
Vecteur de rotation incrémental pour les coques non linéaires en grandes rotations

Pierre Courtois* — Adnan Ibrahimbegovic**

* Ipharra, 36a, ch. du pain de sucre, F-06800 Cagnes-sur-mer
courtois.pierre@wanadoo.fr

** L.M.T. Ecole Normale Supérieure, Cachan,
61 Avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex
ai@lmt.ens-cachan.fr

RÉSUMÉ. Nous proposons dans cet article un vecteur de rotation incrémental pour les coques non linéaires en grandes rotations tridimensionnelles, s'appuyant sur la théorie dite géométriquement exacte. Cette formulation incrémentale a comme principal avantage, en plus d'éviter les blocages en rotations finies et d'être parfaitement adaptée aux procédures itératives d'actualisation des codes existants, de fournir une matrice tangente de rigidité symétrique permettant une convergence quadratique vers la solution. Nous présenterons deux approches, une spatiale et une matérielle. Nous donnerons la formulation matricielle issue de la discrétisation élément fini, en y intégrant la méthode des modes incompatibles ainsi que la procédure de résolution séquentielle. Finalement, on présentera des tests non seulement de coques en grandes rotations mais aussi en flambement. Les résultats seront comparés avec ceux des méthodes de vecteur total ou de vecteur incrémental à cinq degrés de liberté.

ABSTRACT. We propose in this work an incremental rotation vector for three-dimensional nonlinear shells with large rotations, we use the geometrically nonlinear shell theory. The major advantage in this description, without problem in finite rotations and with update procedure of incremental rotation in accord to principals numericals programs, is to provide a symmetric tangent stiffness matrix leading to quadratic convergence of the incremental solution. Two approaches spatial or material, are illustrated. The finite element matrix with incompatible modes will be done in addition of operator split resolution method. The examples include not only analyses of simple shell undergoing large rotation, but also cases of post-buckling displacements. We evaluate the results in comparison with total rotation vection method and 5 degree-of-freedom incremental vector.

MOTS-CLÉS : coque non linéaire en grandes rotations, vecteur de rotation incrémental, matrice de rigidité symétrique.

KEYWORDS: Nonlinear shell in large rotations, Incremental rotation vecteur, Symetric stiffness matrix.

1. Introduction

Cet article traite des coques non linéaires en grandes rotations, avec six degrés de liberté (noté ddl, dont trois de rotations) par nœud. Il se base sur la théorie géométriquement exacte présentée dans les travaux de [SF89, SFR90] et plus récemment [Ibr94, Ibr97]. Il rejoint aussi l'approche pour les poutres (voir [Al 98]), ainsi qu'une approche à cinq ddl pour les coques (voir [IBC01]). Dans les articles précédents, nous avons vu comment une matrice orthogonale élément de la variété $SO(3)$ est la paramétrisation intrinsèque des rotations finies. Mais cette dernière n'est pas très commode pour l'implantation élément fini, l'approche en vecteur de rotation total, quant à elle, conduit bien à des matrices tangentes de rigidité symétriques, mais rencontre des problèmes pour des rotations multiples de π .

L'idée principale est donc d'utiliser un vecteur de rotation incrémental, d'autant plus intéressant qu'en plus de pouvoir, de part sa nature, éviter les blocages en rotation, un tel choix sera complètement compatible avec la procédure de solution standard des problèmes non-linéaires basée sur une stratégie de chargement incrémental, de plus, l'actualisation des paramètres de rotations à chaque itération restera additive, comme dans la plupart des codes éléments finis existants. Une autre conséquence est que l'on pourra retarder la discrétisation éléments finis après la linéarisation ; contrairement au vecteur de rotation total, pour lequel la linéarisation cohérente devait tenir compte de la non linéarité des interpolations éléments finis, ce qui la rendait plus délicate. Nous devons donc obtenir des matrices de rigidité total sans discrétisation élément fini et qui seront en plus symétriques, conduisant à un taux de convergence quadratique vers la solution incrémentale correspondante.

Les principaux thèmes seront abordés dans l'ordre suivant. Après quelques rappels concernant la géométrie des grandes rotations, nous évoquerons la remarque la plus utile qui y est rattachée, c'est-à-dire l'existence d'un vecteur propre de la matrice orthogonale des grandes rotations appelé, par abus de langage, vecteur de rotation. Nous développerons successivement deux types d'interpolations pour le calcul de la matrice Λ , faisant intervenir soit le vecteur de rotation matériel, soit le vecteur de rotation spatial. Le même schéma directeur sera utilisé ; tout d'abord à partir des mesures de déformations correspondantes, nous calculerons les relations reliant deux itérations successives ; puis les variations virtuelles de première et seconde forme de ces dernières, afin de mettre en application les différentes équations d'équilibres liées au principe du travail virtuel, ainsi que sa linéarisation. Nous en déduisons, tout naturellement, les vecteurs résidus et matrices de rigidité utiles à notre implantation numérique.

Après ces considérations théoriques, nous testerons cette formulation sur des exemples concrets et nous comparerons les résultats avec ceux obtenus pour des coques à cinq ddl. Cela pourra être fait après utilisation de la méthode des éléments finis (citons en référence le très bon livre des professeurs G. Dhatt et G. Touzot [DT81]). Mais avant tout, nous présenterons quelques aménagements matriciels pour améliorer la performance de nos éléments en résultats par la méthode des modes incompatibles et en stockage de données par la résolution séquentielle.

Remarques sur les notations. Les scalaires sont notés en lettres minuscules, les vecteurs sont en lettres grasses et les matrices en majuscules grasses.

2. De la géométrie à la formulation variationnelle

2.1. Paramétrisation des grandes rotations 3D

Il existe différentes possibilités (voir [Spr86]) pour paramétriser les grandes rotations et il nous apparaîtra bien vite que deux paramétrisations seulement, sont bien adaptées au calcul non linéaire. La première paramétrisation utilise la matrice orthogonale liée au tenseur Λ (neuf paramètres, mais qui peuvent être réduits à quatre par l'utilisation des quaternions). La seconde, plus directe, se sert de trois paramètres scalaires, formant le vecteur directeur propre de la rotation. Le principal avantage de cette dernière paramétrisation est de rendre les procédures d'actualisation additives.

Rappelons quelques caractéristiques de Λ . Tout d'abord Λ conserve le produit scalaire, et l'ensemble des rotations de ce type constitue un groupe orthogonal propre de tenseur 3D, noté $SO(3) := \{\Lambda : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3 \mid \Lambda^T = \Lambda^{-1}\}$ ([SFR90]). Remarquons que nous ne sommes pas en présence d'un espace linéaire mais d'une variété différentielle, les travaux de [Lan95] ont mis en évidence que $SO(3)$ est un exemple classique de groupe de Lie auquel est associé l'opérateur : multiplication des matrices.

De plus, d'après le théorème d'Euler ([Gol80]) pour la rotation finie d'un corps rigide, il existe un vecteur θ qui reste inchangé par cette rotation (voir figure 1), tel que :

$$\theta = \Lambda \theta = \mathbf{I} \theta. \quad [1]$$

C'est-à-dire, ϑ est le vecteur propre de Λ , avec la valeur propre correspondante égale à 1. De plus, comme Λ est un tenseur bi ponctuel, θ est le vecteur spatial correspondant à un vecteur matériel ϑ . Le vecteur θ sera appelé *vecteur de rotation*, et peut être utilisé pour paramétriser les rotations finies.

Les rapports reliant ces deux paramétrisations de rotation découlent directement de la figure 1 avec $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \Lambda \mathbf{x}$.

