
Modélisation de la variabilité verticale des vitesses dans un modèle hydrodynamique 2D horizontal

Yves Secretan* — Véronique Dubos*

*Institut National de la Recherche Scientifique
Eau, Terre et Environnement
490, de la Couronne
Québec (Québec) G1K 9A9
Canada
Yves_Secretan@ete.inrs.ca*

RÉSUMÉ. La validation par les vitesses d'un modèle hydrodynamique montre que la variabilité du profil vertical des vitesses a une influence importante sur le résultat. Ici, cette variabilité a été introduite sous la forme d'un terme de dispersion dans un modèle hydrodynamique qui résout les équations de Saint-Venant 2D par la méthode des éléments finis. Nous tentons ensuite de la représenter à l'aide des variables du modèle (u , v , h). Le modèle appliqué à un canal courbe de 270° montre que la variabilité spatiale de la distribution des vitesses est améliorée, que ce soit par la prise en compte de la variabilité mesurée ou par le paramétrage de celle-ci. Une application est effectuée sur la rivière des Escoumins, petit cours d'eau alluvionnaire à la topographie complexe. Les résultats montrent que la modification du modèle de Saint-Venant améliore la description de l'écoulement mais ne suffit pas à représenter correctement celui-ci.

ABSTRACT. Validation by the velocity of a hydrodynamic model shows that the variability of the vertical velocity profile has a strong influence on the results. Herein, this variability is introduced as a dispersion term into an existing hydrodynamic model solving the 2D Saint-Venant equations by the finite element method. In a second step, we try to represent it by means of the variables of the model (u , v , h). The model applied to a 270° curved flume shows that the spatial variability of the velocity distribution is improved in both cases, by taking into account the measured variability or by parametrizing it. An application is made on the Escoumins river, a small alluvial stream with complex topography. The results show that the modification of the Saint-Venant model improves the description of the flow but is not enough to represent it correctly.

MOTS-CLÉS : hydrodynamique numérique, équations de St-Venant, approximation verticale de la vitesse, modèle bidimensionnel.

KEYWORDS: numerical hydrodynamic, shallow-water equations, vertical velocity approximation, bidimensional model.

1. Introduction

Les modèles hydrodynamiques bidimensionnels horizontaux sont maintenant très largement utilisés lors de projets d'aménagements hydrauliques et environnementaux. Ils sont par contre souvent utilisés à la limite des hypothèses de validité du modèle mathématique qui les sous-tend. En effet, les équations de Saint-Venant ne peuvent être strictement appliquées que sous la condition que la profondeur de l'écoulement est faible par rapport à sa largeur, c'est-à-dire que les composantes verticales des vitesses et de l'accélération sont négligeables devant les composantes horizontales. Cela permet de poser l'hypothèse de la pression hydrostatique. De plus, on suppose que les vitesses sont uniformes sur la verticale. On sait cependant que dans des cas où l'écoulement est plus complexe, comme des écoulements rapidement variés, des écoulements à fortes courbures ou à fortes pentes, la pression n'est plus hydrostatique (Khan et Steffler, 1996) et la distribution verticale des vitesses est loin d'être uniforme (Khan et Steffler, 1996 ; Steffler et Jin, 1993 ; Whitting et Dietrich, 1991).

Plusieurs des modèles bidimensionnels décrits dans la littérature et appliqués à des écoulements complexes, montrent qu'il est important de prendre en compte la variabilité des vitesses sur la verticale. Si l'on ne suppose pas que le profil vertical est constant, l'information sur sa forme doit être prise en compte lors de l'intégration verticale sur la profondeur H des termes de convection :

$$\int_H \frac{(u - u_m)^2}{u_m^2} dz \quad [1]$$

Cette intégrale est appelée **terme de dispersion**. Elle représente le transfert d'énergie des remous et courants secondaires à l'écoulement principal, soit l'action inverse des contraintes de turbulence. Son importance augmente avec la courbure des lignes de courant (Flokstra, 1977). Dans l'écoulement dans une courbe, c'est ce terme qui participe au transfert de convection de l'intérieur de la courbe à l'extérieur (Kalkwijk et De Vriend, 1980 ; De Vriend et Geldof, 1983 ; Lien *et al.*, 1999). La déviation des vitesses le long du profil vertical par rapport à la vitesse moyenne représente l'effet des courants secondaires (Jin et Steffler, 1993 ; Lien *et al.*, 1999). Ces courants secondaires agissent également sur l'écoulement principal et les négliger mène à des erreurs sur la distribution de vitesses de l'écoulement (Kalkwijk et De Vriend, 1980).

En première approximation il est possible de remplacer le terme de dispersion [1] par une constante α_{ij} , qui vient pondérer les termes d'accélération convective :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q_i q_j}{H} (1 + \alpha_{ij}) \right)$$

Robert (1983) propose pour α_{ij} une valeur comprise entre 0,01 et 0,1. À partir de mesures, Bogle (1997) évalue la valeur moyenne du terme de dispersion à $0,035 \cdot H$, qu'il compare avec celle beaucoup plus forte trouvée par Fischer (1979), soit $0,2 \cdot H$. Dans le modèle décrit par Fread et Lewis (1998), la valeur utilisée est 0,06 lorsqu'elle ne peut être calculée explicitement. Cependant, aucun de ces auteurs ne présente de résultats sur les vitesses avec l'utilisation de ces coefficients.

Ponce et Yabusaki (1981) approximent les contraintes effectives globalement à l'aide du Laplacien des vitesses moyennes, sous la forme :

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \right) \text{ pour } i,j = 1,2 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \lambda \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$$

Malheureusement, ils comparent le même écoulement avec ou sans prise en compte du terme de contraintes effectives total. On ne peut donc pas établir l'influence des seules contraintes de dispersion dans l'équilibre des forces. Yeh *et al.* (1988) approximent aussi les contraintes effectives globalement, par un coefficient de frottement unique qui comprend également le terme de frottement au fond :

$$g \frac{u_i (u_j^2)^{1/2}}{C} \text{ pour } i,j = 1,2 \quad \text{et} \quad C = \text{coefficient de rugosité.}$$

Leurs résultats manquent de précision et ils suggèrent que la représentation complète des contraintes effectives apporterait une meilleure description des zones de recirculation.

C'est ce que proposent Li et Falconer (1995) qui conservent les trois composantes des contraintes effectives de façon explicite (viscosité cinématique, fermeture turbulente et contraintes de dispersion). Ils montrent que les contraintes de dispersion sont supérieures aux autres d'un ordre de grandeur. Elles sont calculées après simplification de la formule de Fischer *et al.* (1979) qui donne le coefficient de dispersion transversale de la quantité de mouvement :

$$K_t = 25 u^* H \left(uH / u^* R \right)$$

Ils obtiennent alors un modèle de la forme :

$$K_t = 3 u^* H$$

Flokstra (1977) est l'un des premiers à montrer l'importance de modéliser de façon adéquate les termes résultants de l'intégration verticale des termes de convection. Selon lui, les contraintes de dispersion et les contraintes de turbulence pourraient avoir des influences opposées dans la direction (xy) , puisque le signe des contraintes de dispersion n'est pas forcément constant, d'où l'importance de les modéliser séparément des contraintes de turbulence. Il calcule alors explicitement les contraintes de dispersion en fonction de la forme théorique des profils verticaux des vitesses longitudinales et latérales. Ces profils théoriques sont établis pour un écoulement hélicoïdal simplifié. L'auteur ne présente cependant aucun résultat de l'application de ses équations.

À partir des équations du mouvement, Kalkwijk et De Vriend (1980) paramétrisent les produits $V_{\text{long}}V_{\text{long}}$ et $V_{\text{long}}V_{\text{lat}}$ dans les termes de convection, en utilisant encore la forme théorique des profils des vitesses, établis pour une faible courbe. L'intégration verticale fait alors apparaître un terme dépendant du rayon de courbure et de l'échange transversal de mouvement par le courant secondaire. Les résultats obtenus sont assez bons, exceptés à la sortie de la courbe où les vitesses sont systématiquement surestimées près de la berge extérieure. L'auteur suggère trois raisons possibles à ces différences, soit premièrement le fait que la théorie sous-estime l'effet des courants secondaires, deuxièmement, que le modèle numérique est basé sur une ligne de caractéristique approximative et troisièmement que la pente latérale est trop abrupte, faisant que l'écoulement n'est plus déterminé par les caractéristiques locales de l'écoulement.

