes du vecteur rotation de la normale \bar{n}_i autour des vecteurs \bar{t}_{1i} et \bar{t}_{2i} respectivement. Le passage du repère tangent local $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n})$ à chaque nœud au repère global $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ permet d'obtenir 6 ddl par nœud : les déplacements globaux U_i, V_i, W_i et les rotations globales $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ autour des axes X, Y, Z (figure 2). Le passage aux rotations globales est obtenu en utilisant la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{t}_{1i} \rangle \\ \langle \bar{t}_{2i} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix} \quad [11]$$

$\langle \bar{t}_{1i} \rangle$ et $\langle \bar{t}_{2i} \rangle$ est la représentation en ligne des vecteurs tangents \bar{t}_1 et \bar{t}_2 au nœud i .

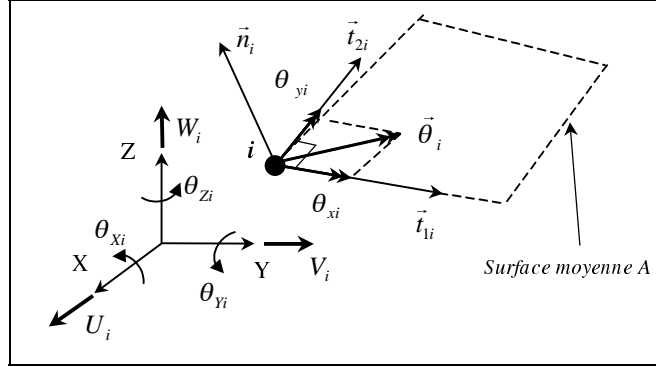


Figure 2. Composantes locales et globales de la rotation $\vec{\theta}$ au nœud i

2.2.2. Expressions simplifiées des déformations

Nous avons retenu une approximation linéaire en ζ pour les déformations $\{\epsilon_s\}$ incluant la membrane et la flexion et constante en ζ pour les déformations de cisaillement transversal $\{\gamma_s\}$. Une formulation plus complète avec une représentation quadratique en ζ , et prenant en compte les courbures moyennes et gaussiennes, est donnée dans la référence (Ayad, 2002).

$$\{\epsilon_s\} = \{\epsilon_0\} + \zeta\{\epsilon_1\} \text{ et } \{\gamma_s\} = \{\gamma\} \quad [12]$$

Les déformations de membrane $\langle \epsilon_0 \rangle = \langle e_x \ e_y \ \gamma_{xy} \rangle$, de flexion $\langle \epsilon_1 \rangle = \langle \epsilon_{x1} \ \epsilon_{y1} \ \gamma_{xy1} \rangle$ et de cisaillement transversal $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{xz} \ \gamma_{yz} \rangle$ sont définies respectivement par les expressions suivantes :

$$\{\epsilon_0\} = [B_0]\{u_n\} ; \quad \{\epsilon_1\} = [B_1]\{u_n\} ; \quad \{\gamma_s\} = [\bar{B}_c]\{u_n\} \quad [13a,b,c]$$

Les matrices $[B_0]$ et $[B_1]$ sont données respectivement par les relations 14a et 14b suivantes, la matrice de substitution $[\bar{B}_c]$ est détaillée en annexe A :

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 \\ \langle t_2 \rangle N_{i,y} & 0 & 0 \dots i = 1,4 \\ \langle t_1 \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [14a]$$

$$N_{i,x} = C_{11}N_{i,\xi} + C_{21}N_{i,\eta} ; \quad N_{i,y} = C_{12}N_{i,\xi} + C_{22}N_{i,\eta}$$

$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ sont les termes de la matrices $[C_0]$ qui sera définie dans la section 2.4 par la relation 42. La matrice $[B_0]$, de dimension 3×20 , fait intervenir uniquement les variables nodales de déplacement.

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,x} & \frac{h}{2} \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,x} & & \\ \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,y} & \frac{h}{2} \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,y} & & \\ \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,y} + \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,x} & \frac{h}{2} (\langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,x}) & & \\ & & \dots & i = 1 \text{ à } 4 \end{bmatrix} \quad [14b]$$

$$\bar{N}_{i,x} = b_{c11} N_{i,\xi} + b_{c21} \bar{N}_{i,\eta} \quad ; \quad \bar{N}_{i,y} = b_{c12} N_{i,\xi} + b_{c22} \bar{N}_{i,\eta}$$

$$\langle \bar{t}_{1i} \rangle = \langle -\bar{t}_1 \bullet \bar{t}_{2i} \quad \bar{t}_1 \bullet \bar{t}_{1i} \rangle \quad ; \quad \langle \bar{t}_{2i} \rangle = \langle -\bar{t}_2 \bullet \bar{t}_{2i} \quad \bar{t}_2 \bullet \bar{t}_{1i} \rangle$$

La matrice $[B_1]$, de dimension 3×20 , fait intervenir toutes les variables nodales.

b_{cij} sont les termes de la matrice $[b_c] = [A_n][C_0]$. La matrice $[A_n]$ est donnée par :

$$[A_n] = \begin{bmatrix} \bar{a}^2 \bullet \bar{n}_{,\eta} & -\bar{a}^1 \bullet \bar{n}_{,\eta} \\ -\bar{a}^2 \bullet \bar{n}_{,\xi} & \bar{a}^1 \bullet \bar{n}_{,\xi} \end{bmatrix}$$

2.3. Formulation de la matrice de rigidité mixte

2.3.1. Ecriture du principe des travaux virtuels (PTV)

L'expression du PTV est définie par sa forme généralisée en pondérant les relations de comportement suivantes :

$$\{\varepsilon_s\} - [H]^{-1} \{\sigma_s\} = \{0\} \quad \text{et} \quad \{\gamma_s\} - [G]^{-1} \{\tau_s\} = \{0\} \quad [15]$$

par les contraintes virtuelles $\langle \sigma_s^* \rangle$ et $\langle \tau_s^* \rangle$.

$$W = \sum_{\text{éléments}} (W_{\text{int}}^e - W_{\text{ext}}^e) = 0 \quad \forall \bar{u}_q^* \quad \text{avec} \quad \bar{u}_q = \bar{\bar{u}}_q \quad \text{et} \quad \bar{u}_q^* = 0 \quad \text{sur} \quad S_u \quad [16]$$

$$W_{\text{int}}^e = W_{mf}^e + W_c^e \quad (\text{travail virtuel interne}) \quad [17]$$

$$W_{mf}^e = \int_{V^e} (\langle \varepsilon_s^* \rangle \{\sigma_s\} + \langle \sigma_s^* \rangle \{\varepsilon_s\} - \langle \sigma_s^* \rangle [H]^{-1} \{\sigma_s\}) dV \quad [18a]$$

$$W_c^e = \int_{V^e} \left(\langle \gamma_s^* \rangle \{ \tau_s \} + \langle \tau_s^* \rangle \{ \gamma_s \} - \langle \tau_s^* \rangle [G]^{-1} \{ \tau_s \} \right) dV \quad [18b]$$

$$\langle \sigma_s \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rangle ; \langle \tau_s \rangle = \langle \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle$$

W_{mf}^e et W_c^e sont les travaux virtuels internes, respectivement de membrane-flexion et de cisaillement transversal. Les matrices de comportement $[H]$ et $[G]$ sont définies, pour un matériau homogène et isotrope, par les relations suivantes :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [19]$$

(E : module d'Young, ν : coefficient de poisson) :

2.3.2. Approximation locale des contraintes (continuité C^1)

Le choix des fonctions de base pour l'approximation des contraintes est très important dans les formulations mixtes. Plusieurs considérations peuvent influencer ce choix. Par exemple pour le modèle NHMiSP4 avec 5 ddl par nœud :

– l'approximation des vecteurs $\{ \sigma_s \}$ et $\{ \tau_s \}$ doit contenir au moins cinq termes constants et trois termes de $\{ \sigma_s \}$ linéaires en z (état de contraintes pour une plaque en membrane-flexion/CT) ;

– les paramètres d'approximation $\langle \alpha_\sigma \rangle$ et $\langle \alpha_\tau \rangle$ doivent assurer un rang correct à la matrice de rigidité obtenue après leur élimination par condensation statique. Ils doivent donc vérifier la condition de stabilité (nécessaire et non suffisante) suivante : ($n(\alpha_\sigma)$ inclut les paramètres de membrane et de flexion) :

$$n(\alpha_\sigma) + n(\alpha_\tau) \geq n(u_n) - 6 ; n(u_n) = 20 \quad [20]$$

– le choix du nombre de paramètres α_σ et α_τ est tel que le modèle mixte final ne soit pas équivalent au modèle déplacement correspondant.