Nous en déduisons (voir [Arg82]) l'équation (2), avec Θ matrice antisymétrique dont le vecteur axial est θ ($\Theta \mathbf{b} = \theta \times \mathbf{b}$; $\forall \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$).

$$\Lambda = \cos \theta \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \Theta + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \theta \otimes \theta = \exp[\Theta], \quad [2]$$

Pour plus de précisions sur la cinématique nous renvoyons à l'article [Ibr97]. Nous noterons cependant (voir figure 2) que Λ apparaît comme la transformation d'un vecteur de base $\mathbf{g}_i = \Lambda_0 \mathbf{e}_i$ (trièdre orthonormé obtenu par rotation du repère global \mathbf{e}_i) dans la configuration de référence à un autre vecteur de base \mathbf{a}_i dans la configuration courante :

$$\Lambda = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{g}_i \quad [3]$$

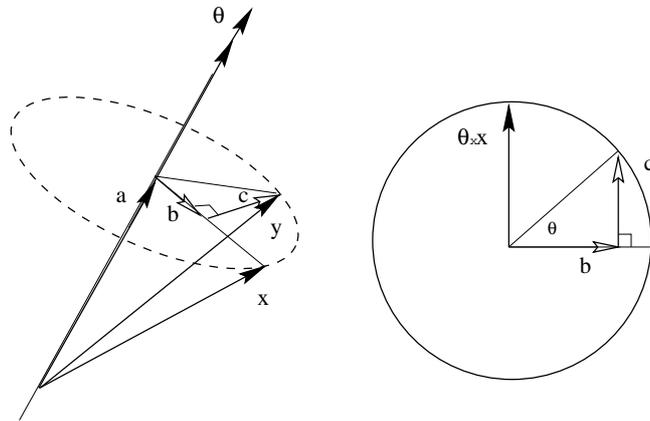


Figure 1. Rotation finie d'un vecteur, décomposition géométrique de sa nouvelle position

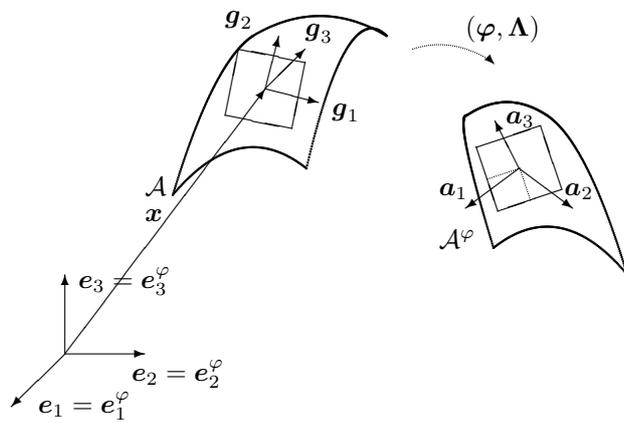


Figure 2. Configuration de référence A et configuration courante A^φ avec les vecteurs de base des systèmes cartésiens locaux

2.2. Variations admissibles des rotations finies

Nous traitons à présent des variations admissibles des rotations finies, autrement dit, nous discutons de la gestion des petites rotations superposées aux rotations finies.

La variation admissible de Λ peut s'écrire en version spatiale :

$$\delta\Lambda = \left. \frac{d}{dt} [\Lambda_t] \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [exp(t \delta\mathbf{W}) \Lambda] \right|_{t=0} = \delta\mathbf{W} \Lambda . \tag{4}$$

où $\delta\mathbf{W}$ est une matrice antisymétrique, dont nous noterons $\delta\mathbf{w}$ le vecteur axial ; $\delta\mathbf{W} = \delta\Lambda\Lambda^T$ est aussi un objet spatial.

Il est particulièrement intéressant de travailler en vecteurs axiaux, les relations deviennent :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{w} &= \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}) \delta\boldsymbol{\theta} \tag{5} \\ \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\sin\theta}{\theta} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \boldsymbol{\Theta} + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} . \end{aligned}$$

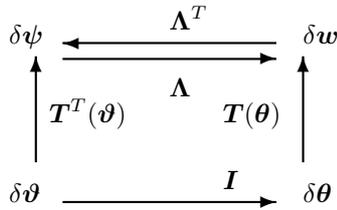


Figure 3. Diagramme commutatif des variations admissibles de rotations finies

D'autres relations entre vecteur spatial et matériel découlent du diagramme commutatif de la figure 3.

Nous pouvons retrouver toutes ces considérations détaillées dans [IFK95]. Mais remarquons néanmoins que cette dernière expression possède un déterminant nul pour des rotations totales multiples de $k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, d'où l'intérêt de proposer un vecteur de rotation incrémental.

2.3. Formulation variationnelle, mesures de déformations

Nous avons appris par la lecture des articles précédents ([Ibr94], [Ibr97]), que la formulation variationnelle retenue, après régularisation du fait de la rotation autour de la normale, est de la forme :

$$\Pi_\gamma(\varphi, \Lambda) := \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_\alpha C_N^{\alpha\beta} \epsilon_\beta + \epsilon_\alpha C_\gamma^{\alpha\beta} \epsilon_\beta + \epsilon_\alpha C_Q^{\alpha\beta} \epsilon_\beta + \kappa_\alpha \tilde{C}_M^{\alpha\beta} \kappa_\beta \right\} d\mathcal{A} - \Pi_{ext}. \quad [6]$$

avec les mesures de déformations spatiales (notées \bullet^φ) de membrane et de cisaillement ainsi que la forme spatiale des mesures de flexion, en vecteur axial :

$$\epsilon_\alpha^\varphi = \varphi_{,\alpha} - \mathbf{a}_\alpha \quad , \quad \kappa_\alpha^\varphi = \omega_\alpha \quad [7]$$

nous avons également :

$$\mathbf{n}_\alpha^\varphi = (C_N^{\alpha\beta} + C_\gamma^{\alpha\beta} + C_Q^{\alpha\beta}) \epsilon_\beta^\varphi \quad , \quad \mathbf{m}_\alpha^\varphi = \tilde{C}_M^{\alpha\beta} \kappa_\beta^\varphi \quad [8]$$

Les mesures de déformations matérielles ainsi que les efforts correspondants peuvent être retrouvés par :

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \Lambda^T (\varphi_{,\alpha} - \mathbf{a}_\alpha) = \Lambda^T \varphi_{,\alpha} - \mathbf{g}_\alpha \quad , \quad \mathbf{n}_\alpha = \Lambda^T \mathbf{n}_\alpha^\varphi \quad [9] \\ \mathbf{K}_\alpha &= \Lambda^T \kappa_\alpha^\varphi = \Lambda^T \Lambda_{,\alpha} \quad , \quad \mathbf{m}_\alpha = \Lambda^T \mathbf{m}_\alpha^\varphi \end{aligned}$$

Il nous reste à écrire la forme explicite des matrices constitutives

$$\begin{aligned} C_N &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 \end{bmatrix} \frac{Et}{1-\nu^2} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_2^T & \mathbf{a}_1^T \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ C_\gamma &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_1 \end{pmatrix} \gamma \langle \mathbf{a}_2^T, -\mathbf{a}_1^T \rangle \quad , \\ C_Q &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \mathfrak{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \frac{Et}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_M &= \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \mathbf{D} \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_2^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_1^T & -\mathbf{a}_2^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous allons voir dans la prochaine partie, comment exprimer Λ en fonction du vecteur de rotation matériel ϑ ou du spatial θ en incrémental, et rendre les formulations passées dépendantes de ces vecteurs.

3. Vecteur de rotation incrémental

3.1. Version matérielle

1) La matrice orthogonale de rotation Λ_{n+1} est exprimée en fonction du vecteur de rotation matériel $\vartheta_{(n+1)}$ et de la rotation obtenue à l'itération précédente $\Lambda_{(n)}$. $\vartheta_{(n+1)}$ est représenté par l'intermédiaire de sa matrice antisymétrique $\hat{\Theta}_{(n+1)}$, dont on prend l'exponentielle et en l'appliquant en premier (car on est en configuration matérielle), c'est-à-dire avant la rotation existante. Soit :

$$\Lambda_{(n+1)} = \Lambda_{(n)} \exp[\hat{\Theta}_{(n+1)}] \quad [10]$$

Suite à cette expression, $\vartheta_{(n+1)}$ peut être calculé de manière incrémentale par :

$$\vartheta_{(n+1)} = \vartheta_{(n)} + \Delta\vartheta_{(n+1)}$$

Ainsi $\vartheta_{(n+1)}$ vecteur de rotation et solution avec le vecteur φ du problème de Gauss que nous sommes amenés à résoudre, peut profiter à plein des structures classiques additives de la plupart des codes éléments finis.