En utilisant les profils verticaux théoriques donnés par Rozovskii (1957) ainsi que le coefficient de dispersion donné par Fischer (1979), Yulistiyanto *et al.* (1998) calculent les contraintes dispersives et montrent que les résultats sont améliorés avec l'introduction de celles-ci dans leur modèle, pour l'application à un écoulement autour d'un cylindre. Enfin, Lien *et al.* (1999) calculent explicitement l'intégration des produits des différences entre les vitesses moyennes sur la verticale et les vitesses réelles en utilisant la forme théorique des profils verticaux donnés par De Vriend (1977). Puisque la forme théorique du profil vertical des vitesses transversales dépend du rayon de courbure, le résultat de l'intégrale de la différence entre les vitesses moyennes et réelles latérales dépend aussi du rayon de courbure. Leurs résultats sont très bons, qu'ils soient appliqués à des courbures faibles ou fortes. Ils montrent également que les contraintes dispersives sont anisotropes de façon importante, et ont un poids relatif différent dans les directions longitudinale et latérale, selon la courbure pour laquelle ils sont calculés.

Il est possible de prendre en compte les termes dispersifs de façon indirecte en modifiant le système d'équation de Saint-Venant. Après avoir intégré verticalement les équations du mouvement, Jin et Steffler (1993) ne font pas d'hypothèse sur le profil vertical des vitesses pour simplifier les termes dispersifs. Ils considèrent plutôt ces derniers comme des inconnus au problème et ils rajoutent deux équations issues des équations de conservation des moments (*moments of momentum*), intégrées verticalement. Ils obtiennent alors un système de cinq équations. Leurs

résultats, appliqués à un écoulement à forte courbure, sont bons. La même méthode des moments pour obtenir de nouvelles équations est utilisée par Khan et Steffler (1996). Ils font l'hypothèse que le profil vertical des vitesses et la distribution de la pression sont quadratiques, de paramètres inconnus. Leurs résultats sont bons mais ne sont validés qu'en niveau d'eau et pression, et non en vitesses.

Dans les modèles bidimensionnels, les contraintes dispersives sont souvent négligées, peut-être par trop de confiance en les hypothèses généralement posées ou parce qu'elles sont difficiles à quantifier (Ponce et Yabusaki, 1981 ; Molls et Chaudhry, 1995). Lorsque les modèles sont appliqués à des écoulements avec courants secondaires, on constate cependant que les contraintes dispersives ont une influence très importante sur la distribution des vitesses, ce qui ne peut être remarqué que par validation des vitesses. Des travaux précédents ont montré que la prise en compte des contraintes de dispersion pouvait améliorer la modélisation des vitesses. Cependant, les recherches effectuées jusqu'à présent ne s'appliquent qu'à des cas spécifiques, comme une courbe régulière (Lien *et al.*, 1999), et utilisent un profil de vitesse théorique (Lien *et al.*, 1999 ; Yulistiyanto *et al.*, 1997), ou présentent des modèles beaucoup plus complexes que le système de Saint-Venant (Jin et Steffler, 1993). Cet article présente une méthode simple afin de représenter dans un modèle bidimensionnel la variabilité du profil vertical des vitesses. Aucune complexité n'est rajoutée lors de la résolution des équations.

2. Formulation mathématique et modèle numérique

Le modèle aux éléments finis utilisé ici résout les équations de Saint-Venant bidimensionnelles horizontales sous forme conservative pour les inconnues h , le niveau d'eau et q , le débit spécifique (Heniche *et al.*, 2000). Il a déjà été appliqué à l'étude de nombreux cas réels avec succès (INRS-Eau, 1997 ; Leclerc *et al.*, 1998). Le modèle de turbulence utilisé est de type longueur de mélange. La délimitation de la ligne de rive est effectuée grâce à un élément « couvrant-découvrant » (Heniche *et al.*, 2002). L'opérateur de convection est stabilisé par une viscosité numérique isotrope contrôlée par le nombre de Peclet. Le modèle numérique est couplé à un logiciel graphique (Secretan *et al.*, 2000) qui permet la construction du modèle numérique de terrain, le pré et le post-traitement des différentes composantes éléments finis, le contrôle des simulations et la visualisation des résultats.

Le modèle peut être appliqué à un écoulement sous les hypothèses de validité suivantes :

- le fluide est incompressible ;
- la pente du fond n'est pas trop forte ;

– il n’y a pas de stratification verticale et la dimension verticale est faible par rapport aux dimensions horizontales ce qui permet une approximation par la pression hydrostatique ;

– les vitesses horizontales sont supposées uniformes sur la verticale.

Un bilan de l’équilibre des termes de l’équation du mouvement montre que les termes d’accélération convective font partie des termes dominants. Or, l’intégration verticale des termes d’accélération convective fait intervenir une hypothèse sur les profils de vitesse, généralement considérés comme verticaux uniformes. Il est donc important de s’assurer du bien fondé de cette hypothèse puisqu’il est établi que les profils verticaux sont rarement uniformes en milieu naturel (figure 1).

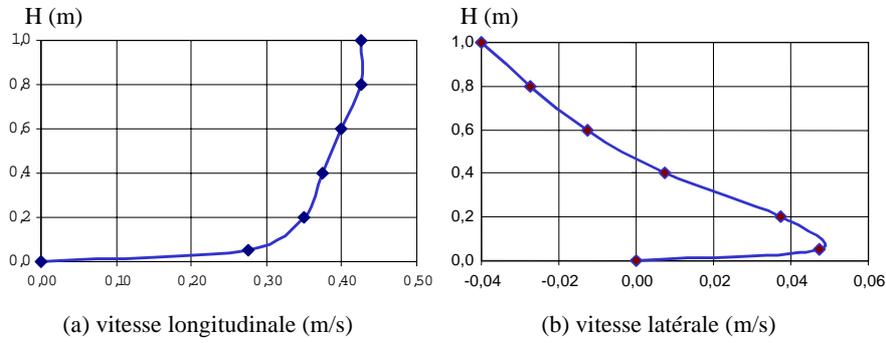


Figure 1. Profils verticaux typiques mesurés le long de la même verticale

Pour un profil vertical quelconque des vitesses, la vitesse moyenne sur la verticale dans la direction i est donnée par $u_{im} = \langle u_i u_j \rangle / H$, avec $\langle * \rangle = \int_{h_b}^h * dz$. Ainsi, le calcul du terme $\langle u_i u_j \rangle$ qui apparaît dans le terme de convection s’écrit analytiquement sous la forme :

$$\langle u_i u_j \rangle = H u_{im} u_{jm} (1 + \alpha_{ij})$$

ou encore sous la forme :

$$\langle u_i u_j \rangle = H u_{im} u_{jm} + \beta_{ij}$$

avec :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{H} \left\langle \frac{(u_i - u_{im})(u_j - u_{jm})}{u_{im} u_{jm}} \right\rangle$$

et :

$$\beta_{ij} = \langle (u_i - u_{im})(u_j - u_{jm}) \rangle$$

Sous la forme $(1 + \alpha_{ij})$, on appellera **coefficient de dispersion pondérateur de la convection**, et sous la forme β_{ij} on l'appellera **contrainte de dispersion**.

Il est généralement préférable d'utiliser $(1 + \alpha_{ij})$ comme coefficient de dispersion, pondérateur de la convection. En effet, ce terme agit directement sur chacun des termes d'accélération convective sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j (1 + \alpha_{ij}))$$

et permet alors une bonne prise en compte de l'anisotropie. Cependant, le calcul des termes α_{ij} nécessite une normalisation par la vitesse moyenne qui peut prendre de faibles valeurs, ce qui peut nuire à la convergence du modèle numérique. Dans ces cas-là, on utilisera plutôt β_{ij} comme contrainte de dispersion. Même si les deux formes sont théoriquement équivalentes, il est apparu lors de simulations réalisées pour le vérifier, que les termes β_{ij} ne permettent pas une aussi bonne prise en compte de l'anisotropie. Dans le modèle, ces termes sont en effet sommés en une seule contrainte de dispersion pour chaque équation du mouvement (Dubos 2001).