En conséquence, nous retenons les approximations suivantes :

2.3.2.1. Approximation suivant ζ

$$\{ \sigma_s \} = \{ \sigma_0 \} + \zeta \{ \sigma_1 \} \quad (\text{linéaire en } \zeta) \quad [21]$$

$$\{ \tau_s \} = (1 - \zeta^2) \{ \tau_0 \} \quad (\text{quadratique en } \zeta) \quad [22]$$

$\{\sigma_0\}, \{\sigma_1\}$ et $\{\tau_0\}$ sont fonction de ξ, η uniquement. L'approximation des contraintes de CT $\{\tau_s\}$ tient compte des conditions d'équilibre sur les faces supérieures et inférieures de la coque ($\{\tau_s\}=0$ pour $\zeta=\pm I$).

2.3.2.2. Approximation suivant ξ, η

Nous considérons les approximations suivantes pour $\{\sigma_0\}, \{\sigma_1\}$ et $\{\tau_0\}$:

$$\{\sigma_0\} = [P_0] \{\alpha_m\} ; \quad \{\sigma_1\} = [P_1] \{\alpha_f\} ; \quad \{\tau_0\} = [P_\tau] \{\alpha_f\} \quad [23a,b,c]$$

Nous commençons par définir une approximation bilinéaire pour les contraintes de flexion $\{\sigma_1\}$. Les contraintes de membrane $\{\sigma_0\}$ et de cisaillement transversal $\{\tau_0\}$ feront l'objet de formulations spéciales qui seront développées respectivement dans les sections 2.4 et 2.5. Des expressions particulières pour les matrices hybrides correspondantes $[P_0]$ et $[P_\tau]$ seront données avec 5 paramètres de membrane α_m et 12 paramètres de flexion α_f . Ainsi, nous écrivons pour la matrice d'approximation $[P_1]$,

$$[p_1] = \begin{bmatrix} \langle p \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle p \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle p \rangle \end{bmatrix} ; \quad \begin{matrix} \langle p \rangle = \langle 1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta \rangle \\ \langle \alpha_f \rangle = \langle \alpha_{f1} \dots \alpha_{f12} \rangle \end{matrix} \quad [24a,b]$$

Les formes intégrales W_{mf}^e et W_c^e s'écrivent, après intégration explicite suivant ζ :

$$W_{mf}^e = W_m^e + W_f^e \quad [25]$$

$$W_m^e = \int_{A^e} \left(\langle \varepsilon_0^* \rangle \{\sigma_0\} + \langle \sigma_0^* \rangle \{\varepsilon_0\} - \langle \sigma_0^* \rangle [H]^{-1} \{\sigma_0\} \right) h dA \quad [26]$$

$$W_f^e = \int_{A^e} \left(\langle \varepsilon_1^* \rangle \{\sigma_1\} + \langle \sigma_1^* \rangle \{\varepsilon_1\} - \langle \sigma_1^* \rangle [H]^{-1} \{\sigma_1\} \right) \frac{h}{3} dA \quad [27]$$

$$W_c^e = \int_{A^e} \left(\langle \gamma_0^* \rangle \frac{2h}{3} \{\tau_0\} + \frac{2h}{3} \langle \tau_0^* \rangle \{\gamma_0\} - \frac{8h}{15} \langle \tau_0^* \rangle [G]^{-1} \{\tau_0\} \right) dA \quad [28]$$

avec $dA = \det[F_0] d\xi d\eta = |\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2| d\xi d\eta$

2.3.2.3. Elimination des contraintes. Matrices de rigidité finales

L'expression finale du travail virtuel interne élémentaire W_{int}^e (rel. 17) s'écrit en considérant toutes les approximations des contraintes et des déformations :

$$W_{\text{int}}^e = \langle \langle \alpha_m^* \rangle \rangle \langle \alpha_f^* \rangle \langle u_n^* \rangle \rangle [k_{\text{mixte}}] \begin{Bmatrix} \{\alpha_m\} \\ \{\alpha_f\} \\ \{u_n\} \end{Bmatrix} \quad [29]$$

$$[k_{\text{mixte}}] = \begin{bmatrix} -[k_0] & [0] & [k_{0u}] \\ [0] & -[k_1] - [k_\tau] & [k_{1u}] + [k_{\tau u}] \\ [k_{0u}]^T & [k_{1u}]^T + [k_{\tau u}]^T & [0] \end{bmatrix} \quad [30]$$

$[k_{\text{mixte}}]$ est la matrice du modèle élémentaire mixte-hybride naturel NHMiSP, faisant intervenir les matrices mixtes suivantes, associées respectivement à la membrane (forme hybride naturelle) et à la flexion/CT (forme mixte-hybride) :

$$[k_0] = h \int_{A^e} [P_0]^T [H]^{-1} [P_0] dA \quad ; \quad [k_{0u}] = h \int_{A^e} [P_0]^T [B_0] dA \quad [31]$$

$$[k_1] = \frac{h}{3} \int_{A^e} [P_1]^T [H]^{-1} [P_1] dA \quad ; \quad [k_{1u}] = \frac{h}{3} \int_{A^e} [P_1]^T [B_1] dA \quad [32]$$

$$[k_\tau] = \frac{h^3}{30} \int_{A^e} [P_\tau]^T [G]^{-1} [P_\tau] dA \quad ; \quad [k_{\tau u}] = \frac{h^2}{6} \int_{A^e} [P_\tau]^T [B_c] dA \quad [33]$$

Pour garantir sa stabilité et sa précision, le modèle NHMiSP à 4 nœuds n'utilise pas de fonctions bulles. Celles-ci sont souvent d'ordre supérieur, donc très coûteuses. De simples fonctions linéaires ou bilinéaires sont utilisées pour définir les matrices $[P_0]$, $[P_1]$ ou $[P_\tau]$. Un schéma simple de Gauss à 2 points suivants ξ et η suffit pour intégrer exactement les matrices précédentes.

L'élimination successive des paramètres $\{\alpha_m\}$ et $\{\alpha_f\}$ au niveau élémentaire se traduit par :

$$\{\alpha_m\} = [k_0]^{-1} [k_{0u}] \{u_n\} \quad ; \quad \{\alpha_f\} = ([k_1] + [k_\tau])^{-1} ([k_{1u}] + [k_{\tau u}]) \{u_n\} \quad [34a,b]$$

$$\text{Ainsi, } W_{\text{int}}^e = \langle u_n^* \rangle [k^e] \{u_n\} \quad [35]$$

où $[k^e]$ est la matrice de rigidité finale de l'élément NHMiSP4, définie par la somme des matrices correspondantes de membrane et de flexion/CT :

$$[k^e] = [k_m] + [k_{fc}] \quad (\text{dimension } 20 \times 20) \quad [36]$$

$$[k_m] = [k_{0u}]^T [k_0]^{-1} [k_{0u}] \quad [37]$$

$$[k_{fc}] = ([k_{1u}]^T + [k_{\tau u}]^T) ([k_1] + [k_\tau])^{-1} ([k_{1u}] + [k_{\tau u}]) \quad [38]$$

REMARQUE. — Les matrices à inverser (relations 37 et 38) sont de dimensions 5×5 pour $[k_0]$ et 12×12 pour $[k_1] + [k_\tau]$.

Les relations [34] seront utilisées par la suite pour évaluer les contraintes $\{\sigma_s\}$ et $\{\tau_s\}$ au point ξ, η, ζ .

2.4. Approche hybride naturelle pour la membrane. Matrice $[p_0]$

2.4.1. Approche hybride naturelle pour la membrane

2.4.1.1. Approximation sans simplification des contraintes cartésiennes locales

Dans la plupart des éléments finis de coque de type ingénieurs (triangle à trois nœuds ou quadrilatère à 4 nœuds), la partie membrane est souvent développée sur la base de modèles classiques (déplacements ou mixtes). Pourtant, certains cas tests standard de coques, considérés comme de véritables outils de validation (Nafems, 1990), font apparaître une certaine faiblesse à reproduire des résultats numériques corrects et acceptables, surtout quand il s'agit de comportements complexes où les états de membrane et de flexion sont dominants. Parmi les raisons de cette constatation d'échec, on évoque une mauvaise approximation de la membrane en termes d'éléments finis, ce qui est d'ailleurs vrai. Pour améliorer le comportement de membrane, en particulier pour les coques, nous avons pour notre part proposé, dans nos travaux antérieurs, un concept *Fiber Rotations* ou Rotation de Fibre Plane (Ayad, 1993 ; Ayad *et al.*, 2002) que nous avons étendu au cas tridimensionnel et combiné à la forme variationnelle dégénérée en flexion/CT. D'autres concepts de rotation autour de la normale ont également été introduits pour le même objectif : l'amélioration de la membrane. Il s'agit du concept *Vertex Rotations* proposé par (Allman, 1984) ou de celui de *Drilling Rotations*, dû à (Bergan *et al.*, 1985). Les trois concepts méritent, bien évidemment, d'être améliorés, en raison de quelques faiblesses que l'on constate lorsqu'on applique aux éléments de coque correspondants des tests comme par exemple celui de l'hémisphère pincé (MacNeal *et al.*, 1985). Un blocage en membrane est souvent constaté pour des maillages grossiers limités en éléments.