Nous pouvons écrire la déformation de membrane $\epsilon_{(n+1)\alpha}$ de (9) en fonction de Λ_n :

$$\begin{aligned} \epsilon_{(n+1)\alpha} &= \exp[\hat{\Theta}_{(n+1)}]^T \Lambda_{(n)}^T \varphi_{(n+1),\alpha} - \mathbf{g}_{(n+1)\alpha} \\ &= \epsilon_{(n)\alpha} + \exp[\hat{\Theta}_{(n+1)}]^T \Lambda_{(n)}^T \varphi_{(n+1),\alpha} - \Lambda_{(n)}^T \varphi_{(n),\alpha} \end{aligned} \quad [11]$$

Pour les déformations de flexion, avec l'utilisation de (10), on a :

$$\mathbf{K}_{(n+1)\alpha} = \Lambda_{(n+1)}^T \Lambda_{(n+1),\alpha} \quad [12]$$

$$= \exp[\hat{\Theta}_{(n+1)}]^T [\mathbf{K}_{(n)\alpha} \exp[\hat{\Theta}_{(n+1)}] + (\exp[\hat{\Theta}_{(n+1)}])_{,\alpha}] \quad [13]$$

ce que nous pouvons traduire en termes de vecteurs axiaux :

$$\kappa_{(n+1)\alpha} = \exp[\hat{\Theta}_{(n+1)}]^T \kappa_{(n)\alpha} + \mathbf{T}^T(\vartheta_{(n+1)}) \vartheta_{(n+1),\alpha} \quad [14]$$

2) Nous allons regarder maintenant la première équation variationnelle de la forme (6) exprimée en fonction du vecteur de rotation ϑ , notée $G(\varphi, \vartheta, \delta\varphi, \delta\vartheta) =$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_\gamma(\varphi, \vartheta) \cdot (\delta\varphi, \delta\vartheta) &:= \int_{\mathcal{A}} \left\{ \delta\epsilon_\alpha C_N^{(\alpha\beta)} \epsilon_\beta + \delta\epsilon_\alpha C_\gamma^{(\alpha\beta)} \epsilon_\beta + \delta\epsilon_\alpha C_Q^{(\alpha\beta)} \epsilon_\beta \right. \\ &\quad \left. + \delta\kappa_\alpha \tilde{C}_M^{(\alpha\beta)} \kappa_\beta \right\} d\mathcal{A} - \Pi_{ext} = 0 \end{aligned} \quad [15]$$

Nous voyons que nous aurons besoin de connaître $\delta\epsilon$ et $\delta\kappa$. A partir des équations (11) et (14) nous obtenons (nous avons allégé la notation en α et en $(n+1)$):

$$\delta\epsilon = \Lambda^T \delta\varphi_{,\alpha} - (\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta) \times (\Lambda^T \varphi_{,\alpha}) \quad [16]$$

$$\delta\kappa = \delta\mathbf{T}^T(\vartheta)\vartheta_{,\alpha} + \mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta_{,\alpha} - (\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta) \times (\exp[\hat{\Theta}]^T \kappa_n) \quad [17]$$

Nous devons mettre en évidence $\delta\vartheta$ dans l'expression de $\delta\mathbf{T}^T(\vartheta)\vartheta_{,\alpha}$, après calcul :

$$\delta\mathbf{T}^T(\vartheta)\vartheta_{,\alpha} = \mathbf{R}(\vartheta_{,\alpha})\delta\vartheta \quad [18]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{a}) &= [c_1 \mathbf{a} - c_2(\vartheta \times \mathbf{a}) + c_3(\vartheta \cdot \mathbf{a})\vartheta] \otimes \vartheta \\ &\quad + c_4[\mathbf{a} \times] + c_5[(\vartheta \cdot \mathbf{a})\mathbf{I} + \vartheta \otimes \mathbf{a}] \end{aligned}$$

avec $c_1 = (\vartheta \cos\vartheta - \sin\vartheta)/\vartheta^3$, $c_2 = (\vartheta \sin\vartheta + 2\cos\vartheta - 2)/\vartheta^4$,
 $c_3 = (3\sin\vartheta - 2\vartheta - \vartheta \cos\vartheta)/\vartheta^5$, $c_4 = (1 - \cos\vartheta)/\vartheta^2$ et $c_5 = (\vartheta - \sin\vartheta)/\vartheta^3$.

3) L'équation (15) a besoin, pour être résolue par une méthode itérative de type Newton, d'être linéarisée de manière cohérente. Nous lui appliquons donc l'opérateur tangent L correspondant à la dérivée directionnelle suivant $\Delta\varphi$ et $\Delta\vartheta$. Cette forme consistante de l'opérateur tangent nous garantira ainsi un taux de convergence quadratique.

$$\begin{aligned} L[G(\varphi, \vartheta, \delta\varphi, \delta\vartheta)] &= G(\varphi, \vartheta, \delta\varphi, \delta\vartheta) \\ &\quad + \left. \frac{d}{d\alpha} [G(\varphi + \alpha\Delta\varphi, \vartheta + \alpha\Delta\vartheta, \delta\varphi, \delta\vartheta)] \right|_{\alpha=0} = 0 \quad [19] \end{aligned}$$

Nous aurons besoin de connaître $\Delta\delta\epsilon$ et $\Delta\delta\kappa$.

$$\begin{aligned} \Delta\delta\epsilon &= -(\Delta\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta) \times (\Lambda^T \varphi_{,\alpha}) - (\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta) \times (\Lambda^T \Delta\varphi_{,\alpha}) \\ &\quad - (\mathbf{T}^T(\vartheta)\Delta\vartheta) \times (\Lambda^T \delta\varphi_{,\alpha}) \\ &\quad + (\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta) \times [(\mathbf{T}^T(\vartheta)\Delta\vartheta) \times (\Lambda^T \varphi_{,\alpha})] \quad [20] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\delta\kappa &= \Delta\delta\mathbf{T}^T(\vartheta)\vartheta_{,\alpha} + \delta\mathbf{T}^T(\vartheta)\Delta\vartheta_{,\alpha} + \Delta\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta_{,\alpha} \\ &\quad - (\Delta\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta) \times (\exp[\hat{\Theta}]^T \kappa_n) \\ &\quad - (\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta) \times ((\mathbf{T}^T(\vartheta)\Delta\vartheta) \times (\exp[\hat{\Theta}]^T \kappa_n)) \quad [21] \end{aligned}$$

où plutôt $\Delta\delta\epsilon \cdot \mathbf{n}$ et $\Delta\delta\kappa \cdot \mathbf{m}$

$$\begin{aligned} \Delta\delta\epsilon \cdot \mathbf{n} &= (\Delta\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta) \cdot [\mathbf{n} \times] (\Lambda^T \varphi_{,\alpha}) + (\mathbf{T}^T(\vartheta)\delta\vartheta) \cdot [\mathbf{n} \times] (\Lambda^T \Delta\varphi_{,\alpha}) \\ &\quad - (\Lambda^T \delta\varphi_{,\alpha}) \cdot [\mathbf{n} \times] (\mathbf{T}^T(\vartheta)\Delta\vartheta) \end{aligned}$$

$$+\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\vartheta})\delta\boldsymbol{\vartheta} \cdot [\mathbf{n}\times][\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}\times](\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\vartheta})\Delta\boldsymbol{\vartheta}) \quad [22]$$

$$\begin{aligned} \Delta\delta\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{m} &= (\Delta\delta\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{m} + (\delta\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\vartheta})\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{m} \\ &+ (\Delta\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\vartheta})\delta\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{m} - ((\Delta\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\vartheta})\delta\boldsymbol{\vartheta}) \times (\exp[\hat{\boldsymbol{\Theta}}]^T\boldsymbol{\kappa}_n)) \cdot \mathbf{m} \\ &+ (\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\vartheta})\delta\boldsymbol{\vartheta}) \cdot [\mathbf{m}\times][\exp[\hat{\boldsymbol{\Theta}}]^T\boldsymbol{\kappa}_n\times]\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\vartheta})\Delta\boldsymbol{\vartheta} \end{aligned} \quad [23]$$

Il reste à transformer les expressions en $\Delta\mathbf{T}^T\delta\boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{a}$ et $\delta\mathbf{T}^T\Delta\boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{a}$, pour faire ressortir les variations liées à $\delta\boldsymbol{\vartheta}$ et $\Delta\boldsymbol{\vartheta}$; puis effectuer le calcul de $\Delta\delta\mathbf{T}^T$. Nous trouvons ainsi les expressions suivantes utiles à l'écriture des matrices de rigidités.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{a}) &= [c_1\mathbf{a} + c_2(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{a}) + c_3(\boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{a})\boldsymbol{\vartheta}] \otimes \boldsymbol{\vartheta} \\ &- c_4[\mathbf{a}\times] + c_5[\boldsymbol{\vartheta} \otimes \mathbf{a} + (\boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{a})\mathbf{I}] \end{aligned} \quad [24]$$

$$\begin{aligned} \Upsilon &= (c_1(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha} - c_2\mathbf{m}(\boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}) + c_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\vartheta})(\boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}))\mathbf{I} \\ &+ (b_1(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha} - b_2\mathbf{m}(\boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}) + b_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\vartheta})(\boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}))[\boldsymbol{\vartheta} \otimes \boldsymbol{\vartheta}] \\ &+ c_5[\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}] + c_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\vartheta})[\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha} \otimes \boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\vartheta} \otimes \boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}] \\ &+ c_3(\boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha})[\boldsymbol{\vartheta} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\vartheta}] \\ &- c_2[(\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha} \times \mathbf{m}) \otimes \boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\vartheta} \otimes (\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha} \times \mathbf{m})] \end{aligned} \quad [25]$$

avec : $b_1 = c_3 - c_2$, $b_2 = (c_1 - 4c_2)/\vartheta^2$ et $b_3 = (c_2 - 5c_3)/\vartheta^2$.