Ainsi, les équations du mouvement avec le coefficient de dispersion pondérateur de la convection $(1 + \alpha_{ij})$, deviennent dans le repère cartésien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x q_x}{H} (1 + \alpha_{xx}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_x q_y}{H} (1 + \alpha_{xy}) \right) &= F_c q_y + gH \frac{\partial h}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H \tau_{xy}}{\partial y} + \tau_x(h) - \tau_x(h_b) \\ \frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_y q_x}{H} (1 + \alpha_{xy}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_y q_y}{H} (1 + \alpha_{yy}) \right) &= -F_c q_x + gH \frac{\partial h}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H \tau_{yy}}{\partial y} + \tau_y(h) - \tau_y(h_b) \end{aligned}$$

où $F_c = 2 \omega \sin \phi$ représente la force de Coriolis ; $\tau_{ij}(h)$ représentent les contraintes sur la surface dues au vent qui ne sont pas utilisées dans la présente étude ; $\tau_{ij}(h_b)$ représentent les contraintes de frottement sur le fond qui sont calculées à l'aide de la formule de Chezy-Manning (Boudreau *et al.*, 1994) :

$$\tau_i(h_b) = \frac{\rho g n^2}{H^{1/3}} |V| V$$

où n représente le coefficient de frottement de Manning.

Les termes de contraintes τ_{ij} sont la somme des contraintes moléculaires et des contraintes turbulentes. Le modèle de turbulence utilisé est un modèle de type longueur de mélange appliqué à l'hypothèse de Boussinesq (Rodi, 1980) :

$$\frac{1}{\rho} \tau_{ij} = (v + v_t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_j}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q_i}{H} \right) \right)$$

avec :

$$v_t = \rho l_m^2 \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}$$

où l_m est une constante qui représente la longueur de mélange horizontale.

En pratique, les termes de dispersion doivent être reliés aux vitesses longitudinales et latérales. En effet, les profils dans ces deux directions sont très différents et ne sont pas guidés par les mêmes phénomènes hydrauliques. Comme exemple, la figure 1 montre deux profils verticaux mesurés sur le canal courbe de 270° étudié par Jin et Steffler (1993).

Les ordres de grandeur ou la modélisation des termes de dispersion seront donc différents dans les directions longitudinale et latérale. Le modèle utilisé étant développé en coordonnées cartésiennes pour une plus grande applicabilité, il faut transformer ces coefficients donnés dans le repère normal-tangent qui est local, au repère cartésien. L'angle de passage du repère cartésien au repère longitudinal-transverse est donné par $(\phi - \theta) = (Ox, V_{long})$ où les angles sont définis par $\phi = (Ox, V_{moy})$ et $\theta = (V_{long}, V_{moy})$. Ainsi, pour introduire les termes de dispersion dans le modèle, il suffit de connaître l'angle $(\phi - \theta)$ ainsi que les valeurs de $\alpha_{longlong}$, α_{latlat} , $\alpha_{longlat}$ en chaque point du domaine de simulation.

La matrice de transformation du repère normal-tangent au repère cartésien est :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\phi - \theta) & \sin(\phi - \theta) \\ -\sin(\phi - \theta) & \cos(\phi - \theta) \end{pmatrix}$$

et on obtient pour le changement de repère des tenseurs \mathfrak{T} des termes de dispersion :

$$\mathfrak{S}_{xOy} = R^T \cdot \mathfrak{S}_{long,lat} \cdot R$$

Le seul indicateur de direction en chaque point est le vecteur de la vitesse moyenne locale. L'angle ϕ est ainsi extrait d'une simulation 2D préliminaire. Il provient donc d'une vitesse moyenne sur la verticale qui a cependant une précision suffisante pour l'obtention de ϕ . On obtient alors l'angle ϕ en chaque point du domaine. Afin d'effectuer le changement de repère, il faut également connaître l'angle θ . Celui-ci est simplement déduit de la géométrie, à défaut de connaître les valeurs des vitesses longitudinale et latérale issues des mesures ADV (Acoustic Doppler Velocimetry).

3. Influence de la variabilité des profils verticaux des vitesses : application à un canal courbe

Le canal utilisé est décrit par Jin et Steffler (1993). Il est essentiellement constitué d'une courbe de 270° avec des segments droits d'amenée et de sortie. Il a section rectangulaire, avec un fond plat de 1,07 m de largeur et des parois lisses. La pente du lit est de 0,00083 m/m dans la direction longitudinale et est nulle dans la direction transversale. Le rayon de courbure au centre du canal est 3,66 m. La figure 2 donne la description du canal courbe utilisé.

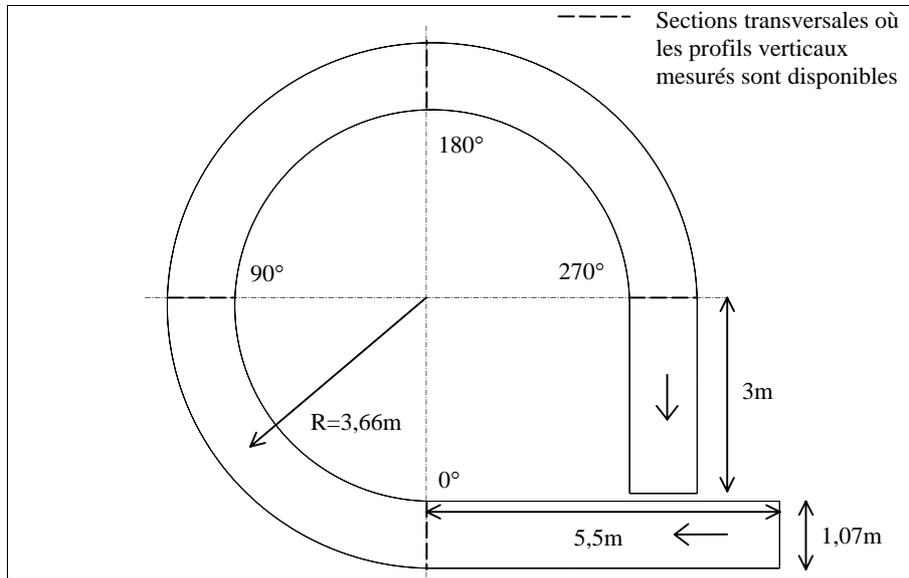


Figure 2. Canal courbe utilisé par Jin et Steffler

Nous avons choisi d'utiliser ce canal pour réaliser les simulations pour trois raisons :

- sa géométrie est simple ce qui permet de bien comprendre l'influence des termes rajoutés dans le modèle ;
- les profils verticaux mesurés des vitesses longitudinales et latérales sont disponibles le long de quatre sections transversales. Cela nous a permis d'introduire dans notre modèle la différence entre la vitesse moyenne sur la verticale et la vitesse réelle calculée explicitement ;
- les auteurs présentent sur ce canal un modèle bidimensionnel plus complexe que le modèle présenté ici qui prend en compte la variabilité verticale des vitesses. Nous pouvons ainsi comparer nos résultats avec les leurs.

Afin de comparer nos résultats avec ceux des auteurs, nous avons effectué la simulation ayant pour caractéristiques :

- une profondeur de 0,061 m dans la section rectangulaire à l'entrée du canal ;
- un débit moyen obtenu : 0,0240 m³/s ;
- un coefficient de frottement de Manning de $n = 0,011$;
- le coefficient de longueur de mélange est fixé à $l_m = 0,01$;
- les conditions aux limites suivantes : imposition du niveau de la surface libre à l'aval et du débit à l'amont, condition de glissement (imperméabilité) sur les parois latérales ($V_n = 0$).

Le maillage utilisé est un maillage de 2023 éléments triangulaire à 6 nœuds, de géométrie linéaire et d'approximation (P_1 , P_1 iso P_2), soit linéaire en niveau d'eau et linéaire par morceaux en vitesse. Il comporte 6 éléments transversaux et les nœuds le long de la courbe sont répartis à chaque degré. Il a été raffiné jusqu'à ce que la taille des éléments n'influence plus les résultats *via* la viscosité numérique. Avec des vitesses inférieures à 0,45 m/s, le nombre de Peclet observé est de l'ordre de 0,4.