Une autre manière de définir une contribution élémentaire à une meilleure représentation de la membrane, est celle imaginée par (Pian *et al.*, 1984) pour résoudre des problèmes plans. Pour un élément quadrilatéral plan à 4 nœuds, l'auteur se base sur une approximation à cinq paramètres du vecteur des contraintes contravariantes $\{\sigma_0^{ij}\}$ (relation 40). Cette approximation est définie en satisfaisant l'équilibre bidimensionnel dans ce même repère naturel, d'où l'appellation « hybride ». Les composantes cartésiennes du tenseur des contraintes de membrane sont définies par la suite en appliquant la formule de transformation matricielle suivante (valable dans le cas plan) :

$$[\sigma] = [J]^T [\sigma^{\xi\eta}] [J] \quad ; \quad [J] \text{ (matrice jacobienne évaluée en } \xi = \eta = 0) \quad [39]$$

L'auteur utilise enfin une formulation mixte classique pour construire une matrice de rigidité mixte, avec une condensation statique appliquée aux cinq paramètres d'approximation des contraintes.

Pour l'élément NHMiSP4, nous avons choisi de définir un modèle hybride avec une approximation à cinq paramètres, dans le repère naturel ou covariant de base $[F_0]$, des contraintes contravariantes de membrane $\{\sigma_0^{ij}\}$ (relation 40). Cette approximation satisfait également l'équilibre bidimensionnel dans ce même repère naturel, d'où l'appellation « hybride naturelle » pour ce nouveau modèle. Elle sera différente de celle de Pian, car les termes unité sont remplacés par des termes définis en fonction du carré des composantes de la matrice $[C_0]$ (relation 42). Ce choix a le principal avantage de réduire la sensibilité du modèle élément fini aux distorsions géométriques. Nous rappelons que l'élément hybride de Pian se comporte très bien sous sa forme rectangulaire, mais se dégrade sous une forme quadrilatérale distordue (on pourra consulter (Batoz *et al.*, 1990) pour plus de détails).

Nous commençons par définir la même approximation du vecteur $\{\sigma_0^{ij}\}$ que celle proposée par Pian, pour un élément quadrilatéral à 4 nœuds, c'est-à-dire :

$$\{\sigma_0^{ij}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_0^{\xi\xi} \\ \sigma_0^{\eta\eta} \\ \tau_0^{\xi\eta} \end{Bmatrix} = [A] \{\alpha_m\} ; \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \{\alpha_m\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad [40]$$

Les trois contraintes cartésiennes de membrane $\{\sigma_0\} = \langle \sigma_{x0} \ \sigma_{y0} \ \sigma_{xy0} \rangle^T$, intervenant dans la forme variationnelle W_m^e [26], seront définies en fonction des contraintes contravariantes $\{\sigma_0^{ij}\}$, moyennant une transformation matricielle basée sur la relation entre les composantes du tenseur cartésien local $[\sigma_i]$ et celles du tenseur contravariant $[\sigma^{ij}]$. Nous écrivons :

$$[\sigma_i] = [C_\zeta]^{-1} [\sigma^{ij}] [C_\zeta]^T ; \quad [C_\zeta] = [F_\zeta]^{-1} [Q] \quad [41]$$

Calculée au point p de la surface moyenne ($\zeta=0$), cette équation devient :

$$[\sigma_0] = [C_0]^{-1} [\sigma_0^{ij}] [C_0]^T ; \quad [C_0] = [F_0]^{-1} [Q] \quad [42]$$

pour laquelle le vecteur contraintes cartésiennes de membrane $\{\sigma_0\}$ prendra la forme suivante, après avoir effectué le produit matriciel [42], rapporté aux trois composantes du vecteur $\{\sigma_0\}$:

$$\{\sigma_0\} = [T_0] \{\sigma_0^{ij}\} \quad ; \quad [T_0] = \frac{1}{c_0^2} \begin{bmatrix} C_{22}^2 & C_{12}^2 & -2C_{22}C_{12} \\ C_{21}^2 & C_{11}^2 & -2C_{21}C_{11} \\ -C_{22}C_{21} & -C_{12}C_{11} & C_{22}C_{11} + C_{12}C_{21} \end{bmatrix} \quad [43]$$

$$c_0 = \frac{h}{2} \det[C_0] \quad ; \quad C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21} : \text{termes de la matrice } [C_0] \text{ (relation 42)}$$

L'expression finale du vecteur $\{\sigma_0\}$ s'écrit en fonction des paramètres $\{\alpha_m\}$:

$$\{\sigma_0\} = [P_0] \{\alpha_m\} \quad [44]$$

$$[P_0] = \frac{1}{c_0^2} \begin{bmatrix} C_{22}^2 & C_{12}^2 & -2C_{22}C_{12} & \eta C_{22}^2 & \xi C_{12}^2 \\ C_{21}^2 & C_{11}^2 & -2C_{21}C_{11} & \eta C_{21}^2 & \xi C_{11}^2 \\ -C_{22}C_{21} & -C_{12}C_{11} & C_{22}C_{11} + C_{12}C_{21} & -\eta C_{22}C_{21} & -\xi C_{12}C_{11} \end{bmatrix} \quad [45]$$

REMARQUE. — Les termes de la matrice $[P_0]$ sont définis en fonction des paramètres ξ, η . Nous maintenons ce choix pour formuler la matrice de rigidité de membrane du nouvel élément NHMiSP4. En effet, nous avons remarqué, à travers des exemples connus d'élasticité plane, que le fait de considérer les termes C_{ij} fonction de ξ, η permet de rendre l'élément moins sensible aux distorsions géométriques. Dans la section suivante, nous comparons, à travers le test de la poutre encastrée en flexion plane, les résultats de la partie membrane de l'élément NHMiSP4, obtenus en utilisant la matrice complète $[P_0]$ (relation 45), et ceux obtenus en considérant les expressions simplifiées suivantes de cette même matrice :

– NHMiSP4/a: la matrice $[P_0]$ (rel. 45) est définie avec les termes C_{ij} calculés en $\xi=\eta=0$;

– Q4PS (Pian *et al.*, 1984) : la matrice simplifiée $[P_0]$ est définie par :

$$[P_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a^2\eta & b^2\xi \\ 0 & 1 & 0 & c^2\eta & d^2\xi \\ 0 & 0 & 1 & ac\eta & bd\xi \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} 4a = x_{21} + x_{34} & ; & 4c = y_{21} + y_{34} \\ 4b = x_{31} + x_{41} & ; & 4d = y_{31} + y_{41} \\ x_{ij} = x_i - x_j & ; & y_{ij} = y_i - y_j \end{cases} \quad [46]$$

2.4.1.2. Validation du modèle de membrane sur une poutre plane en flexion

Il s'agit d'évaluer le déplacement vertical w_c à l'extrémité libre d'une poutre encastrée soumise à une charge verticale uniforme. Les données géométriques et matérielles, ainsi que les maillages éléments finis utilisés sont présentés sur la figure 3. Les résultats de la flèche w_c , obtenus par les trois modèles hybrides de membrane, sont reportés sur le tableau 1. A titre d'information, nous avons reporté sur ce même tableau les résultats de l'élément bilinéaire classique à 4 nœuds Q4.

Les résultats de la flèche au point C sont identiques pour des maillages uniformes (M1 à M3). Ce résultat est logique car les éléments sont de forme rectangulaire. Comme les termes complets de la matrice $[P_0]$ (rel. 45) permettent de mieux représenter les distorsions élémentaires, la solution approchée correspondante (modèle NHMiSP4) est nettement meilleure que celle des éléments NHMiSP4/a et Q4PS, pour lesquels la matrice $[P_0]$ d'approximation des contraintes a été simplifiée.

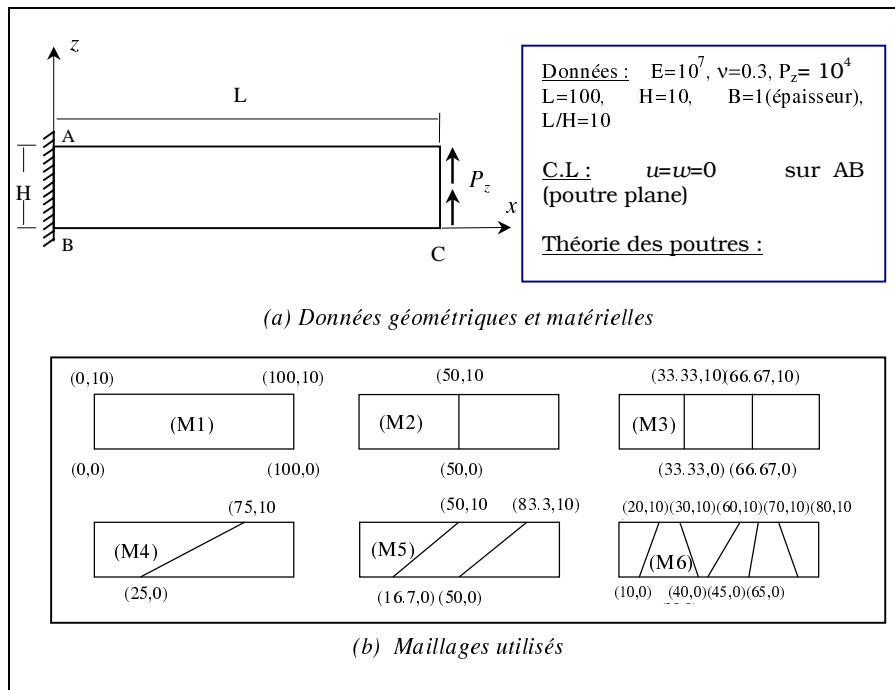


Figure 3. Poutre plane en flexion. Données et maillages

Maillage	Flèche en C . $w_{ref}=4.03$			
	NHMiSP4	NHMiSP4/a	Q4PS[PIA84]	Q4
M1	3.03	3.03	3.03	0.10
M2	3.78	3.78	3.78	0.38
M3	3.92	3.92	3.92	0.75
M4	1.27	0.49	0.49	0.12
M5	2.64	1.94	1.94	0.22
M6	2.50	1.32	1.32	0.71