4) Nous pouvons maintenant exprimer le résidu et la matrice de rigidité tangente.

$$L(\delta\Pi_{int}) = \int_A \left\{ \begin{array}{c} \delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \\ \delta\boldsymbol{\vartheta} \\ \delta\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \mathbf{r} + \mathbf{K}_T \left\{ \begin{array}{c} \Delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \\ \Delta\boldsymbol{\vartheta} \\ \Delta\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha} \end{array} \right\} \right\} dA \quad [26]$$

avec pour résidu \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\Lambda}^T & [\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}\times]\mathbf{T}^T & 0 \\ 0 & [\exp[\hat{\boldsymbol{\Theta}}]^T\boldsymbol{\kappa}_n\times]\mathbf{T}^T + \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_{,\alpha}) & \mathbf{T}^T \end{array} \right]^T}_{[\mathbf{B}]^T} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{array} \right\} \quad [27]$$

et la matrice \mathbf{K}_T se décompose en une partie matérielle \mathbf{K}_m additionnée d'une partie géométrique \mathbf{K}_g données comme suit :

$$\mathbf{K}_m = [\mathbf{B}]^T \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{\Lambda}_0 C_n \boldsymbol{\Lambda}_0^T & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}_0 C_m \boldsymbol{\Lambda}_0^T \end{array} \right] [\mathbf{B}] \quad [28]$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_g = & \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{\Lambda}[\mathbf{n}\times]\mathbf{T}^T & 0 \\ \mathbf{T}^T[\mathbf{n}\times]\mathbf{\Lambda}^T & \mathbf{S}(\mathbf{n}\times(\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha})) \\ & +\mathbf{T}[\mathbf{n}\times][\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}\times]\mathbf{T}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Upsilon + \mathbf{S}((\exp[\hat{\boldsymbol{\Theta}}]^T\boldsymbol{\kappa}_n)\times\mathbf{m}) & [\mathbf{S}(\mathbf{m})]^T \\ & +\mathbf{T}[\mathbf{m}\times][\exp[\hat{\boldsymbol{\Theta}}]^T\boldsymbol{\kappa}_n\times]\mathbf{T}^T & \\ 0 & [\mathbf{S}(\mathbf{m})] & 0 \end{bmatrix} \quad [29]
 \end{aligned}$$

avec $\mathbf{C}_n = (\mathbf{C}_N^{\alpha\beta} + \mathbf{C}_\gamma^{\alpha\beta} + \mathbf{C}_Q^{\alpha\beta})$ et $\mathbf{C}_m = \tilde{\mathbf{C}}_M^{\alpha\beta}$.

Remarque : la première partie de \mathbf{K}_g est liée à la membrane, la seconde à la flexion. Et surtout ce sont bien des matrices symétriques.

3.2. Version spatiale

1) Nous cherchons à établir une version spatiale des équations précédentes, plus précisément nous voudrions utiliser le vecteur spatial écrit en incrémental $\boldsymbol{\theta}_{(n+1)}$, de matrice antisymétrique correspondante $\boldsymbol{\Theta}_{(n+1)}$, c'est-à-dire cette fois-ci :

$$\mathbf{\Lambda}_{(n+1)} = \exp[\boldsymbol{\Theta}_{(n+1)}]\mathbf{\Lambda}_{(n)} \quad [30]$$

$\mathbf{\Lambda}_{(n)}$ étant placé à droite, l'équation est dite spatiale.

Comme nous l'avons fait pour la version matérielle, nous allons chercher à exprimer les déformations à l'itération $(n+1)$ en fonction de celles précédentes à l'itération (n) . Les mesures de déformations spatiales correspondantes (7) à l'aide de la relation (30) et de quelques transformations deviennent :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(n+1)\alpha}^\varphi = \boldsymbol{\varphi}_{(n+1),\alpha} - \exp[\boldsymbol{\Theta}_{(n+1)}] \underbrace{(\boldsymbol{\varphi}_{(n),\alpha} - \boldsymbol{\epsilon}_{(n)\alpha}^\varphi)}_{\mathbf{a}_{(n)}} \quad [31]$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{(n+1)\alpha}^\varphi = \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_{(n+1)})\boldsymbol{\theta}_{(n+1),\alpha} + \exp[\boldsymbol{\Theta}_{(n+1)}]\boldsymbol{\kappa}_{(n)\alpha}^\varphi \quad [32]$$

2) Pour les différents calculs de variations des mesures de déformations, la dérivée de Lie va nous être nécessaire. Pour ce faire, nous devons retravailler les équations des mesures de déformations matérielles, de façon à mettre en évidence les vecteurs spatiaux en place des vecteurs matériels. Pour être plus précis, à partir de l'équation (16) et des relations du diagramme commutatif, on obtient :

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{\Lambda}^T(\delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} + \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \times (T\delta\boldsymbol{\theta})) \quad [33]$$

$$\delta\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{\Lambda}^T\delta\boldsymbol{\omega}_{,\alpha} = \mathbf{\Lambda}^T(\delta\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \delta\boldsymbol{w}) \quad [34]$$

A présent, il est possible de calculer les dérivées de Lie des mesures de déformations grâce à la remarque suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\delta \bullet^\varphi &= \Lambda \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} [\Lambda_\epsilon^T (\bullet_\epsilon^\varphi)] \\ &= \delta \bullet \varphi - \delta \mathbf{W} \bullet \varphi = \Lambda \delta (\Lambda^T \bullet \varphi) = \Lambda \delta \bullet\end{aligned}\quad [35]$$

nous obtenons :

$$\mathcal{L}_\delta \epsilon^\varphi = \delta \varphi_{,\alpha} + \varphi_{,\alpha} \times (\mathbf{T} \delta \boldsymbol{\theta}) \quad [36]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\delta \boldsymbol{\kappa}^\varphi &= \delta \mathbf{T} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + \mathbf{T} \delta \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + (\mathbf{T} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \times (\delta \boldsymbol{\theta}) \\ &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{T} \delta \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + (\mathbf{T} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \times (\delta \boldsymbol{\theta})\end{aligned}\quad [37]$$

Nous avons besoin aussi de calculer la dérivée incrémentale de Lie appliquée aux efforts :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Delta \epsilon^\varphi &= \Lambda \left(\frac{d}{dt} [\Lambda^T \epsilon^\varphi(\boldsymbol{\varphi} + t \Delta \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta} + t \Delta \boldsymbol{\theta})] \Big|_{t=0} \right) \\ &= \Delta \varphi_{,\alpha} + \varphi_{,\alpha} \times \Delta \boldsymbol{w}\end{aligned}\quad [38]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Delta \boldsymbol{\kappa}^\varphi &= \Lambda \left(\frac{d}{dt} [\Lambda^T \boldsymbol{\kappa}^\varphi(\boldsymbol{\varphi} + t \Delta \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta} + t \Delta \boldsymbol{\theta})] \Big|_{t=0} \right) \\ &= \Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \Delta \boldsymbol{w}\end{aligned}\quad [39]$$

3) Il nous reste pour finir :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \epsilon^\varphi &= \Lambda \left(\frac{d}{dt} [\Lambda^T \mathcal{L}_\delta \epsilon^\varphi(\boldsymbol{\varphi} + t \Delta \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta} + t \Delta \boldsymbol{\theta})] \Big|_{t=0} \right) \\ &= -\Delta \boldsymbol{w} \times (\delta \varphi_{,\alpha} + \varphi_{,\alpha} \times \delta \boldsymbol{w}) + \Delta \varphi_{,\alpha} \times \delta \boldsymbol{w} \\ &\quad + \varphi_{,\alpha} \times \Delta \delta \boldsymbol{w}\end{aligned}\quad [40]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \boldsymbol{\kappa}^\varphi &= \Lambda \left(\frac{d}{dt} [\Lambda^T \mathcal{L}_\delta \boldsymbol{\kappa}^\varphi(\boldsymbol{\varphi} + t \Delta \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta} + t \Delta \boldsymbol{\theta})] \Big|_{t=0} \right) \\ &= -\Delta \boldsymbol{w} \times (\delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{w}) \\ &\quad + \Delta \delta \boldsymbol{\omega} + \Delta \boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{w} + \boldsymbol{\omega} \times \Delta \delta \boldsymbol{w}\end{aligned}\quad [41]$$