3.1. Résultats sans introduction de la variabilité du profil des vitesses

La figure 3 montre les isolignes du module des vitesses en supposant que les profils verticaux sont constants. Les isolignes permettent une meilleure analyse des résultats que la représentation des vecteurs vitesse.

Les vitesses simulées ne présentent qu'une seule modification dans leur distribution. Celle-ci se produit vers 30°, où les vitesses les plus fortes passent de l'intérieur à l'extérieur de la courbe. À partir de 60°, la distribution reste uniforme et ne présente qu'une accélération à la sortie de la courbe. La répartition des vitesses ainsi obtenue ne correspond pas à la physique. Rozovskii (1957) ainsi que Ippen et Drinker (1962) qui ont étudié l'écoulement dans des courbes régulières, décrivent en effet une redistribution des vitesses maximales vers l'extérieur de la courbe.

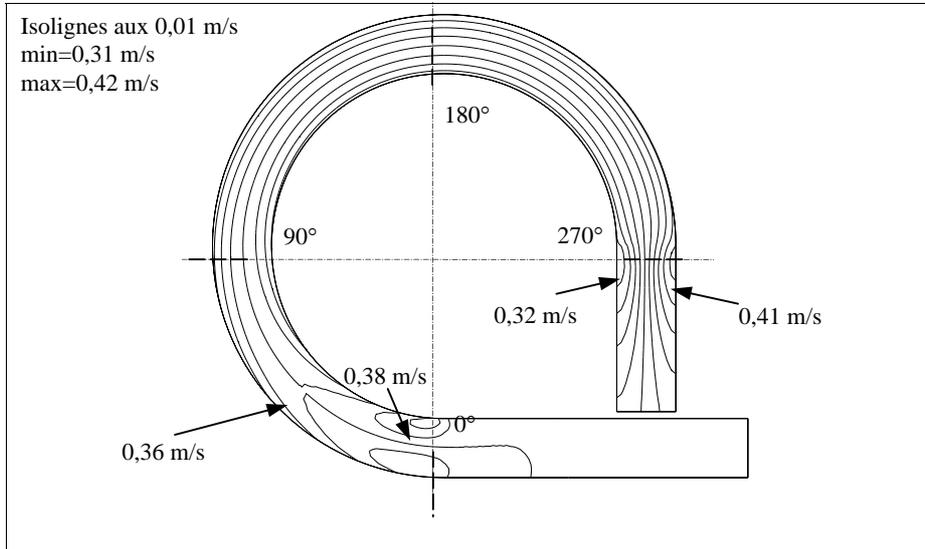


Figure 3. Module des vitesses avant introduction des termes de dispersion

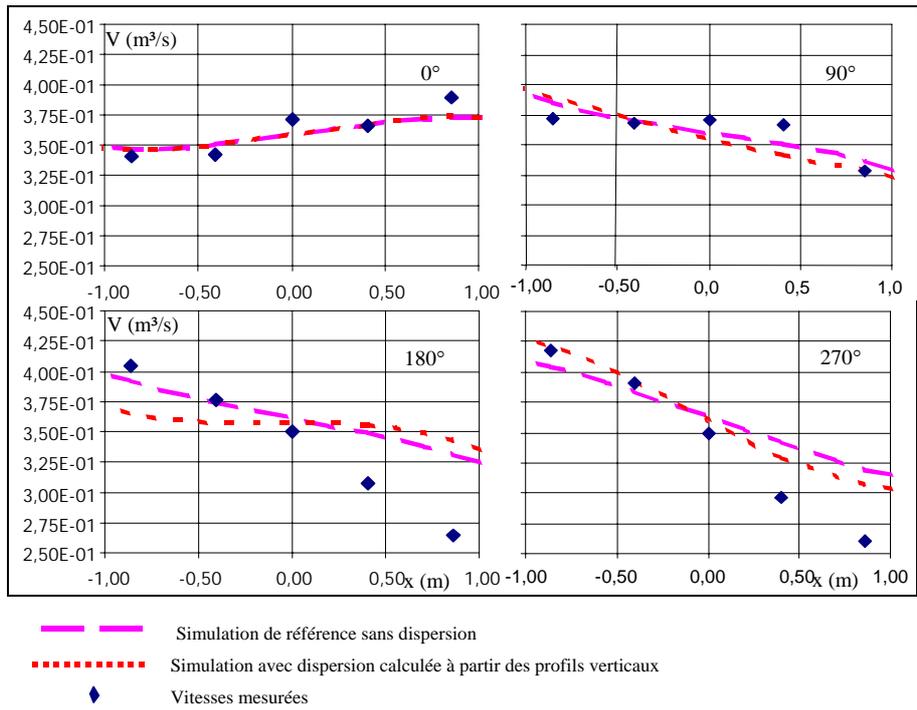


Figure 4. Vitesses longitudinales mesurées et simulées sur les sections transversales

Les comparaisons des résultats avec les mesures données par Jin et Steffler sur les quatre sections transversales 0° , 90° , 180° et 270° sont présentées à la figure 4. L'échelle utilisée sur les vitesses présente un agrandissement de l'erreur commise. On constate que les résultats sont bons à 0° et à 90° , ce qui correspond à l'entrée de la courbe où il y a encore peu de variabilité sur les vitesses. Par contre, les vitesses simulées manquent d'amplitude à 180° et 270° . D'une façon générale, nos résultats manquent beaucoup de variabilité spatiale. Ils semblent plutôt varier linéairement sur chaque section transversale, alors que la variation obtenue par Jin et Steffler semble plutôt quadratique.

3.2. Introduction de la variabilité des profils verticaux mesurés

Les profils verticaux mesurés ont été utilisés pour calculer analytiquement les coefficients de dispersion afin de vérifier l'influence de la prise en compte de leur variabilité sur l'écoulement. Les coefficients de dispersion calculés sur les quatre sections transversales 0° , 90° , 180° et 270° ainsi calculés ont été interpolés linéairement dans les directions longitudinales et transversales sur tout le domaine de simulation et introduits dans le modèle sous forme de contraintes de dispersion β_{ij} . En effet les vitesses latérales moyennes sont trop faibles pour permettre la convergence du modèle numérique si les termes sont utilisés sous la forme de pondérateurs de la convection α_{ij} . Comme le canal est régulier, on pose l'hypothèse que les vitesses longitudinales sont tangentes aux parois et les vitesses latérales sont normales à celles-ci. L'angle $(\Phi - \theta)$, nécessaire pour la transformation dans le repère cartésien, est donc géométriquement déterminé en tout point du canal.

La figure 5 présente le module de la vitesse obtenu. Une comparaison qualitative avec la figure 3 montre bien l'effet de redistribution des termes de dispersion. Le champ des vitesses comporte maintenant plusieurs zones d'inversion des maxima passant de l'intérieur de la courbe à l'extérieur de celle-ci et vice-versa. Ceci est vrai en particulier pour la zone située entre 90° et 160° où l'on retrouve deux maxima locaux par section transversale.

Cependant, les mesures n'étant disponibles que sur quatre sections transversales, nous ne pouvons pas comparer les résultats entre les sections. Ainsi, l'inversion locale des maximum simulée entre 110° et 160° passe inaperçue dans les vitesses mesurées si elle est présente. Dans la forme générale de l'écoulement, les vitesses simulées avec le terme de dispersion présentent bien la redistribution des vitesses maximales vers l'extérieur de la courbe, décrite dans la littérature. Les résultats obtenus sont dans la même gamme d'erreur que les auteurs, soit généralement très inférieure à 10 %, sauf sur la section à 180° où l'on atteint ponctuellement 19 %.

La plus grande variabilité dans la distribution des vitesses (figure 5) nous laisse penser que les contraintes de dispersion modélisent des transferts de convection qui n'apparaissent pas auparavant. Les résultats montrent donc une amélioration par

rapport aux résultats de référence qui utilisent l'hypothèse d'un profil vertical constant. Par rapport aux mesures (figure 4), ces améliorations ne sont visibles que sur la section transversale à 270°.