Tableau 1. Résultats de la flèche au point C

2.5. Ecriture variationnelle mixte-hybride de la forme W_c^e

Dans cette section, nous proposons d'introduire des équations d'équilibre en contraintes dans l'expression de la forme variationnelle en CT W_c^e . L'objectif est d'exploiter les possibilités d'une formulation mixte-hybride en termes de précision sur les résultats numériques, ceci dans un contexte de formulation isoparamétrique courbe ou dégénérée. Nous aboutissons à l'équation importante suivante qui relie le vecteur des contraintes de cisaillement transversal $\{\tau_0\}$ à la divergence du tenseur des contraintes de flexion $[\sigma_1]$:

$$\{\tau_0\} = \frac{h}{4} \text{div}[\sigma_1] \quad \text{avec} \quad \text{div}[\sigma_1] = \begin{Bmatrix} \sigma_{x1,x} + \sigma_{xy1,y} \\ \sigma_{xy1,x} + \sigma_{y1,y} \end{Bmatrix} \quad [47]$$

Cette équation est obtenue à partir de deux des trois équations de l'équilibre tridimensionnelle en contraintes, définies respectivement selon les axes x et y par :

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} - f_x = 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \sigma_{yz,z} - f_y = 0 \end{cases} \quad [48]$$

f_x et f_y sont des forces de volume définies en fonction des variables (x, y) .

Une écriture des contraintes de CT σ_{xz} et σ_{yz} s'obtient en utilisant une intégration par parties, sachant que $\int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz = 0$ et que les contraintes σ_{xz} et σ_{yz} sont nulles aux interfaces ($z = \pm h/2$). Il en résulte que :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y} \end{Bmatrix} dz \quad [49]$$

σ_x, σ_y et σ_{xy} sont les composantes du vecteur $\{\sigma_s\}$ (rel. 21). σ_{xz} et σ_{yz} sont les composantes du vecteur $\{\tau_s\}$ (rel. 22).

En appliquant les approximations définies pour les vecteurs $\{\sigma_s\}$ et $\{\tau_s\}$ (relations 21 et 22), sachant que $dz = (h/2)d\zeta$, nous obtenons une expression du vecteur $\{\tau_0\}$ identique à celle de l'équation 47. La forme variationnelle W_c^e (rel. 18b) s'écrit en effet en fonction des déformations de CT $\{\gamma_0\}$ et de la dérivée des contraintes de flexion (rel. 47) :

$$W_c^e = \frac{h^2}{6} \int_{A^e} \left(\langle \gamma_0^* \rangle \{ \text{div}[\sigma_1] \} + \langle \text{div}[\sigma_1^*] \rangle \{ \gamma_0 \} - \frac{h}{5} \langle \text{div}[\sigma_1^*] \rangle [G]^{-1} \{ \text{div}[\sigma_1^*] \} \right) dA \quad [50]$$

La forme en flexion W_f^e restera identique à celle donnée par la relation 27.

La formulation matricielle de W_c^e nécessite la définition des vecteurs $\{div[\sigma_1]\}$ et $\langle div[\sigma_1^*] \rangle$. Les contraintes de CT sont définies en fonction des contraintes de flexion $\{\sigma_1\}$, c'est-à-dire des paramètres α_f . Il n'existe donc pas de paramètres de CT α_c indépendants de la flexion, comme c'est le cas par exemple des formulations mixtes classiques. Le nombre de paramètres à éliminer localement se trouve ainsi diminué. C'est l'une des originalités du modèle NHMiSP. Ainsi,

$$\{div[\sigma_1]\} = [P_\tau] \{\alpha_f\} \quad ; \quad \langle div[\sigma_1^*] \rangle = \langle \alpha_f^* \rangle [P_\tau]^T \quad [51]$$

$$[P_\tau] = \begin{bmatrix} \langle p_1 \rangle & 0 & \langle p_2 \rangle \\ 0 & \langle p_2 \rangle & \langle p_1 \rangle \end{bmatrix} \quad [52]$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle p_1 \rangle = \langle 0 \quad C_{11} \quad C_{21} \quad \eta C_{11} + \xi C_{21} \rangle \\ \langle p_2 \rangle = \langle 0 \quad C_{12} \quad C_{22} \quad \eta C_{12} + \xi C_{22} \rangle \end{array} \right\} \begin{array}{l} C_{ij} : \text{termes de la} \\ \text{matrice } [C_0] \end{array} \quad [53]$$

2.6. Contraintes et efforts résultants

2.6.1. Contraintes tridimensionnelles

Les contraintes dans le plan tangent $\{\sigma_s\}$ sont calculées en utilisant les relations [21], [23a,b], [24a], [34] et [45] :

$$\{\sigma_s\} = ([p_0] [k_0]^{-1} [k_{0u}] + \zeta [p_1] [A]^{-1} [B]) \{u_n\}; [A] = [k_1] + [k_\tau]; [B] = [k_{1u}] + [k_{\tau u}] \quad [54]$$

Les contraintes de cisaillement transversal τ_{xz} et τ_{yz} sont quadratiques suivant l'épaisseur, ce qui constitue un avantage par rapport aux modèles déplacements où elles sont généralement calculées soit par la loi de comportement en CT, soit en intégrant les équations d'équilibre tridimensionnelles. Dans notre cas, elles sont calculées en fonction de $\{u_n\}$ en utilisant [22], [23c], [34b] et [52] :

$$\{\tau_s\} = (1 - \zeta^2) \frac{h}{4} [p_\tau] [C]^{-1} [D] \{u_n\} \quad ; \quad [C] = [k_1] + [k_\tau] \quad ; \quad [D] = [k_{1u}] + [k_{\tau u}] \quad [55]$$

avec $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ pour $\zeta = \pm 1$

2.6.2. Efforts résultants

Les efforts résultants du modèle NHMiSP4 sont définis dans le repère cartésien local, de base $[Q]$, par :

Efforts de membrane : $\langle N \rangle = \langle N_x \quad N_y \quad N_{xy} \rangle$

$$\{N(\xi, \eta)\} = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \{\sigma_s\} d\xi = h \{\sigma_0(\xi, \eta)\} = h [P_0(\xi, \eta)] [k_0]^{-1} [k_{0u}] \{u_n\} \quad [56]$$

Moments de flexion : $\langle M \rangle = \langle M_x \quad M_y \quad M_{xy} \rangle$

$$\{M(\xi, \eta)\} = \frac{h^2}{6} \{\sigma_1(\xi, \eta)\} = \frac{h^2}{6} [P_1(\xi, \eta)] ([k_1] + [k_\tau])^{-1} ([k_{1u}] + [k_{\tau u}]) \{u_n\} \quad [57]$$

Efforts de CT : $\langle T \rangle = \langle T_x \quad T_y \rangle$

$$\{T(\xi, \eta)\} = \frac{2h}{3} \{\tau_0(\xi, \eta)\} = \frac{h^2}{6} [P_\tau(\xi, \eta)] ([k_1] + [k_\tau])^{-1} ([k_{1u}] + [k_{\tau u}]) \{u_n\} \quad [58]$$

2.7. Matrice de rigidité fictive

Le passage de 5 ddl à 6 ddl par nœud conduit à une singularité de la matrice de rigidité globale si tous les éléments connectés à un nœud sont coplanaires. Pour éviter cette difficulté numérique, nous introduisons une matrice fictive $[k_{\theta_z}]$ associée aux quatre rotations nodales fictives θ_{zj} . Nous avons adopté pour cela la technique proposée par (Batoz *et al.*, 1992). Elle est basée sur la discrétisation d'une forme intégrale $W_{\theta_z}^e$ fictive associée à l'opérateur Laplacien de θ_z pondérée par θ_z^* :

$$W_{\theta_z}^e = \int_{A^e} \alpha H_{f1} (\theta_{z,x}^* \theta_{z,x} + \theta_{z,y}^* \theta_{z,y}) J_0 d\xi d\eta \quad [59]$$

$$\theta_z = \sum_{i=1,4} N_i \theta_{zi} ; \begin{Bmatrix} \theta_{z,\xi} \\ \theta_{z,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \{\theta_{zn}\} = [N_{,\xi}] \{\theta_{zn}\} \quad [60]$$

$$\text{Sachant que } \begin{Bmatrix} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{Bmatrix} = [C_0] \begin{Bmatrix} \theta_{z,\xi} \\ \theta_{z,\eta} \end{Bmatrix} ; [C_0] \text{ (rel.42)}$$

En effectuant les mêmes développements sur les termes virtuels, nous obtenons :

$$W_{\theta_z}^e = \langle \theta_{zn}^* \rangle [k_{\theta_z}^e] \{\theta_{zn}\} \quad [61]$$

$$\text{avec } [k_{\theta_z}^e] = \alpha H_{f1} \int ([C_0] [N_{,\xi}]^T) ([C_0] [N_{,\xi}]) J_0 d\xi d\eta \quad [62]$$

H_{f1} est une valeur caractéristique de la matrice de comportement en flexion $[H_f]$ (par exemple $H_{f1} = Eh^3/12(1-\nu^2)$). α est un coefficient petit (10^4 dans la programmation effectuée) dépendant de la précision de l'ordinateur. En ajoutant

ainsi $[k_{\theta z}^e]$ à la matrice de rigidité $[k^e]$, nous évitons la singularité de la matrice globale $[K]$.