Puisque tous les paramètres de rotation doivent être exprimés en fonction du paramètre de rotation primaire $\boldsymbol{\theta}$, ainsi que de sa variation $\delta \boldsymbol{\theta}$ et de sa valeur incrémentale $\Delta \boldsymbol{\theta}$. Nous avons les relations suivantes $\Delta \delta \boldsymbol{w} = \Delta \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}) \delta \boldsymbol{\theta}$ et $\delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}) \delta \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}$, qui nous permettent de récrire les équations :

$$\mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \epsilon^\varphi = -\mathbf{T} \delta \boldsymbol{\theta} \times \delta \varphi_{,\alpha} - \mathbf{T} \Delta \boldsymbol{\theta} \times (\varphi_{,\alpha} \times \mathbf{T} \delta \boldsymbol{\theta})$$

$$\begin{aligned}
 & +\Delta\varphi_{,\alpha} \times T\delta\theta + \varphi_{,\alpha} \times \Delta T\delta\theta \quad [42] \\
 \mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \kappa^\varphi & = T\Delta\theta \times (T\delta\theta \times T\theta_{,\alpha}) - T\Delta\theta \times S(\theta_{,\alpha})\delta\theta - T\Delta\theta \times T\delta\theta_{,\alpha} \\
 & -\Delta T\delta\theta \times T\theta_{,\alpha} - T\delta\theta \times S(\theta_{,\alpha})\Delta\theta \\
 & -T\delta\theta \times T\Delta\theta_{,\alpha} + \Delta\delta T\theta_{,\alpha} + \delta\Delta\theta_{,\alpha} + \Delta T\delta\theta_{,\alpha} \quad [43]
 \end{aligned}$$

Nous devons calculer en fait $\mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \epsilon^\varphi \cdot \mathbf{n}$ et $\mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \kappa^\varphi \cdot \mathbf{m}^\varphi$. Ce qui, en faisant ressortir les variations liées à $\delta\theta$ et $\Delta\theta$, donne :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \epsilon^\varphi \cdot \mathbf{n}^\varphi & = -\delta\varphi_{,\alpha} \cdot [\mathbf{n}^\varphi \times] T\Delta\theta + \delta\theta T^T [\mathbf{n}^\varphi \otimes \varphi_{,\alpha} - (\mathbf{n}^\varphi \cdot \varphi_{,\alpha}) \mathbf{I}] T\Delta\theta \\
 & + \delta\theta T^T [\mathbf{n}^\varphi \times] \Delta\varphi_{,\alpha} + \delta\theta \cdot \mathbf{R}(\mathbf{n}^\varphi \times \varphi_{,\alpha}) \Delta\theta \quad [44] \\
 \mathcal{L}_\Delta \mathcal{L}_\delta \kappa^\varphi \cdot \mathbf{m}^\varphi & = \delta\theta T^T [\mathbf{m}^\varphi \otimes T\theta_{,\alpha} - (\mathbf{n}^\varphi \cdot T\theta_{,\alpha}) \mathbf{I}] T\Delta\theta \\
 & - \delta\theta S^T(\theta_{,\alpha}) [\mathbf{m}^\varphi \times] T\Delta\theta \\
 & - \delta\theta_{,\alpha} T^T [\mathbf{m}^\varphi \times] T\Delta\theta + \delta\theta \cdot \mathbf{R}(\mathbf{m}^\varphi \times T\theta_{,\alpha}) \Delta\theta \\
 & + \delta\theta T^T [\mathbf{m}^\varphi \times] S(\theta_{,\alpha}) \Delta\theta + \delta\theta T^T [\mathbf{m}^\varphi \times] T\Delta\theta_{,\alpha} \\
 & + \delta\theta \cdot \Xi \Delta\theta + \delta\mathbf{R}(\mathbf{m}^\varphi)^T \Delta\theta_{,\alpha} + \delta\theta_{,\alpha} \mathbf{R}(\mathbf{m}^\varphi) \Delta\theta \quad [45]
 \end{aligned}$$

avec Ξ ressemblant au calcul de Υ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 \Xi & = (c_1(\mathbf{m}^\varphi \cdot \vartheta_{,\alpha} + c_2 \mathbf{m}^\varphi (\vartheta \times \vartheta_{,\alpha}) + c_3(\mathbf{m}^\varphi \cdot \vartheta)(\vartheta \cdot \vartheta_{,\alpha})) \mathbf{I} \\
 & + (b_1(\mathbf{m}^\varphi \cdot \vartheta_{,\alpha} + b_2 \mathbf{m}^\varphi (\vartheta \times \vartheta_{,\alpha}) + b_3(\mathbf{m}^\varphi \cdot \vartheta)(\vartheta \cdot \vartheta_{,\alpha})) [\vartheta \otimes \vartheta] \\
 & + c_5[\vartheta_{,\alpha} \otimes \mathbf{m}^\varphi + \mathbf{m}^\varphi \otimes \vartheta_{,\alpha}] + c_3(\mathbf{m}^\varphi \cdot \vartheta)[\vartheta_{,\alpha} \otimes \vartheta + \vartheta \otimes \vartheta_{,\alpha}] \\
 & + c_3(\vartheta \cdot \vartheta_{,\alpha})[\vartheta \otimes \mathbf{m}^\varphi + \mathbf{m}^\varphi \otimes \vartheta] \\
 & + c_2[(\vartheta_{,\alpha} \times \mathbf{m}^\varphi) \otimes \vartheta + \vartheta \otimes (\vartheta_{,\alpha} \times \mathbf{m}^\varphi)] \quad [46]
 \end{aligned}$$

4) Ce qui nous donne finalement sous forme matricielle le résidu \mathbf{r}^φ :

$$\mathbf{r}^\varphi = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & [\varphi_{,\alpha} \times] \mathbf{T} & 0 \\ 0 & [T\theta_{,\alpha} \times] \mathbf{T} + S(\theta_{,\alpha}) & \mathbf{T} \end{bmatrix}^T}_{[\mathbf{B}^\varphi]^T} \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^\varphi \\ \mathbf{m}^\varphi \end{Bmatrix} \quad [47]$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_T^\varphi & = \mathbf{K}_m^\varphi + \mathbf{K}_g^\varphi = [\mathbf{B}^\varphi]^T \begin{bmatrix} \bar{\Lambda} C_n \bar{\Lambda}^T & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda} C_m \bar{\Lambda}^T \end{bmatrix} [\mathbf{B}^\varphi] \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & -[\mathbf{n}^\varphi \times] \mathbf{T} & 0 \\ \mathbf{T}^T [\mathbf{n}^\varphi \times] & \mathbf{T}^T [\varphi_{,\alpha} \times] [\mathbf{n}^\varphi \times] \mathbf{T} & 0 \\ 0 & +\mathbf{R}(\mathbf{n}^\varphi \times \varphi_{,\alpha}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^T [\mathbf{T}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \times] [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} + \mathbf{R}(\mathbf{m}^\varphi \times \mathbf{T}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) & \mathbf{R}(\mathbf{m}^\varphi)^T \\ & + \mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha})^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} + \boldsymbol{\Xi} & + \mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} \\ 0 & \mathbf{R}(\mathbf{m}^\varphi) - \mathbf{T}^T [\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} & 0 \end{bmatrix} \quad [48]$$

Nous avons donc réussi, à l'aide d'une paramétrisation simple des grandes rotations et d'une étude attentive des relations entre matrice orthogonale de rotation et vecteur de rotation incrémental, à formuler notre problème en termes de matrice de rigidité symétrique et vecteur résidu pour une bonne résolution et une base correcte pour l'implantation élément fini.

Une rapide comparaison des matrices et des vecteurs résidus obtenus entre les deux versions matérielle et spatiale nous montre que le vecteur de rotation spatial conduit à un résidu plus simple, si ce n'est de formulation mais d'utilisation avec notre programmation éléments finis existante. C'est une des raisons pour justifier le choix d'utiliser une version spatiale, l'autre étant pour raison de compatibilité avec les développements en poutre ([Al 98]), afin que lors de couplage (coque avec raidisseurs par exemple) la formulation théorique soit identique.

4. Implantation numérique

Nous avons vu dans la partie précédente les aspects théoriques de ce vecteur incrémental et nous avons abouti à la formulation matricielle du problème de Gauss à résoudre.

Nous reprenons en l'état ces principaux développements pour passer au stade de l'implantation numérique en faisant intervenir la discrétisation élément fini. Les acquis sur le vecteur de rotation total nous poussent à rajouter la méthode numérique dite des modes incompatibles afin d'optimiser nos résultats, et dans le même but mais pour optimiser le stockage, rendu plus dense par cette méthode, elle sera couplée à la procédure de résolution séquentielle (appelée operator split).