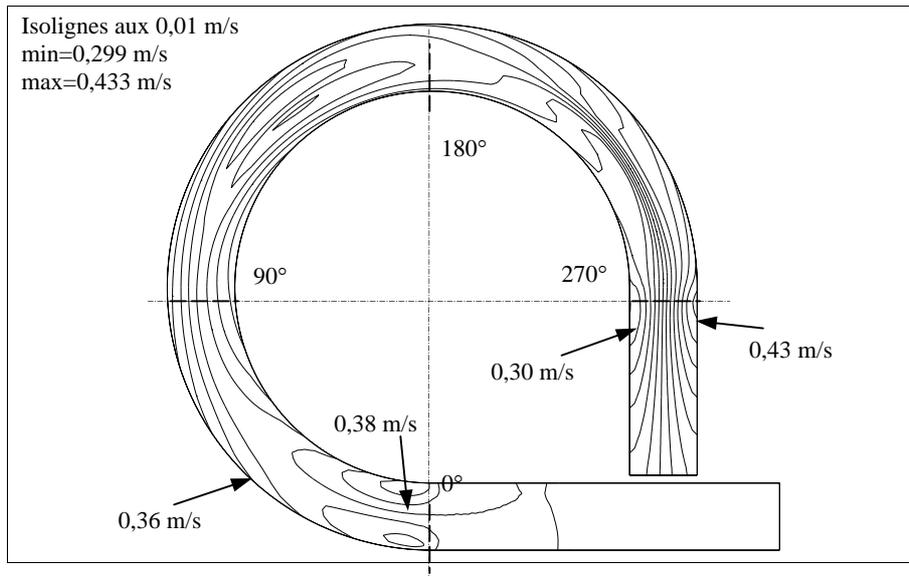


Figure 5. Module des vitesses après introduction des termes de dispersion

4. Modélisation de la variabilité des profils verticaux

La modélisation des termes de dispersion doit se faire de façon anisotrope puisque les mouvements longitudinaux et transversaux de l'écoulement ne sont pas régis par les mêmes phénomènes hydrauliques. Il faut donc caractériser les variables connues qui déterminent spécifiquement la variabilité verticale des écoulements longitudinal et latéral puis les introduire dans le modèle sous la forme d'un coefficient multiplicatif des termes d'accélération convective.

4.1. Paramétrisation du coefficient de dispersion longitudinal

Rappelons que le coefficient de dispersion longitudinal correspond à :

$$\alpha_{longlong} = \frac{1}{H} \int_H \frac{(V_{long} - V_{long_{moy}})^2}{V_{long_{moy}}^2} dz$$

L'écoulement longitudinal est déterminé par l'accélération longitudinale (De Vriend, 1977). Or, lorsque l'on regarde l'ordre de grandeur des termes des équations, on constate que l'équilibre avec l'accélération convective se fait avec la pente d'énergie et le frottement. Il paraît donc logique de supposer que ce sont également ces variables qui déterminent l'allure du profil vertical de l'écoulement longitudinal. De plus, par analogie au phénomène de turbulence qui perturbe temporairement la forme du profil, on peut supposer que la différence entre les vitesses réelles et la vitesse moyenne peut être représentée à l'aide d'un modèle semblable au modèle de viscosité turbulente de type de longueur de mélange, c'est-à-dire par une norme (ou semi-norme) du gradient des vitesses horizontales.

Les variables utilisées afin de tester la paramétrisation du terme de dispersion longitudinal sont donc :

– la pente de la surface libre (le nombre de Froude compris entre 0,38 et 0,55 nous indique que l'écoulement est gravitationnel, donc dirigé par la pente de la surface). Nous l'avons introduite à la fois sous forme générale :

$$\alpha_{longlong} = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}$$

et sous la forme directionnelle, dans la direction longitudinale :

$$\alpha_{longlong} = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial_{long}}\right)^2} \quad [2]$$

– la semi-norme du gradient des vitesses utilisée dans le modèle de longueur de mélange pour la viscosité turbulente :

$$\alpha_{longlong} = \lambda \frac{H}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sqrt{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \quad [3]$$

– la courbure locale de l'écoulement. Même si l'écoulement longitudinal n'est pas directement dirigé par la courbure locale, cette variable est utilisée dans la direction longitudinale à des fins de comparaison avec la direction transversale. Elle est calculée à l'aide de la formule (Baule, 1979) :

$$\frac{1}{r} = \frac{u^2 \frac{\partial v}{\partial x} + uv \frac{\partial v}{\partial y} - uv \frac{\partial u}{\partial x} - v^2 \frac{\partial u}{\partial y}}{(u^2 + v^2)^{3/2}}$$

que l'on utilise sous sa forme quadratique pour amplifier son effet :

$$\alpha_{longlong} = \lambda \frac{1}{r^2} H^2 \quad [4]$$

Les variables présentées ci-dessus sont adimensionnelles et un paramètre de calibration λ est utilisé pour contrôler les ordres de grandeur.

4.2. Paramétrisation du coefficient de dispersion latéral

Le coefficient de dispersion latéral correspond à :

$$\alpha_{latlat} = \frac{1}{H} \int_H \frac{(V_{lat} - V_{lat_{moy}})^2}{V_{lat_{moy}}^2} dz$$

Le courant latéral est produit par une variation des forces centrifuges lorsque l'écoulement passe d'une portion rectiligne à une courbe, et la vitesse latérale augmente avec la courbure (Ippen et Drinker, 1962 ; Engelung, 1974 ; De Vriend, 1977). Le profil théorique des vitesses latérales dépend donc de la courbure locale de l'écoulement (De Vriend, 1977). Sa variation pourrait alors être due également à la courbure locale de l'écoulement. De plus, nous considérerons également qu'un modèle semblable à un modèle de viscosité turbulente pourrait être approprié ici.

Les variables utilisées afin de paramétriser le terme de dispersion latéral sont les mêmes que celles utilisées pour représenter le terme longitudinal. Le terme de dispersion provenant des termes de convection croisés sera négligé par la suite car étant dépendant de la direction de l'écoulement transversal, il peut avoir une influence très négative sur l'écoulement s'il est mal modélisé.

4.3. Application au canal courbe

Une étude systématique (Dubos, 2001) de chacune des combinaisons possible a permis de dégager que les meilleures paramétrisations sont les combinaisons :

- 1) $\alpha_{longlong}$ = pente de la surface, forme générale (équation [2], $\lambda = 50$)
 α_{latlat} = courbure locale de l'écoulement (équation [4], $\lambda = 15\ 000$)
- 2) $\alpha_{longlong}$ = courbure locale de l'écoulement (équation [4], $\lambda = 6\ 000$)
 α_{latlat} = courbure locale de l'écoulement (équation [4], $\lambda = 15\ 000$).

Les distributions des vitesses obtenues pour ces deux combinaisons sont présentées aux figure 6 et figure 7.

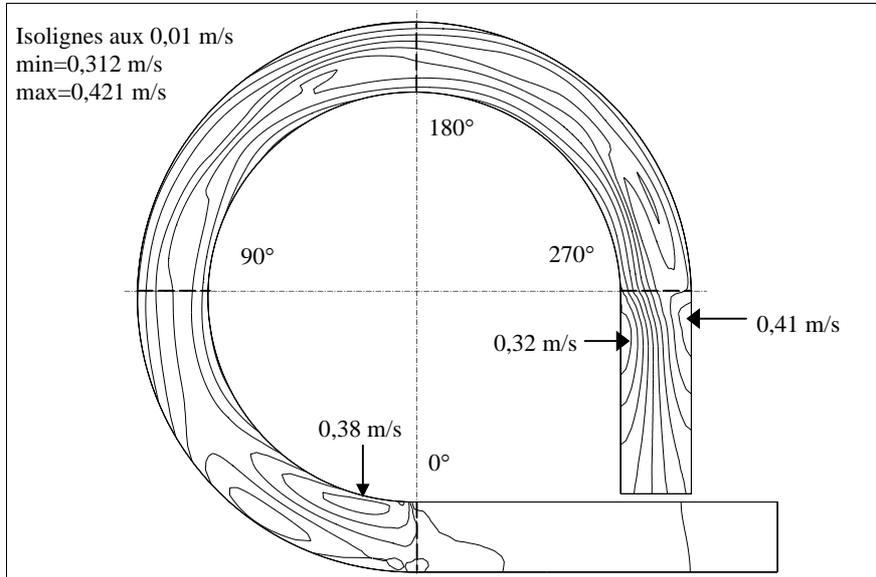


Figure 6. Modules des vitesses simulées avec la paramétrisation (1)