3. Résultats numériques

Dans cette partie, nous analyserons les performances de convergence et de précision du modèle NHMiSP4 à travers des cas tests standard de coque, considérés par les ingénieurs comme des outils importants de validation (Nafems, 1990). Ces tests ont pour but de vérifier la capacité d'un élément de coque à simuler des comportements complexes où les états de membrane ou de flexion sont dominants.

3.1. Cylindre pincé avec diaphragmes

Un des cas-tests populaires, jugé sévère pour les problèmes de coque, est celui d'un cylindre court ($L/R = 2$) ($R/h=100$) supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités et soumis à deux charges unitaires concentrées diamétralement opposées (figure 4). Ce test permet d'examiner l'aptitude d'un élément de coque à simuler des états de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne, notamment au niveau des zones sollicitées (point C). Par raison de symétrie, seul le huitième de la coque est étudié (portion ABCD). Les résultats des déplacements W_C et V_D en fonction du nombre N d'éléments suivant AB et BC (maillages réguliers $N=4$ à 15) sont reportés sur les figures 5 et 6. Une solution de référence basée sur une théorie de coques minces est donnée par (Flügge, 1960 ; Lindberg *et al.*, 1969) :

– déplacement W_C sous la charge : $\bar{W}_C = -W_C Eh/P = 164.24$

– déplacement V_D suivant Y : $\bar{V}_D = -V_D Eh/P = 4.11$

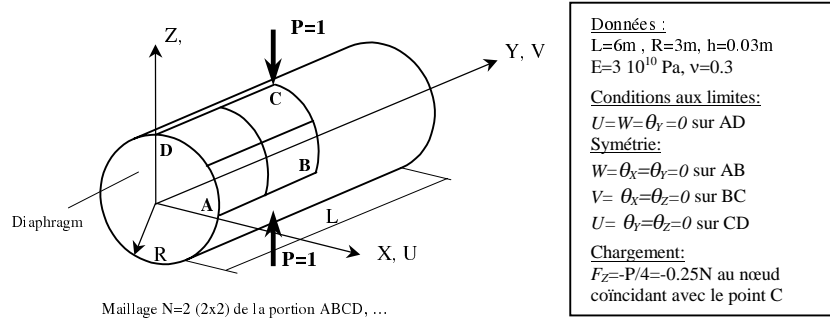


Figure 4. Cylindre pincé avec diaphragmes. Données

Convergence de W_C : une convergence monotone et rapide vers la solution de référence est obtenue par les éléments NHMiSP4. La solution approchée semble diverger pour le modèle NHMiSP4-mini après le maillage 8x8 pour atteindre la valeur de 184.22 avec un maillage à 15x15 éléments. Le modèle NHMiSP4-mini est obtenu avec un minimum de paramètres d'approximation des contraintes de flexion ($n(\alpha_j)=9$), nécessaire à la satisfaction de la condition de stabilité.

Ce nombre de paramètres assez limité peut être la cause de cette divergence. Un maillage à 20x20 donne toujours une solution $W_c=184.131$. La flexion étant dominante au voisinage du point C, une convergence assez lente est souvent observée au début pour beaucoup d'éléments de coque existants (cas des éléments MiSP4-Q4 (Ayad, 1993 ; Ayad *et al.*, 2002) et MITC4 (Bathe *et al.*, 1986) par exemple). Ce n'est évidemment pas le cas du modèle NHMiSP4, car les deux comportements en flexion et en membrane sont bien représentés, respectivement par la formulation mixte-hybride et la formulation hybride naturelle.

Convergence de V_D : l'élément NHMiSP4 converge rapidement vers la solution de référence.

Nous avons représenté sur la figure 7, pour le modèle NHMiSP4, les courbes de distribution de l'effort normal N_y , des moments de flexion M_x et M_{xy} , respectivement sur les bords BC, DC et AD. Ces efforts sont évalués aux nœuds. Un très bon encadrement de la solution de référence, donnée par (Lindberg *et al.*, 1969), est obtenu par l'élément NHMiSP4 qui est naturellement riche en termes d'approximation des contraintes.

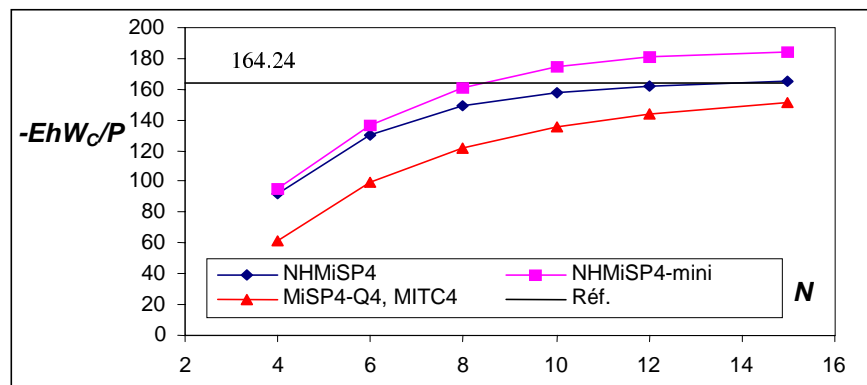


Figure 5. Cylindre pincé avec diaphragmes. Convergence de W_C

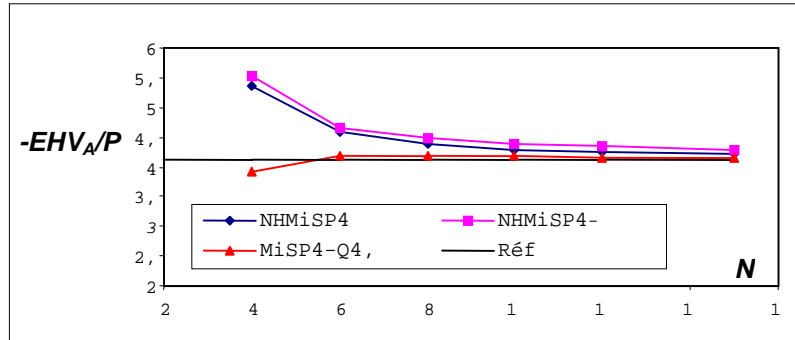


Figure 6. Cylindre pincé avec diaphragmes. Convergence de V_D

Ce problème a été proposé par (MacNeal *et al.*, 1985). Il s'agit d'une poutre vrillée ou d'une coque hélicoïdale encastree à une extrémité et soumise à deux cas de chargement concentré à l'autre extrémité : une charge P_Z dans le plan XZ et une autre P_Y dans le plan XY (figure 8). Ce test met en évidence le gauchissement de la coque. Il constitue ainsi un bon examen de validation d'éléments finis de coque tenant compte du gauchissement de la surface moyenne, en particulier l'élément quadrilatéral à 4 nœuds NHMiSP4 que nous proposons. Nous comparons les résultats des déplacements dans la direction de la charge à une solution exacte obtenue par (Batoz *et al.*, 1991) en utilisant un élément fini de poutre vrillée. Celui-ci est formulé en considérant un modèle variationnel mixte avec satisfaction des équations de l'équilibre interne. Les déplacements W et V au point A sont donnés pour deux épaisseurs différentes :

	épaisseur $h=0.32$ ($L/h=37.5$)	épaisseur $h=0.0032$ ($L/h=3750$)
chargement dans le plan XZ $P_Z=10^3, P_Y=0$	$W_A=5.424$	$W_A=5316$
chargement dans le plan XY $P_Y=10^3, P_Z=0$	$V_A=1.754$	$V_A=1296$

Nous avons analysé ce problème en considérant les maillages 2×12 (figure 8), 4×24 et 6×36 . Les résultats des éléments NHMiSP4 sont comparés à ceux des éléments MiSP4-Q4, MITC4 et DKT-CST (Batoz *et al.*, 1992). Les résultats pour les deux cas de charge sont reportés sur les tableaux 2 et 3 pour l'épaisseur $h=0.32$ et $h=0.0032$ respectivement.