4.1. Discrétisation éléments finis et méthode des modes incompatibles géométriquement non linéaire

Pour l'implantation élément fini (voir [DT81]), nous prenons N_i , $i = 1, \dots, 4$ les fonctions de formes isoparamétriques standard permettant d'avoir les interpolations classiques pour le vecteur déplacement et le vecteur rotation :

$$\boldsymbol{\varphi} \Big|_{\mathcal{A}^e} = \sum_{i=1}^{nen} N_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\varphi}_i = N \boldsymbol{\varphi}^e \quad , \quad \boldsymbol{\theta} \Big|_{\mathcal{A}^e} = \sum_{i=1}^{nen} N_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\theta}_i = N \boldsymbol{\theta}^e \quad [49]$$

Mais avant cela, une étape de plus sera ajoutée en vue d'améliorer, dans le cadre de l'implantation numérique, les résultats pour des maillages distordus ou des problèmes en flexion pure. La méthode des modes incompatibles géométriquement non linéaire abordée par Wilson ([WTDG73]) et décrite dans le même cadre théorique par Ibrahimbegović *et al.* ([IF94, Ibr95]), nous donnera la résolution du problème discrétisé aux inconnues $\delta \mathbf{c}^{e(i)}$ (variation des déplacements et des rotations), et $\delta \mathbf{d}^{e(i)}$ (variations de paramètres des modes incompatibles) suivant :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{nel} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{c}^e \\ \delta \mathbf{d}^e \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{r}^e - \mathbf{f}^e \\ \mathbf{h}^e \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & \mathbf{F}^e \\ \mathbf{F}^{eT} & \mathbf{H}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{c}^e \\ \Delta \mathbf{d}^e \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad [50]$$

$$\delta \mathbf{c}^e = \begin{pmatrix} \delta \varphi^e \\ \delta \boldsymbol{\theta}^e \end{pmatrix} \quad [51]$$

où $\mathbf{A}_{e=1}^{nel}$ est la procédure d'assemblage éléments finis. Le résidu étant :

$$\mathbf{r}^{e\varphi} = \int_{\mathcal{A}^e} \underbrace{[\mathbf{N}_\alpha]^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & [(\varphi_{,\alpha} + \mathbf{d}_\alpha) \times] \mathbf{T} & 0 \\ 0 & [\mathbf{T}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \times] \mathbf{T} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) & \mathbf{T} \end{bmatrix}^T}_{[\mathbf{B}^{e\varphi}]^T} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{n}^\varphi \\ \mathbf{m}^\varphi \end{matrix} \right\} d\mathcal{A} \quad [52]$$

avec :

$$[\mathbf{N}_\alpha]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & 0 \\ 0 & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3(\frac{\partial}{\partial s_\alpha}) & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_3 \\ 0 & \mathbf{I}_3(\frac{\partial}{\partial s_\alpha}) \end{bmatrix}^T \quad [53]$$

La matrice de rigidité élémentaire se compose d'une partie matérielle $\mathbf{K}_m^{e\varphi}$ et d'une partie géométrique $\mathbf{K}_g^{e\varphi}$. Pour la partie matérielle nous avons :

$$\mathbf{K}_m^{e\varphi} = \int_{\mathcal{A}^e} [\mathbf{B}^{e\varphi}]^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_n\bar{\mathbf{L}}^T & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_m\bar{\mathbf{L}}^T \end{bmatrix} [\mathbf{B}^{e\varphi}] d\mathcal{A} \quad [54]$$

la partie géométrique s'écrit de son côté :

$$\mathbf{K}_g^{e\varphi} = \int_{\mathcal{A}^e} [\mathbf{N}_\alpha]^T \left(\begin{bmatrix} 0 & -[\mathbf{n}^\varphi \times] \mathbf{T} & 0 \\ \mathbf{T}^T[\mathbf{n}^\varphi \times] & \mathbf{T}^T[(\varphi_{,\alpha} + \mathbf{d}_\alpha) \times][\mathbf{n}^\varphi \times] \mathbf{T} & 0 \\ 0 & +\mathbf{R}(\mathbf{n}^\varphi \times (\varphi_{,\alpha} + \mathbf{d}_\alpha)) & 0 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^T[\mathbf{T}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \times][\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} + \mathbf{R}(\mathbf{m}^\varphi \times \mathbf{T}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) & \mathbf{R}(\mathbf{m}^\varphi)^T \\ +\mathbf{T}^T[\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha})^T[\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} & +\mathbf{T}^T[\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} & \\ +\boldsymbol{\Xi} & & \\ 0 & \mathbf{R}(\mathbf{m}^\varphi) - \mathbf{T}^T[\mathbf{m}^\varphi \times] \mathbf{T} & 0 \end{bmatrix} \right) [\mathbf{N}_\alpha] d\mathcal{A} \quad [55]$$

de plus nous avons les matrices annexes suivantes :

$$\mathbf{h}^{e\varphi} = \int_{\mathcal{A}^e} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{n}^\varphi \\ \mathbf{m}^\varphi \end{array} \right\} d\mathcal{A} \quad [56]$$

$$\mathbf{F}_m^{e\varphi} = \int_{\mathcal{A}^e} \begin{bmatrix} \mathbf{N} & 0 \\ 0 & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T [\mathbf{I}_3, [(\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} + \mathbf{d}_\alpha) \times \mathbf{T}]^T [\bar{\mathbf{A}}\mathbf{C}_n\bar{\mathbf{A}}^T][\hat{\mathbf{G}}_\beta]] d\mathcal{A} \quad [57]$$

$$\mathbf{F}_g^{e\varphi} = \int_{\mathcal{A}^e} \begin{bmatrix} \mathbf{N} & 0 \\ 0 & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ [\mathbf{n}^\varphi \times \mathbf{T}][\hat{\mathbf{G}}_\alpha] \end{bmatrix} d\mathcal{A} \quad [58]$$

$$\mathbf{H}^{e\varphi} = \int_{\mathcal{A}^e} [\hat{\mathbf{G}}_\alpha]^T [\bar{\mathbf{A}}\mathbf{C}_n\bar{\mathbf{A}}^T][\hat{\mathbf{G}}_\beta] d\mathcal{A} \quad [59]$$

Pour interpolation des modes incompatibles nous prenons :

$$\mathbf{d}_\alpha \Big|_{\mathcal{A}^e} = \hat{\mathbf{G}}_\alpha \mathbf{d}^e, \quad \hat{\mathbf{G}}_{j\alpha} = \left[\frac{\partial \hat{M}_j}{\partial x_i} \mathbf{I}_3 \right] \quad [60]$$

$$\frac{\partial \hat{M}_j}{\partial x_i} = \frac{\partial M_j}{\partial x_i} - \frac{1}{\mathcal{A}^e} \int_{\mathcal{A}^e} \frac{\partial M_j}{\partial x_i} d\mathcal{A} \quad [61]$$

avec les M_j quadratiques, $M_1(\xi, \eta) = 1 - \xi^2$ et $M_2(\xi, \eta) = 1 - \eta^2$ (tel que $M_j \cap N_i = \emptyset \quad \forall i, j$).

4.2. Méthode de résolution séquentielle

Nous voyons immédiatement que le gros problème de la formulation précédente est le stockage de données. Nous avons besoin, pour chaque actualisation itérative des paramètres des modes incompatibles, de connaître les valeurs de $\mathbf{c}^{(i)}$ mais aussi les matrices $\mathbf{F}^{e(i)}$, $\mathbf{H}^{e(i)}$ et le résidu $\mathbf{h}^{e(i)}$.

La méthode de résolution séquentielle décrite ci-après va diminuer les besoins en mémoire. On suppose fixées les valeurs des déplacements et des rotations (données par la résolution du système d'équations globales), on calcul \mathbf{h} et \mathbf{H} et de l'équation ,

$$\mathbf{H}\Delta\tilde{\mathbf{d}} = -\mathbf{h} \Rightarrow \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{h}, \quad [62]$$

on cherche \mathbf{d} annulant \mathbf{h} , afin d'obtenir les paramètres des modes incompatibles. Il est important de dire qu'on obtient par la même occasion \mathbf{H} matrice constante, et donc la solution de (62) est calculée en une seule itération.

Ainsi par une boucle itérative locale sur un élément, on a déterminé, sous la condition $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, les paramètres des modes incompatibles ; ces derniers étant maintenant fixés pour la résolution globale afin de calculer le nouvel incrément de déplacement et de rotation :

$$[\mathbf{K}^{(i)} - \mathbf{F}^{(i)T} \mathbf{H}^{(i)-1} \mathbf{F}^{(i)}] \Delta \mathbf{c}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)} - \mathbf{r}^{(i)} \quad [63]$$

La procédure complète est présentée dans le tableau (1) suivant.

– On se donne $\varphi^{(i)}$ déplacement et $\theta^{(i)}$ rotation fixés, ainsi que $\mathbf{d}^{(i)}$ paramètre des modes incompatibles.