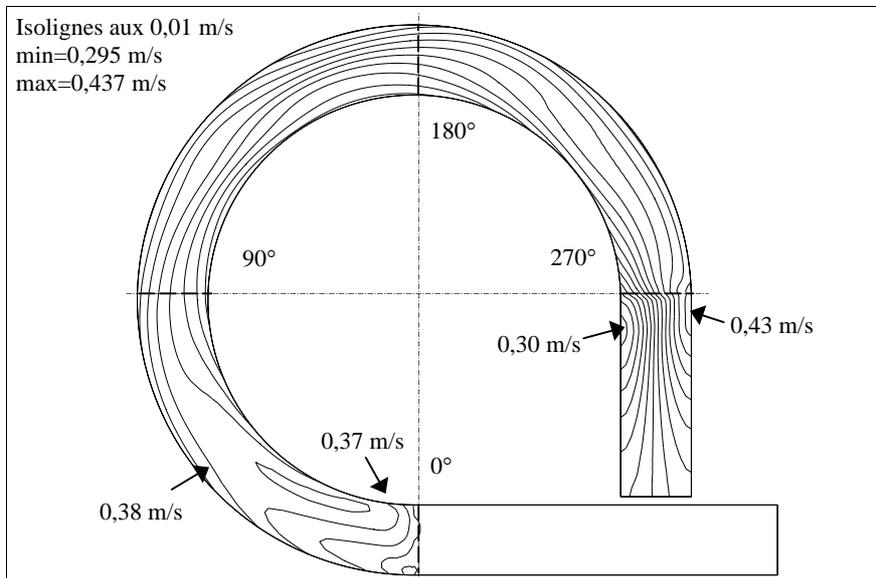


Figure 7. Modules des vitesses simulées avec la paramétrisation (2)

Elles présentent la meilleure amplitude ainsi qu'une redistribution plus marquée des vitesses maximales vers l'extérieur de la courbe. L'allure générale des vitesses comporte les mêmes zones de redistribution que **la simulation de référence avec dispersion** (voir figure 5). De 0° à 60° , les vitesses les plus faibles sont à l'extérieur de la courbe et la tendance s'inverse après 60° . Autour de 150° , les vitesses semblent présenter une légère amorce d'inversion de l'intérieur vers l'extérieur, surtout pour la combinaison (1). Ce phénomène est également apparu pour la simulation de référence avec dispersion. Après 180° , les vitesses maximales accélèrent à l'extérieur de la courbe, pour atteindre leur maximum en aval de la section à 270° .

L'erreur effectuée sur chaque section transversale entre les vitesses simulées et mesurées, ainsi qu'entre la variabilité transversale mesurée et simulée, est présentée aux figure 8 et figure 9. L'erreur sur les valeurs des vitesses est donnée par la somme des différences au carré entre les vitesses mesurées et les vitesses simulées. L'erreur sur la variabilité transversale a été calculée en faisant la somme des différences aux carrés entre la variabilité transversale des vitesses mesurées et des vitesses simulées, par section.

La paramétrisation du terme de dispersion n'a pas permis d'obtenir de meilleure approximation que les deux simulations de référence. Nous avons alors constaté que même si les vitesses obtenues ne semblent pas améliorées, la variabilité transversale est bien meilleure pour la combinaison (2) que pour les deux simulations de référence, comme le montre la figure 7. La paramétrisation par la courbure de l'écoulement a permis de mieux prendre en compte les transferts de convection.

Du point de vue de la valeur de l'erreur, les deux combinaisons de paramètres testés (1) et (2) donnent des résultats acceptables, tant au niveau de l'allure de la distribution des vitesses, qu'au niveau de la comparaison avec les mesures.

Cependant, la comparaison effectuée sur les quatre sections transversales peut ne pas suffire à être représentative de la variabilité de l'écoulement réel. Par exemple, il pourrait y avoir un décalage vers l'aval des vitesses obtenues par rapport aux mesures qui n'apparaîtrait pas et qui donnerait des erreurs en valeur des vitesses sur les sections transversales, bien que l'allure générale pourrait être bonne. C'est pourquoi la comparaison qualitative de l'allure de la distribution des vitesses obtenue avec les résultats des auteurs reste importante et nous permet de conclure à une amélioration générale des résultats.

On peut s'interroger sur le choix de la paramétrisation (2), car la dispersion longitudinale serait alors déterminée par la courbure, ce qui ne paraît pas logique. On peut supposer que le cas du canal courbe est particulier puisque la courbure est importante et l'écoulement est complètement déterminé par celle-ci.

Ce résultat reste à vérifier sur un cas réel plus complexe afin d'évaluer l'amélioration apportée par l'introduction des coefficients de dispersion sur un cas qui provient de la pratique.

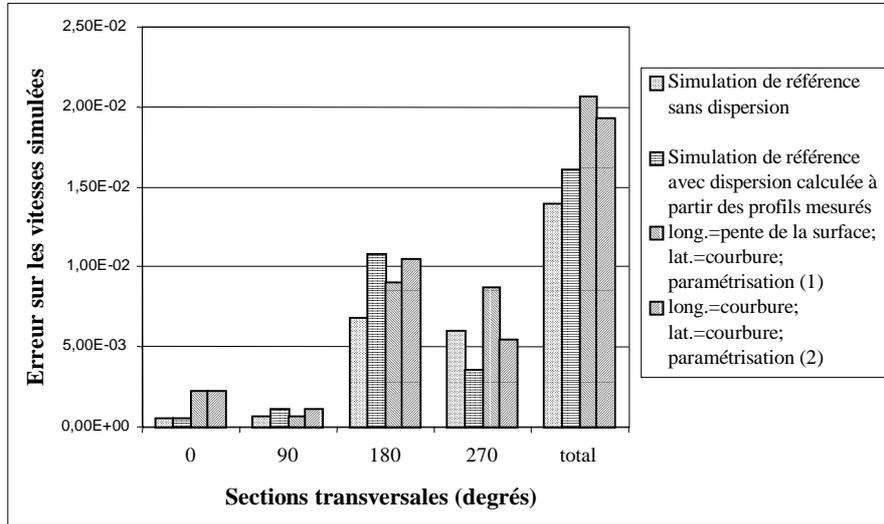


Figure 8. Comparaison de l'erreur entre les vitesses mesurées et simulées, pour les quatre sections transversales

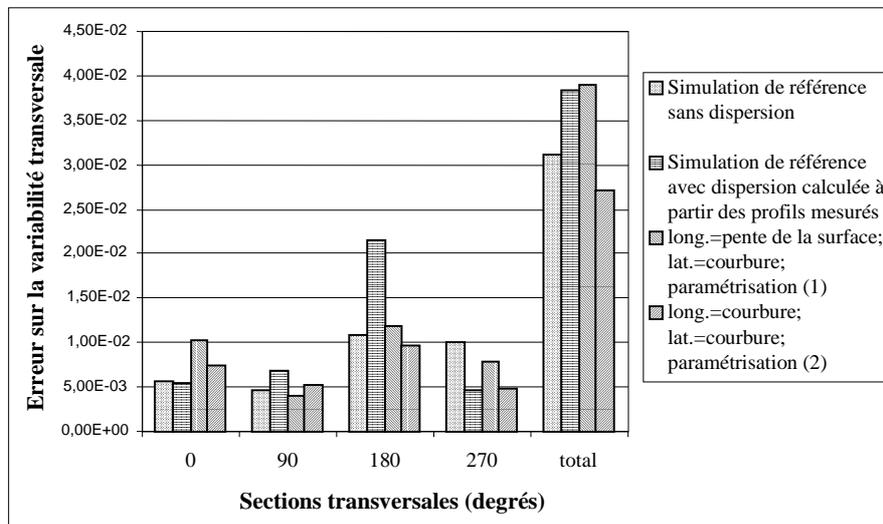


Figure 9. Comparaison de l'erreur entre la variabilité des vitesses mesurées et simulées, pour les quatre sections transversales

4.4. Application à la rivière des Escoumins

Le domaine d'étude est une section de méandre de la rivière des Escoumins (Québec, Canada), de 120 m de longueur et 35 m de largeur (figure 10). Lors de plusieurs campagnes de terrain, la topographie, le substrat du lit et des berges, les vitesses et les niveaux d'eau ont été mesurés de façon précise pour plusieurs débits contrôlés en amont et allant de $7,4 \text{ m}^3/\text{s}$ à $25 \text{ m}^3/\text{s}$, le débit d'étiage étant d'environ $1 \text{ m}^3/\text{s}$. Près de 800 points de mesures de topographie ont été prélevés sur le tronçon. Pour le débit de $9,75 \text{ m}^3/\text{s}$ étudié ici, les profils des vitesses ont été mesurés sur 47 points. Chaque profil, mesuré en plusieurs répliqués, comporte de 4 à 10 points de mesure selon la profondeur. De plus, 37 mesures de vitesses, réparties sur le domaine, ont été prises par ADV (*Acoustic Doppler Velocimetry*), dans les trois directions (x , y , z), à 20 et 30 cm de profondeur.