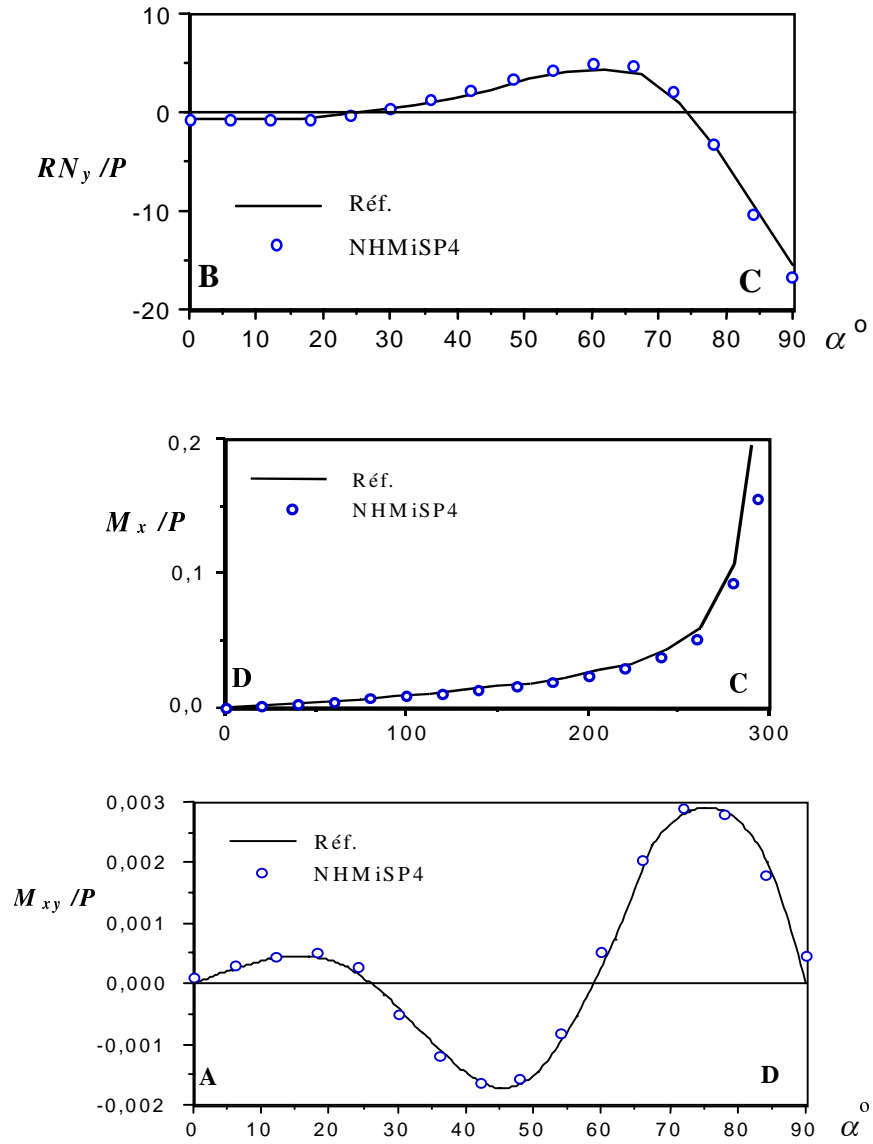


Figure 7. Cylindre pincé avec diaphragmes. Distribution des efforts résultants

3.2. Poutre vrillée sous charges concentrées

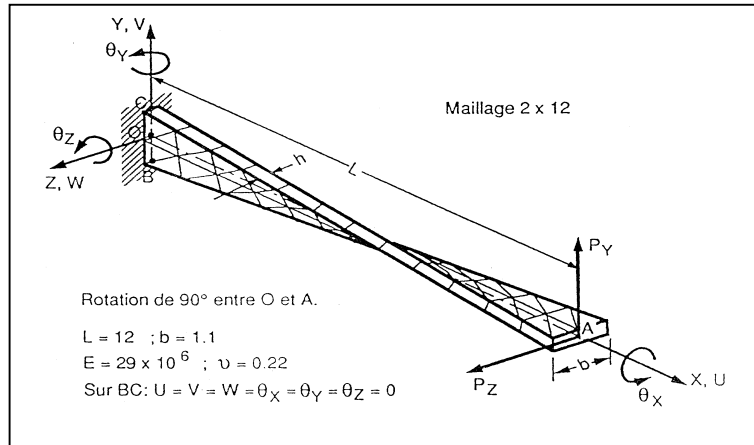


Figure 8. Poutre vrillée sous charges concentrées

a. Chargement dans le plan XZ : $P_Z = 10^3$, $P_Y = 0$

Maillage	NHMiSP4	NHMiSP4-mini	MiSP4-Q4	MITC4	DKT-CST
2x12	5.386	5.388	5.348	5.348	5.327
4x24	5.407	5.409	5.395	5.395	5.367
6x36	5.412	5.413	5.406	5.406	5.343
Référence	$W_A=5.424$				

b. Chargement dans le plan XY : $P_Y = 10^3$, $P_Z = 0$

Maillage	NHMiSP4	NHMiSP4-mini	MiSP4-Q4	MITC4	DKT-CST
2x12	1.731	1.736	1.607	1.607	1.465
4x24	1.746	1.747	1.708	1.708	1.621
6x36	1.749	1.750	1.731	1.731	1.682
Référence	$V_A=1.754$				

Tableau 2. Poutre vrillée. Résultat des déplacements en A pour $h=0.32$

a. Chargement dans le plan XZ : $P_z = 10^3$, $P_y = 0$

Maillage	NHMiSP4	NHMiSP4-mini	MiSP4-Q4	MITC4	DKT-CST
2x12	5183	5186	5127	5127	5268
4x24	5232	5233	5205	5204	5203
6x36	5244	5244	5227	5227	5258
Référence	$W_A=5316$				

b. Chargement dans le plan XY : $P_y = 10^3$, $P_z = 0$

Maillage	NHMiSP4	NHMiSP4-mini	MiSP4-Q4	MITC4	DKT-CST
2x12	1272	1276	1257	1256	1285
4x24	1288	1289	1283	1283	1282
6x36	1291	1291	1288	1288	1287
Référence	$V_A=1296$				

Tableau 3. Poutre vrillée. Résultat des déplacements en A pour $h=0.0032$

Pour $h=0.32$ (tableau 2), l'ensemble des éléments convergent de façon monotone vers la solution de référence pour les deux cas de charge. Dans le cas du chargement PY, les effets de membrane dominent ceux de flexion au voisinage de l'encastrement, c'est pour cette raison que les éléments NHMiSP4 (riches en membrane) donne de très bons résultats. La convergence des éléments MiSP4-Q4, MITC4 et DKT-CST est plus lente car la partie membrane, représentée par les éléments standard bilinéaire Q4 (pour les quadrilatères) et linéaire CST (pour le triangle DKT), n'est pas assez riche en approximation pour simuler des effets membranaires dominants.

Pour une coque très mince ($h=0.0032$, tableau 3), et pour les deux cas de charge, les résultats donnés par les éléments NHMiSP4 sont très satisfaisants, ceux des éléments MiSP4-Q4 et MITC4 convergent de façon monotone vers la solution de référence. Une petite divergence passagère est observée pour l'élément DKT-CST dans le cas du maillage 4x24, celui-ci reconverge à nouveau à partir de 6x36.

4. Conclusions

Un nouveau modèle élément fini de coques basé sur l'approche géométrique du solide tridimensionnel dégénéré est présenté : le modèle NHMiSP4 (*Natural Hybrid-Mixed with Shear Projection 4-node*). Il s'agit d'une approche mixte-hybride naturelle formulée sur la base du modèle classique de Hellinger-Reissner. Les principales originalités résident dans la manière de présenter les parties membrane, flexion et cisaillement transversal (CT). La *partie membrane* est une formulation hybride naturelle au sens de Pian avec une approximation dans le repère covariant du tenseur des contraintes contravariantes au point p de la surface moyenne. Le modèle de (Pian *et al.*, 1984) est amélioré par l'introduction d'une matrice d'approximation des contraintes de membrane plus riche. Le principal avantage est l'obtention d'une bonne précision sur les déplacements et sur les contraintes. La *partie flexion/CT* est une formulation mixte-hybride partielle, c'est à dire que les équations d'équilibre de flexion sont satisfaites si l'on se base sur une écriture des équations d'équilibre en fonction des efforts résultants ou des deux premières équations de l'équilibre tridimensionnel. On évite ainsi l'utilisation de fonctions bulle ou de la technique d'intégration réduite. Ce qui réduit de façon non négligeable le nombre de paramètres d'approximation des contraintes. Cette formulation permet également d'obtenir une bonne précision sur les déplacements et sur les contraintes. La partie flexion/CT utilise la méthode des déformations de substitution (*Assumed Natural Strain method*) pour définir le vecteur des déformations de CT. Cette méthode permet d'éliminer le verrouillage en CT sans avoir recours à l'intégration réduite.