– Actualisation des paramètres des modes incompatibles

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)-1} \mathbf{h}^{(i)}$$

– Calcul des incréments de déplacement et de rotation

$$\Delta \mathbf{c}^{(i)} = (\Delta \varphi^{(i)}, \Delta \theta^{(i)})$$

$$[\mathbf{K}^{(i)} - \mathbf{F}^{(i)T} \mathbf{H}^{(i)-1} \mathbf{F}^{(i)}] \Delta \mathbf{c}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)} - \mathbf{r}^{(i)}$$

– Mise à jour des déplacements $\varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + \Delta \varphi^{(i)}$

– Mise à jour des rotations $\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \Delta \theta^{(i)}$

– Calcul des matrices orthogonales correspondantes

$$\Lambda^{(i+1)} = \cos \theta^{(i+1)} \mathbf{I} + \frac{\sin \theta^{(i+1)}}{\theta^{(i+1)}} \Theta^{(i+1)} + \frac{1 - \cos \theta^{(i+1)}}{\theta^{(i+1)2}} \theta^{(i+1)} \otimes \theta^{(i+1)}$$

Tableau 1. Procédure de la résolution séquentielle

Pour finir nous testerons cette nouvelle formulation sur certains problèmes standard et d'autre, plus compliqués, de flambement. Nous comparerons nos résultats avec ceux obtenus par le vecteur de rotation total ou par le vecteur de rotation incrémental à cinq ddl. développé par Ibrahimbegović *et al.* ([IBC01]).

5. Exemples numériques

Tous les calculs pour valider nos nouveaux éléments de coques ont été implantés dans la version élaborée du programme de calcul FEAP, développée par le Professeur R.L. Taylor à UC Berkeley (*e.g.* voir Zienkiewicz [ZT89]). Les éléments sont donc des éléments de coque à quatre nœuds avec six ddl. à chacun d'eux. La méthode de résolution est celle de Newton-Rhapson, classiquement employée. Les données pour les cas tests sont standardisées sauf avis contraire.

5.1. Plaque sous forme d'anneau

Cet exemple présente de grandes rotations pour une plaque sous forme d'anneau ouvert, encastré à une extrémité, et à l'autre chargé avec des charges verticales réparties uniformément $p = 0.1$. Les caractéristiques mécaniques choisies sont :

module d'Young
 $E = 2.1 \times 10^7$
 coef. de Poisson
 $\nu = 0.$
 rayon intérieur
 $R_i = 6$
 rayon extérieur
 $R_o = 6$
 longueur $l = 3.048$
 épaisseur $h = 0.03$

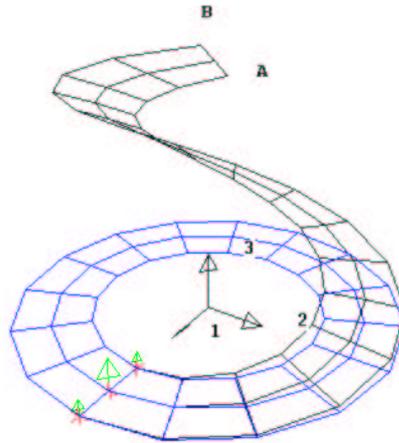


Figure 4. Configuration initiale et déformée d'une plaque en forme d'anneau soumise à un chargement vertical à son extrémité libre

Cet exemple, proposé par [BD92a] et [BR92], est un très bon test de la capacité des éléments à tenir compte des grandes rotations. L'analyse est accomplie avec un maillage de 16×2 éléments, pour la charge augmentée soixante fois par rapport à la charge initiale. Le résultat obtenu pour l'allure déformée finale est dessiné sur la figure ci-dessus.

Le diagramme charge-déplacement est présenté sur la figure (5), ainsi que les résultats obtenus avec un nombre d'éléments plus élevé 32×4 par [Ibr95], et ceci pour les deux points de l'extrémité libre. Nous remarquons que nous obtenons des déplacements plus élevés pour le point A sur le rayon intérieur, tandis que le point B du rayon extérieur converge vers le résultat des autres méthodes ; soit avec notre vecteur de rotation incrémentale une valeur du déplacement en 15.6931, pour une valeur de 15.647 par la méthode du vecteur de rotation totale dans [Ibr95] avec un maillage de 32×4 éléments, voir le tableau (3) comparatif des déplacements aux points A et B .

Une rapide étude du taux de convergence est présenté en tableau (2). Il est à noter qu'en rajoutant un pas de temps intermédiaire on améliore sensiblement ce taux de convergence.

multi. de charge	vect. rot. incr. maillage 16x2		vect. rot. tot. maillage 32x4	
	point A	point B	point A	point B
2.	3.048	3.359	1.301	1.705
4.	4.661	5.193	2.459	3.379
6.	5.767	6.475	3.449	4.742
8.	6.618	7.475	4.294	5.902
10.	7.312	8.297	5.023	6.894
12.	7.899	8.996	5.658	7.749
14.	8.406	9.602	6.218	8.494
16.	8.854	10.138	6.717	9.149
18.	9.253	10.616	7.167	9.732
20.	9.614	11.048	7.576	10.254
24.	10.244	11.803	8.297	11.160
28.	10.785	12.447	8.917	11.922
32.	11.257	13.008	9.458	12.576
36.	11.677	13.505	9.936	13.146
40.	12.057	13.952	10.366	13.651
44.	12.404	14.358	10.760	14.107
48.	12.724	14.730	11.125	14.526
52.	13.021	15.073	11.473	14.918
56.	13.299	15.394	11.810	15.293
60.	13.560	15.693	12.132	15.647

Tableau 2. Taux de convergence pour la plaque cantilever en forme d'anneau

No. d'ité.	norme du résidu	norme d'énergie	pas de temps t=0.5	
			norme du résidu	norme d'énergie
0	2.449×10^{-1}	8.507×10^{-1}	1.225×10^{-1}	2.127×10^{-1}
1	7.603×10^3	4.179×10^2	1.894×10^3	2.618×10^1
2	7.737×10^2	1.182×10^0	9.241×10^0	7.455×10^{-3}
3	6.611×10^1	4.429×10^{-2}	4.007×10^0	6.108×10^{-5}
4	3.191×10^2	1.348×10^{-1}	5.102×10^{-1}	1.599×10^{-6}
5	2.706×10^0	3.468×10^{-3}	1.514×10^{-2}	2.218×10^{-9}
6	7.535×10^1	1.026×10^{-2}	2.585×10^{-5}	4.867×10^{-15}
7	1.906×10^{-1}	1.873×10^{-6}	6.569×10^{-10}	4.744×10^{-25}
8	3.729×10^{-2}	3.612×10^{-9}		
9	7.174×10^{-8}	3.077×10^{-18}		

Tableau 3. Déplacements en z pour la plaque cantilever en forme d'anneau

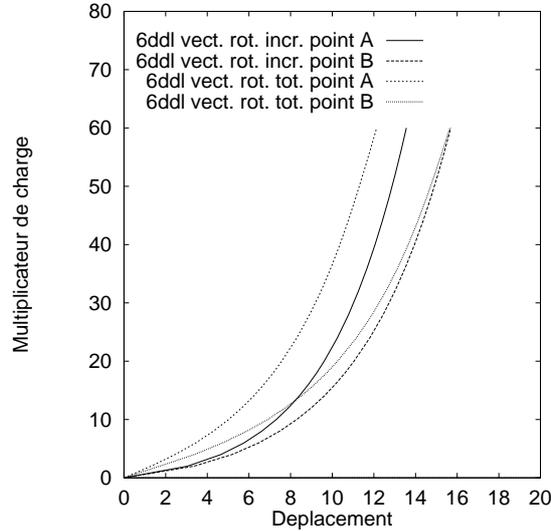


Figure 5. Diagramme de charge-déplacement pour la plaque en forme d'anneau soumise à un chargement vertical à son extrémité libre

5.2. Cylindre encastré pincé

Une coque cylindrique est encastrée à une extrémité, et est soumise à l'action de deux forces opposées pincantes à l'extrémité libre. Les caractéristiques mécaniques choisies sont :

	charge tot.	6 ddl.		5ddl.
		vect. rot. incr.	vect. rot. tot.	vec. rot. incr.
module d'Young $E = 2.0685 \times 10^7$	40.	1.595×10^{-2}	1.588×10^{-2}	1.670×10^{-2}
coef. de Poisson $\nu = 0.3$	80.	3.512×10^{-2}	3.494×10^{-2}	3.721×10^{-2}
rayon $R = 1.016$
longueur $l = 3.048$	1560.	1.547×10^0	1.546×10^0	1.589×10^0
épaisseur $h = 0.03$	1600.	1.561×10^0	1.559×10^0	1.605×10^0

Tableau 4. Déplacements sous la charge

En raison des conditions de symétrie, un quart de la structure seulement sera étudiée et représentée par un maillage de 16×16 éléments. La charge totale appliquée est $F_{tot} = 1600$, au moyen de quarante pas de temps égaux de charge partielle $F_{par} = 20$. Nous regardons les résultats avec les trois méthodes : vecteur de rotation totale à six degrés de libertés (ddl.), vecteur de rotation incrémentale à 5 et 6 ddl., objet de ce document, nous remarquons que les résultats sont sensiblement équivalents, et surtout qu'ils

sont pratiquement confondus entre les deux méthodes à six ddl, voir le tableau comparatif des déplacements sous la charge.