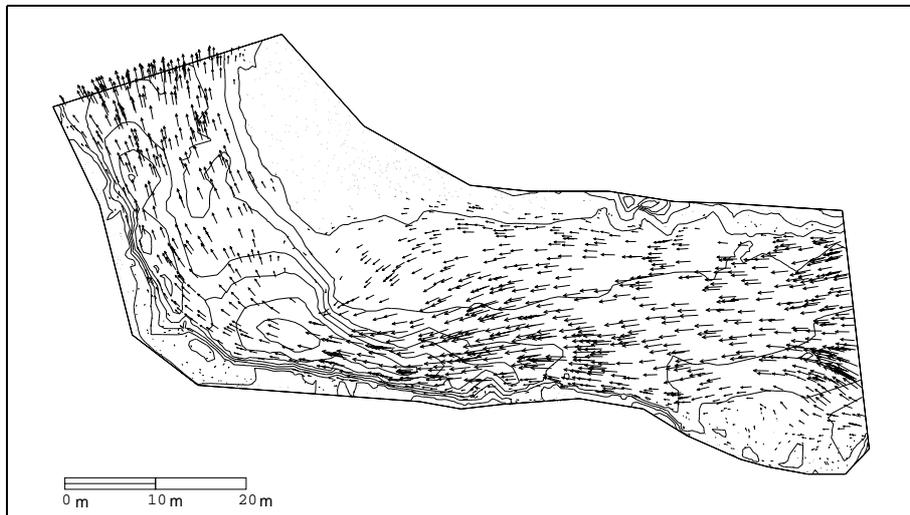


Figure 10. Rivière des Escoumins : topographie et vecteurs vitesse

Étant donnée la complexité de la topographie par rapport aux dimensions horizontales du domaine, on est en droit de se demander si le modèle bidimensionnel est capable de représenter l'écoulement adéquatement.

L'hypothèse de la pression hydrostatique, très généralement admise dans la littérature, semble valide ici car la pente générale est faible ($< 0,35 \%$) et les mesures ADV disponibles montrent que la vitesse verticale est très faible devant la vitesse horizontale ($\sim 1 \%$). Les mesures des profils verticaux des vitesses nous indiquent qu'ils sont loin d'être constants, contrairement à l'hypothèse considérée dans la formulation des équations. La figure 11 illustre trois exemples de profils

verticaux de vitesse mesurés. La profondeur correspondant à la vitesse mesurée est notée z et les profils sont normalisés.

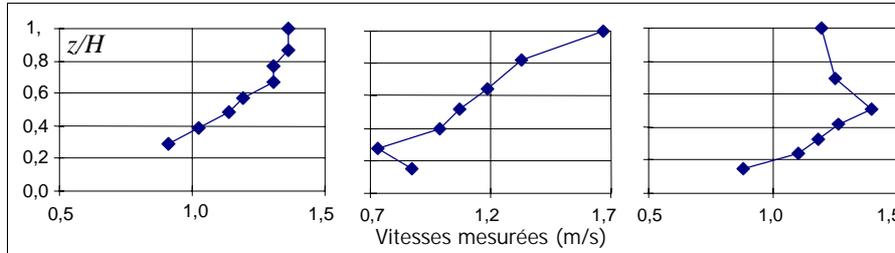


Figure 11. Profils verticaux de vitesse sur la rivière des Escoumins

L'introduction des coefficients de dispersion dans le modèle se fait selon la méthode présentée dans la section 2. Pour cela, il est nécessaire de connaître les coefficients α_{ij} dans le repère longitudinal-transverse, ainsi que les angles $\phi = (Ox, V_{sim})$ et $\theta = (V_{long}, V_{sim})$. D'une première simulation sans coefficient de convection, on obtient les vitesses simulées desquelles on calcule l'angle ϕ qui sera utilisé dans les simulations subséquentes. On considère que les variations de ϕ restent faibles par rapport aux incertitudes introduites par l'approximation de l'angle θ . En effet, seules les mesures ADV nous donnent la direction longitudinale de l'écoulement.

Comme dans le canal courbe, seuls les coefficients anisotropes $\alpha_{longlong}$ et α_{latlat} ont été paramétrisés. Les combinaisons retenues (Dubos, 2001) sont les suivantes :

- 1) $\alpha_{longlong}$ = pente de la surface (équation [2], $\lambda = 10$)
 α_{latlat} = courbure locale de l'écoulement (équation [4], $\lambda = 10$)
- 2) $\alpha_{longlong}$ = semi-norme du gradient des vitesses (équation [3], $\lambda = 1$)
 α_{latlat} = courbure locale de l'écoulement (équation [4], $\lambda = 10$)
- 3) $\alpha_{longlong}$ = courbure locale de l'écoulement (équation [4], $\lambda = 10$)
 α_{latlat} = courbure locale de l'écoulement (équation [4], $\lambda = 10$)

De plus, à titre de comparaison, nous ajoutons le meilleur résultat obtenu avec une paramétrisation isotrope :

- 4) $\alpha_{longlong} = 0,1$
 $\alpha_{latlat} = 0,1$

La pente de la surface utilisée sur la rivière est la pente locale.

Les simulations ont toutes été effectuées avec des conditions limites de type niveau de la surface libre, tant à l'amont et à l'aval. Latéralement, c'est l'élément « couvrant-découvrant » qui détermine dynamiquement la position de la berge. Le coefficient de longueur de mélange fixé à $l_m = 0,01$.

Les résultats pour les quatre combinaisons testées sont regroupés au tableau 1. Toutes les combinaisons ont apporté une amélioration dans les résultats, même minime, la meilleure s'est produite après l'introduction de la combinaison (2). L'amélioration, très faible, se situe au niveau du haut-fond : les vitesses sont très légèrement moins surestimées au-dessus de celui-ci et parallèlement légèrement moins sous-estimées juste en aval du haut-fond, au-dessus de la mouille.

Simulations effectuées et ombinaisons de paramètres utilisés	Erreur moyenne	r^2
Simulation de référence : $\alpha_{longlong} = \alpha_{latlat} = 0$ Q = 10,06m ³ /s	0,0247	0,8429
$\alpha_{longlong}$ = pente ; α_{latlat} = courbure ; Q = 9,87m ³ /s	0,0246	0,8341
$\alpha_{longlong}$ = semi-norme ; α_{latlat} = courbure ; Q = 9,98m ³ /s	0,0238	0,8353
$\alpha_{longlong}$ = courbure ; α_{latlat} = courbure ; Q = 10,05m ³ /s	0,0243	0,8482
$\alpha_{longlong} = 0,1$; $\alpha_{latlat} = 0,1$; Q = 9,87m ³ /s	0,0238	0,8521

Tableau 1. Synthèse des combinaisons vérifiées et des résultats obtenus

On constate que la combinaison des paramètres qui a amélioré l'écoulement sur la rivière des Escoumins n'est pas la même que celle qui a été choisie sur le canal courbe. En effet, la paramétrisation du terme longitudinal est meilleure avec la courbure de l'écoulement sur le canal courbe, alors qu'elle est meilleure avec la semi-norme du gradient des vitesses sur la rivière. Le terme latéral reste mieux représenté par la courbure de l'écoulement dans les deux cas.

A notre avis, cette différence dans la paramétrisation longitudinale provient du fait que dans le canal courbe, le mouvement hélicoïdal de l'écoulement est d'une grande importance, et la courbure importante contrôle fortement la direction de l'écoulement. Sur la rivière des Escoumins en revanche, l'écoulement réagit moins à la courbure, qui est plus faible, qu'à la topographie du coude, le haut-fond à l'intrant de la courbe jouant le rôle d'un obstacle. Ces contextes topographiques très différents ont une influence primordiale sur les profils verticaux des vitesses.