L'extension du modèle NHMiSP4 pour l'analyse des plaques et coques composites est en cours de développement (Tafla, 2003). Une extension du modèle à l'analyse non linéaire des coques est prévue dans nos prochains développements. Le choix s'est porté pour un formalisme FLT (notre code étant implicite), avec une programmation par perturbation de la matrice tangente, évitant ainsi son implémentation complète.

5. Bibliographie

- Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C., « Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements », *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 2, 1970, p. 419-451.
- Allman D.J., « A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity », *Comput. and Structures*, 19, 1-8, 1984.
- Ayad R., *Éléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement*, Thèse de Doctorat, UTC Compiègne, Mars 1993.
- Ayad R., Dhatt G. et Batoz J.L., « A new hybrid-mixed variational approach for Reissner-Mindlin plates. The MiSP model », *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 42, 1998, p. 1149-1179.

- Ayad R., Batoz J.L., Dhatt G., « Formulation du modèle MiSP Coque Tridimensionnel Dégénéré », *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 11, n° 6, 2002, p. 719-747.
- Ayad R., Contribution à la modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non newtoniens, Application à des matériaux d'emballage, Mémoire d'Habilitation à diriger les recherches, Université de Reims Champagne-Ardenne, France, 2002.
- Bathe K.J., Dvorkin E.N., « A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components », *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 22, 1986, p. 697-722.
- Bathe K.J., *Finite element procedures*, Prentice-Hall, 1996.
- Batoz J.L., Bathe K.J., Ho L.W., « A study of three-node triangular plate bending elements », *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 15, 1980, p. 1771-1812.
- Batoz J.L. et Ben Tahar M., « Evaluation of a new thin plate quadrilateral element », *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 18, n° 11, 1982, p. 1655-1678.
- Batoz J.L., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1 : Solides élastiques*, Hermès Ed., Paris 1990.
- Batoz J.L., Triki S., Développement d'un élément fini de poutre vrillée, Rapport interne, UTC/LG2MS/MNM, octobre 1991.
- Batoz J.L., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Vol. 3: Coques, Eds Hermès, Paris 1992.
- Bergan P.G., Felippa C.A., « A triangular membrane element with rotational degrees of freedom », *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 50, 1985, p. 25-69.
- Boisse P., Daniel J.L., Gelin J.C., « A new class of three node and four node shell elements for the finite inelastic strain analysis. Applications in sheet metal forming », in *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Eds P. Ladevèze & O.C. Zienkiewicz, Elsevier, 1992.
- Chatelain J., Analyse non linéaire des coques minces isotropes et composites par éléments finis quadrilatéraux, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1987.
- Cofer W.F., Will K.M., « A three dimensional shell solid transition element for general nonlinear analysis », *Comput. Struct.*, vol. 38, n° 4, 1991, p. 449-462.
- Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., *Concepts and applications of finite element analysis*, 3^e Ed., J.Wiley, 1989.
- Crisfield M., *Finite elements and solution procedures for structural analysis*, vol. 1: *Linear analysis*, Pineridge press, 1986.
- Dhatt G.S., « An efficient triangular shell element », *AIAA jou.*, vol. 8, 1970, p. 2100-2102.
- Dvorkin E.N., Bathe K.J., « A continuum mechanics based four node shell element for general non-linear analysis », *Eng. Comput.*, vol. 1, 1984, p. 77-88.

- Fezans G., Analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques par éléments finis isoparamétriques tridimensionnels dégénérés, Thèse de Doctorat, ENSAE Toulouse, 1981.
- Flügge W., *Stresses in shells*, Springer Verla, 1960.
- Greene B.E., Strome R., Weikel R.C., « Application of the stiffness method to the analysis of shell structures », in *Proc. Aviation Conference of ASME*, Los Angeles, CA, March 1961.
- Hughes T.J., Liu W.K., « Nonlinear finite element analysis of shells: Part I: « Three dimensional shells », *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, 26, 1981, p. 331-362, Part II: « Two dimensional shells », *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, 27, 1981, p. 167-181.
- Hughes T., *The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis*, Dover Publishers, New York, 2000.
- Irons B., « The semi-loof shell elements », In *Finite Elements for Thin shells and Curved Members*, Eds. Ashwell *et al.*, J. Wiley, 1976, p. 197-222.
- Kerber T., « Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verrouillage et de leurs remèdes », *La Recherche Aérospatiale*, n° 3, 1990, p. 45-79.
- Lardeur P., Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transverse, Thèse de Doctorat, UTC, 1990.
- Lindberg G.M., Olson M.D., Cowper G.R., « New development in the finite element analysis of shells », *Q. Bull Div. Mech. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment*, National Research council of Canada, vol. 4, 1969.
- Mac Neal R., Harder R.L., « A proposed standart set of problems to test finite element accuracy », *Finite Element Analysis Design*, vol. 1, 1985, p. 3-20.
- Mackerle J., « Finite- and boundary-element linear and nonlinear analyses of shells and shell-like structures, A bibliography (1999–2001) », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 38, 2002, p. 765-782.
- Mau S.T., Pian T.H.H., Tong P., « Vibration analysis of laminated plates and shells by a hybrid stress element », *AIAA Jou.*, 11, 1973, p. 1450-1452.
- Mindlin R.D., « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates », *Jou. Appl. Meth.*, vol. 18, 1951, p. 31-38.
- Nafems, National Agency for Finite Element Methods and Standards, U.K. « The Standard NAFEMS Benchmarks » TNSB, Rev. 3, October 1990.
- Parisch H., « An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element », *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 31, 1991, p. 127-150.
- Pian T.H., Sumihara K., « Rational approach for assumed stress finite elements », *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 20, 1984, p. 1685-1695.
- Pol P., Modélisation du comportement élastoplastique de coques minces par éléments finis, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1992.

- Ramm E., Matzenmiller A., « Large deformation shell analysis based on the degeneration concept », in *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, vol. 1, Hughes, Hinton, Eds, 1986, p. 365-393.
- Rammerstofer F.G., « Composite and sandwich shells », *Lecture in Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements*, CISM Course, Udine, Italy, June 1991.
- Reissner E., « The effect of transverse shear deformation on the bending of plates », *Jou. App. Mech.* 12, A69-A77, 1945.
- Simo J.C., Fox D.D., Rifai M.S., « Geometrically exact stress resultant shell models: formulation and computational aspects of the nonlinear theory », in *Analytical and Computational Models of Shells*, (Noor, Belytschko and Simo Eds), CED-vol. 3, ASME, 1989, p. 161-190.
- Simo J.C., Fox D.D., Rifai M.S., « On stress resultant geometrically exact shell model - Part III: Computational aspects on the nonlinear theory », *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, vol. 79, 1990, p. 21-70.
- Stricklin J.A., Haisler W.E., Tisdale P.R., Gunderson R., « A rapidly converging triangular plate element », *AIAA Jou.*, vol. 7, n° 1, 1969, p. 180-181.
- Tafla A., *Eléments finis mixte-hybrides pour les structures en coques composites multicouches*, Thèse de doctorat (en cours), Université de Reims Champagne-Ardenne, 2003-2006.
- Vlachoutsis S., *Eléments finis tridimensionnels dégénérés de coques avec intégration explicite suivant l'épaisseur*, Thèse de Doctorat, ENSAE, Toulouse, 1987.
- Vlachoutsis S., « Explicit integration for three dimensional degenerated shell finite elements », *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, vol. 29, 1990, p. 861-880.
- Wilt T.E., Saleeb A.F., Chang T.Y., « A mixed element for laminated plates and shells », *Comput. Struct.*, vol. 37, 1990, p. 597-611.
- Yang H.T.Y., Saigal, Liaw, « Advances of thin shell finite elements and some applications - version 1 », *Comp. Struct.*, 35, 1990, p. 481-504.
- Yoshida Y., « A hybrid stress element for thin shell analysis », In *Proc. International Conference on Finite Element Method in Engineering*, Univ. of N.S.W., Australia, 1974, p. 271-284.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R., *The finite element method, Volume 2: Plates, shell, fluids and non-linear problems*, 4th Ed., Mc Graw-Hill, London 1991.

Annexe A. Vecteur des déformations de CT de substitution

Dans la plupart des modèles mixtes classiques, le verrouillage en CT provenait essentiellement de la définition numérique des déformations de CT $\{\gamma_0\}$. Ce problème numérique est la conséquence d'une approximation bilinéaire des

variables cinématiques (déplacements \bar{u}_p et rotations $\bar{\beta}$), utilisée pour évaluer les déformations de CT.