L'introduction de constantes isotropes dans les directions longitudinale et latérale a amélioré très légèrement l'écoulement. Cependant, l'écoulement n'est pas contrôlé correctement car l'amélioration sur le haut-fond au niveau de la courbe, s'accompagne également d'une augmentation de la surestimation des vitesses au début du haut-fond : l'écoulement ne suit toujours pas suffisamment le talweg.

5. Conclusion

Les termes dispersifs, calculés analytiquement à partir des profils verticaux mesurés, ont nettement permis d'améliorer la variabilité générale des vitesses sur le canal courbe. Ceci est attribué à l'anisotropie des termes introduits puisque les profils étaient disponibles dans les directions longitudinales et transversales.

Lors de l'étude sur la modélisation de la variabilité des profils verticaux, nous avons constaté que les paramétrisations optimales étaient différentes pour le canal et la rivière. Dans les deux cas cependant, les termes latéraux doivent être modélisés à l'aide de la courbure locale de l'écoulement. Les valeurs des vitesses ont été très légèrement améliorées sur la rivière et la variabilité spatiale a été grandement améliorée sur le canal.

Les termes de dispersion se sont montrés très sensibles lors de la paramétrisation. Ils semblent également être très sensibles à la forme de l'écoulement auquel ils sont appliqués. C'est-à-dire que la variabilité des profils verticaux des vitesses est intimement reliée à la forme de l'écoulement, surtout lorsque les dimensions horizontales sont faibles devant les dimensions verticales. Il peut donc être assez complexe d'obtenir une paramétrisation générale applicable à tous les écoulements, ce qui explique les paramétrisations différentes obtenues pour la rivière et le canal. La paramétrisation doit donc se faire au cas par cas, comme un processus de calibration.

Les résultats ont montré qu'il était possible de modéliser la variabilité des profils verticaux des vitesses. Ainsi, lorsque l'hypothèse de l'uniformité des profils de vitesse est restrictive, comme c'est souvent le cas des petits cours d'eau ou des écoulements en courbe, il est facile d'introduire des termes dispersifs, multiplicateurs de la convection, sans pour autant modifier le modèle bidimensionnel présenté ici.

Les équations calculées restent les mêmes, et le modèle garde donc sa simplicité d'utilisation, tout en donnant des résultats aussi bons qu'un modèle plus complexe auquel des équations sont rajoutées pour représenter la variabilité le long de la composante verticale. Toutefois, le modèle proposé demande une calibration pour ajuster les paramètres liés aux coefficients de dispersion.

6. Bibliographie

Baule B., *Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs*, Teil 1, Band I, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1979, p. 187.

Bogle G. V., « Stream velocity profiles and longitudinal dispersion », *J. of Hydraul. Eng.*, 123, (9), 1997, p. 816-821.

- Boudreau P., M. Leclerc, Fortin G. R., « Modélisation hydrodynamique du lac Saint-Pierre, fleuve Saint-Laurent : l'influence de la végétation aquatique », *Revue Can. Génie Civil*, 21, (3), 1994, p. 471-489.
- De Vriend H. J., « A mathematical model of steady flow in curved shallow channel », *J. of Hydraul. Res.*, 15, (1), 3, 1977, p. 7-53.
- De Vriend H. J. et Geldof H. J., « Main velocity in short river bends », *J. of Hydraul. Eng.*, 109, (7), 1983, p. 991-1010.
- Dubos V., Validation des vitesses d'un modèle hydrodynamique bidimensionnel ; Prise en compte de la variabilité des profils verticaux des vitesses par un terme de dispersion, Mémoire de maîtrise, INRS-ETE, 2001.
- Engelund F., « Flow and bed topography in channel bends », *J. of Hydraul. Div., Proceeding of ASCE*, 100 (HY11), 1974, p. 1631-1647.
- Fischer H. B., List E. J., Koh R. C. Y., Imberger J. et Brooks N. H., *Mixing in inland and coastal waters*, Academic press, New York, N.Y., 1979, p. 483.
- Flokstra C., « The closure problem for depth-averaged two-dimensional flow », *Proceeding of the 17th Congress of the IAHR*, Baden-Baden, Germany, 1977, p. 247-256.
- Fread D. L., Lewis J. M., *NWS FLDWAV model*, National Weather Service, NOAA, Silver Spring, Maryland, 20910, 1998.
- Heniche M., Secretan Y., Boudreau P. et Leclerc M., « A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries », *Advances in Water Resources*, 23, (4), 2000, p. 359-372.
- M. Heniche, Y. Secretan, Leclerc M., « Dynamic tracking of flow boundaries in rivers with respect to discharge », *J. of Hydraul. Res.*, 40, (5), 2002, p. 589-602.
- INRS-Eau, Simulation hydrodynamique et bilan sédimentaire des rivières Chicoutimi et des Ha! Ha! suite aux crues exceptionnelles de juillet 1996, Rapport présenté à la Commission scientifique et technique sur la gestion des barrage, INRS-Eau, rapport R487s, 1997, p. 207.
- Ippen A. T., Drinker P. A., « Boundary shear stress in curved trapezoidal channels », *J. of Hydraul. Div., Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 116 (HY5), 1962, p. 143-179.
- Jin Y.-C., Steffler P. M., « Predicting flow in curved open channels by depth-averaged method », *J. of Hydraul. Eng.*, 119, (1), 1993, p. 109-124.
- Kalkwijk J. P. Th., De Vriend H. J., « Computation of the flow in shallow river bends », *J. of Hydraul. Res.*, 18, (4), 1980, p. 327-342.
- Khan A. A., Steffler P. M., « Vertically averaged and moment equations model for flow over curved beds », *J. of Hydraul. Eng.*, 122, (1), 1996, p. 3-9.
- Doyon B., Leclerc M., Heniche M., Secretan Y., Lapointe M., Driscoll S., Boudreau P., Simulation hydrodynamique et analyse morphodynamique de la rivière Montmorency en crue dans le secteur des Îlets, Travaux réalisés pour le compte de la Ville de Beauport, INRS-Eau, rapport R522, 1998, p. 134.

- Li C. W., Falconer R. A., « Depth integrated modeling of tide induced circulation in a square harbour », *J. of Hydraul. Res.*, 33, (03), 1994, p. 321-332.
- Lien H.C, Hsieh T. Y., Yang J. C., Yeh K. C., « Bend-Flow Simulation Using 2D Depth-Averaged Model », *J. of Hydraul. Eng.*, 125, (10), 1999, p. 1097-1108.
- Molls T., Chaudhry M. H., « Depth-Averaged Open-Channel Flow Model », *J. of Hydraul. Eng.*, 121, (6), 1995, p. 453-465.
- Ponce V. M., Yabusaki S. B., « Modeling circulation in depth-averaged flow », *J. of the Hydraul. Div.*, 107 (HY11), 1981, p. 1501-1517.
- Robert J.-L., Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre, permanents et non-permanents, par la méthode des éléments finis, Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Canada, 1983, p. 233.
- Rodi W., *Turbulence models and their applications, A state of the art review*, AIRH, 1980, p. 104.
- Rozovskii I. L., *Flow of water in bends of open channels*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israël, 1957.
- Y. Roy, Secretan Y. et coll., MODELEUR: Guide d'utilisation 1.0a07, Québec, INRS-Eau, rapport R482-G3E, 2000, p. 258.
- Steffler P. M., Jin Y.-C., « Depth averaged and moment equations for moderately shallow free surface flow », *J. of Hydraul. Res.*, 31, (1), 1993, p. 5-17.
- Whitting P. J., Dietrich W. E., « Convective accelerations and boundary shear stress over a channel bar », *Water Resources Res.*, 27, (5), 1991, p. 783-796.
- Yeh H. H., Chu. W.-S., Dahlberg O., « Numerical modeling of separation eddies in shallow water », *Water Resources Res.*, 24, (4), 1988, p. 607-614.
- Yulistiyanto B., Zech Y., Graf W.H., « Flow around a cylinder : shallow-water modelling with diffusion-dispersion », *J. of Hydraul. Eng.*, 124, (4), 1998, p. 419-429.