Certes, une intégration réduite de la matrice de rigidité correspondante contribue à l'élimination du verrouillage, mais avec pour conséquences l'apparition de modes parasites (faux mécanismes d'énergie nulle), et surtout une sensibilité des éléments finis aux distorsions géométriques. Pour éviter tous ces problèmes numériques, nous avons adopté, dans le cas du modèle NHMiSP4, la technique des déformations de CT de substitution (méthode ANS : *Assumed Natural Strain*) proposée par (Bathe *et al.*, 1986) et que nous avons, dans nos travaux antérieurs (Ayad, 1993 ; Ayad *et al.*, 2002), appliquée et validée avec succès sur le modèle MiSP4-coque.

$$\{Y_0\} = [C_0]^T \{Y_\zeta\} \quad [a1]$$

$$\text{avec } \{Y_\zeta\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi\xi} \\ \gamma_{\eta\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{n} \cdot \bar{u}_{p,\xi} + \bar{a}_1 \cdot \bar{\beta} \\ \bar{n} \cdot \bar{u}_{p,\eta} + \bar{a}_2 \cdot \bar{\beta} \end{Bmatrix} \quad [a2]$$

Les déformations naturelles ou covariantes $\{Y_\zeta\}$ sont définies dans un premier temps en fonction des déformations $\gamma_{\zeta k}$. Celles-ci sont calculées aux milieux des côtés de l'élément (figure a1) :

$$\{Y_\zeta\} = [A] \{Y_{\zeta k}\} ; [A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 \\ 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \quad [a3]$$

$$\langle \gamma_{\zeta k} \rangle = \langle \gamma_{\xi\xi}^A \quad \gamma_{\eta\xi}^B \quad \gamma_{\xi\xi}^C \quad \gamma_{\eta\xi}^D \rangle \quad [a4]$$

Les déformations naturelles de bord $\langle \gamma_{\zeta k} \rangle$ sont imposées comme constantes sur les côtés de l'élément. Il s'agit là d'une des subtilités de la méthode ANS, elle évite la linéarité de ses déformations sur les côtés qui, rappelons-le, est responsable du verrouillage en CT si une intégration exacte 2*2 PG est utilisée pour le calcul de l'énergie de CT. La méthode ANS consiste simplement à introduire une hypothèse dite de Mindlin sous forme discrète. Il s'agit d'une généralisation des éléments de coques minces sans CT utilisant l'approche connue sous le nom des hypothèses discrètes de Kirchhoff. Nous avons choisi de projeter $\langle \gamma_{\zeta k} \rangle$ sur les variables nodales en utilisant une technique de collocation par points. Ainsi, ses déformations naturelles et discrètes sont (voir figure a1) :

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\xi}^A \text{ (respec. } \gamma_{\xi\xi}^C) &= \bar{n} \cdot \bar{u}_{p,\xi} + \bar{a}_1 \cdot \bar{\beta} \text{ au point A (respec. C)} \\ \gamma_{\eta\xi}^D \text{ (respec. } \gamma_{\eta\xi}^B) &= \bar{n} \cdot \bar{u}_{p,\eta} + \bar{a}_2 \cdot \bar{\beta} \text{ au point D (respec. B)} \end{aligned} \quad [a5]$$

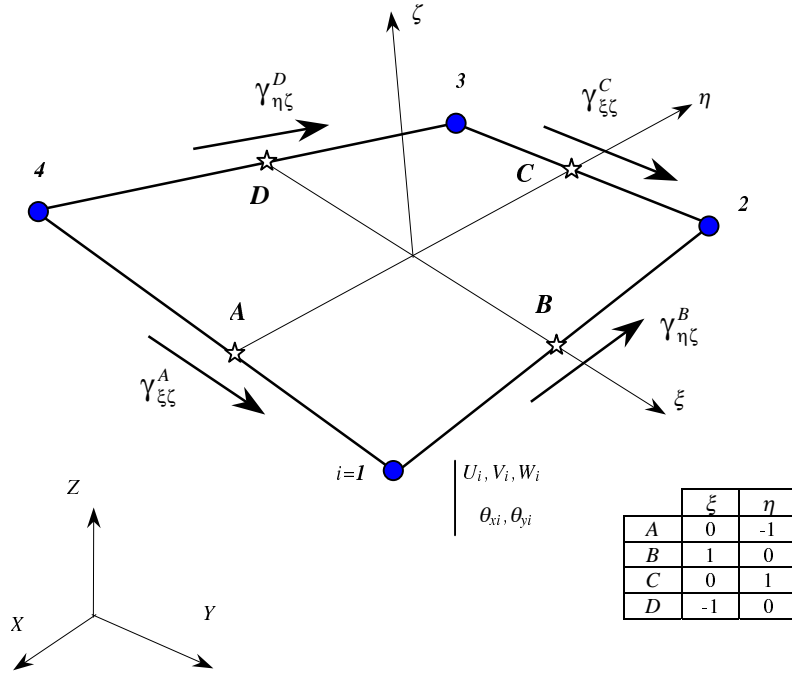


Figure a1. Déformations naturelles de CT projetées sur les côtés

Nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\xi\xi}^A &= \bar{n}^A \cdot \bar{u}_{p,\xi}^A - \bar{a}_1^A \cdot \bar{t}_2^A \theta_x^A + \bar{a}_1^A \cdot \bar{t}_1^A \theta_y^A \\
 \gamma_{\eta\xi}^B &= \bar{n}^B \cdot \bar{u}_{p,\eta}^B - \bar{a}_2^B \cdot \bar{t}_2^B \theta_x^B + \bar{a}_2^B \cdot \bar{t}_1^B \theta_y^B \\
 \gamma_{\xi\xi}^C &= \bar{n}^C \cdot \bar{u}_{p,\xi}^C - \bar{a}_1^C \cdot \bar{t}_2^C \theta_x^C + \bar{a}_1^C \cdot \bar{t}_1^C \theta_y^C \\
 \gamma_{\eta\xi}^D &= \bar{n}^D \cdot \bar{u}_{p,\eta}^D - \bar{a}_2^D \cdot \bar{t}_2^D \theta_x^D + \bar{a}_2^D \cdot \bar{t}_1^D \theta_y^D
 \end{aligned} \tag{a6}$$

\bar{n}^k ($k=A, B, C$ ou D) sont les normales aux points milieux des côtés A, B, C et D . Elles sont données par :

$$\bar{n}^k = \frac{\bar{n}^k}{|\bar{n}^k|} \quad ; \quad \bar{n}^k = \frac{1}{2}(\bar{n}_i + \bar{n}_j) \tag{a7}$$

$k(\xi, \eta)$	$A(0, -1)$	$B(1, 0)$	$C(0, 1)$	$D(-1, 0)$
$nœud\ i$	4	1	2	3
$nœud\ j$	1	2	3	4

Nous aboutissons à la représentation sous forme matricielle suivante du vecteur $\{Y_{c\zeta}\}$ (rel. a4) :

$$\{Y_{c\zeta}\} = [B_{c\zeta}] \{u_n\} \quad [a8]$$

$$[B_{c\zeta}] = \begin{bmatrix} -\langle \bar{n}^A \rangle & \langle -\bar{a}_1^A \bullet \bar{t}_2^{(1)} \rangle & \langle \bar{a}_1^A \bullet \bar{t}_1^{(1)} \rangle & \langle \bar{n}^A \rangle & \langle -\bar{a}_1^A \bullet \bar{t}_2^{(2)} \rangle & \langle \bar{a}_1^A \bullet \bar{t}_1^{(2)} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & -\langle \bar{n}^B \rangle & \langle -\bar{a}_2^B \bullet \bar{t}_2^{(2)} \rangle & \langle \bar{a}_2^B \bullet \bar{t}_1^{(2)} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\langle \bar{n}^D \rangle & \langle -\bar{a}_2^D \bullet \bar{t}_2^{(1)} \rangle & \langle \bar{a}_2^D \bullet \bar{t}_1^{(1)} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \bar{n}^B \rangle & \langle -\bar{a}_2^B \bullet \bar{t}_2^{(3)} \rangle & \langle \bar{a}_2^B \bullet \bar{t}_1^{(3)} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ \langle \bar{n}^C \rangle & \langle -\bar{a}_1^C \bullet \bar{t}_2^{(3)} \rangle & \langle \bar{a}_1^C \bullet \bar{t}_1^{(3)} \rangle & -\langle \bar{n}^C \rangle & \langle -\bar{a}_1^C \bullet \bar{t}_2^{(4)} \rangle & \langle \bar{a}_1^C \bullet \bar{t}_1^{(4)} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \langle \bar{n}^D \rangle & \langle -\bar{a}_2^D \bullet \bar{t}_2^{(4)} \rangle & \langle \bar{a}_2^D \bullet \bar{t}_1^{(4)} \rangle \end{bmatrix} \quad [a9]$$

L'expression finale du vecteur des déformations de CT $\{Y_0\}$ sera donc :

$$\{Y_0\} = [B_c] \{u_n\} \quad ; \quad [B_c] = [C_0]^T [A] [B_{c\zeta}] \quad [a10]$$

La matrice $[B_c]$, de dimension 2×20 , fait intervenir toutes les variables nodales.