Nous retrouvons sur le diagramme (voir figure (6)), les différents résultats obtenus par ces trois méthodes : ainsi que l'allure déformée pour la structure totale sous force R . La convergence est excellente, en six itérations on atteint 1×10^{-10} de norme résiduelle, pour notre méthode.

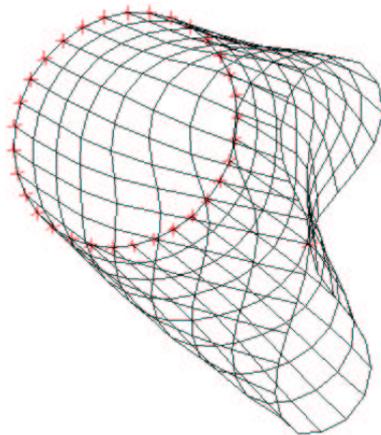
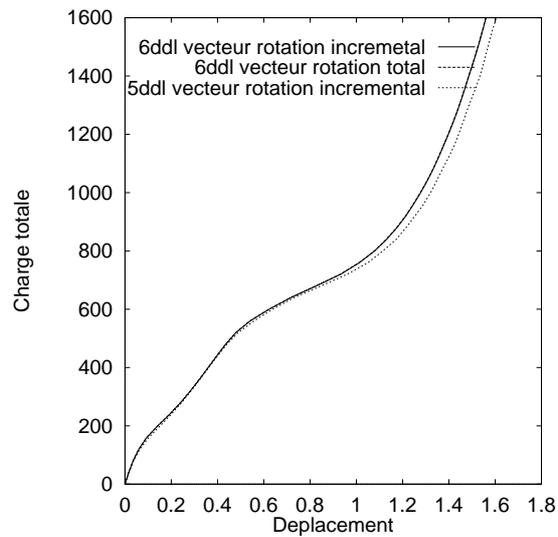


Figure 6. Diagramme de charge-déplacement pour le cylindre pincé. Allure déformée

5.3. Analyse de post-flambement d'un arc circulaire

L'analyse de flambement et post-flambement d'un arc circulaire, avec un appui simple à une extrémité et l'encastrement à l'autre, est effectuée pour une force verticale appliquée au milieu. Les caractéristiques mécaniques choisies sont :

module d'Young
 $E = 9.6 \times 10^7$
 coefficient de Poisson
 $\nu = 0.$
 rayon $R = 100$
 angle central $\phi = 145^\circ$
 longueur $l = 10.35$
 largeur $b = 1$
 épaisseur $h = 0.5$

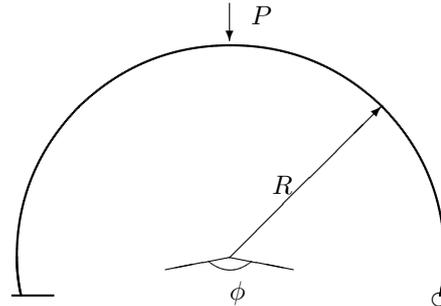


Figure 7. Arc circulaire avec force verticale appliquée au milieu : une extrémité simplement appuyée l'autre encastree

Le résultat numérique pour la charge critique est obtenu comme $P_{cr} = 904$, pour un maillage de quarante éléments de coques à quatre nœuds (voir figure (8)), et ce pour l'élément de référence et le nôtre à six ddl., ce qui correspond bien à la solution de référence (voir [DS75]) $P_{ref} = 897$. Le résultat de l'élément à cinq ddl. quant à lui est une charge critique de $P_{cr} = 878.$, plus que conforme lui aussi. Le diagramme charge-déplacement calculé pour le point où la charge est appliquée, est dessiné sur la figure (8) avec le résultat de référence. Il est évident qu'un très bon accord de ces deux résultats est obtenu non seulement pour la valeur de la charge critique, mais aussi pour tout le diagramme charge-déplacement. Le résultat de l'élément à cinq ddl, bien qu'inférieur, permet d'encadrer les données. Par la figure (8), il est également évident que de très larges déplacements précèdent l'état critique. Ainsi, ce problème doit être traité comme un problème de flambement non linéaire.

6. Conclusions

Lors de ces tests, nous avons pu vérifier la convergence de notre élément vers les solutions connues pour des problèmes standard mais aussi la vitesse de convergence qui s'avère bien être quadratique. Les résultats sont comparables à ceux obtenus par les deux autres méthodes vecteur de rotation total et vecteur de rotation incrémental à cinq ddl. Pour d'autres tests, nous pouvons voir Batoz ([BD92b]) avec l'état de l'art dans le domaine des coques ou, dans le même cadre théorique, Ibrahimbegović ([Ibr97]).

Nous pouvons conclure à la bonne tenue de notre élément ainsi que sa robustesse dans les cas des grandes rotations tridimensionnelles mais aussi lors de problème plus sensible de flambement ou de post-flambement.

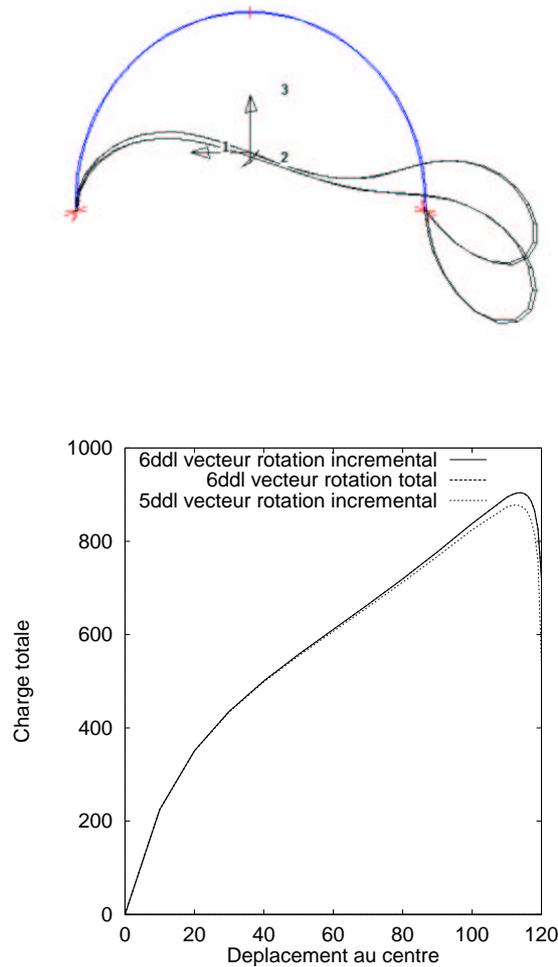


Figure 8. Configuration initiale et déformée. Diagramme force-déplacement au point sous la charge

Cette validation supplémentaire en vecteur de rotation incrémental renforce donc le crédit de la théorie géométriquement exacte des coques non linéaires, déjà validée pour les deux types de paramétrisation repris en test.

L'analyse dynamique des coques est le cadre naturel pour beaucoup de problèmes non linéaires, notamment la dynamique des systèmes multicorps et le claquement de coques. L'obstacle principal pour aborder ce problème, la dynamique du groupe des rotations finies, a déjà été enlevé (*e.g.*, voir [SK92]).

Les perspectives sont donc ouvertes et nous comptons sur les futurs travaux qui vont aborder la dynamique de coques en rotations finies.

7. Bibliographie

- [Al 98] M. Al Mikdad. *Statique et dynamique des poutres géométriquement exactes et résolution des problèmes d'instabilité non linéaire*. Thèse de doctorat, UTC, France, avril 1998.
- [Arg82] J.H. Argyris. An excursion into large rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32:85–155, 1982.
- [BD92a] Y. Basar and Y. Ding. Finite-rotation shell elements for the analysis of finite-rotation shell problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 34:165–169, 1992.
- [BD92b] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis. Coques*, volume 3. Hermes, Paris, 1992.
- [BR92] N. Buechter and E. Ramm. Shell theory versus degeneration - a comparison in large rotation finite element analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 34:39–59, 1992.
- [DS75] D.A. DaDeppo and R. Schmidt. Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load. *J. Appl. Mech.*, 97:894–896, 1975.
- [DT81] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne, France, 1981.
- [Gol80] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.
- [IBC01] A. Ibrahimbegović, B. Brank, and P. Courtois. Stress resultant geometrically exact form of classical shell model and vector-like parametrization of constrained finite rotation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 52/11:1235–1252, 2001.
- [Ibr94] A. Ibrahimbegović. Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations-part i: A consistent formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 118:265–284, 1994.
- [Ibr95] A. Ibrahimbegović. On assumed shear strain in finite rotation shell analysis. *Eng. Comput.*, 12:425–438, 1995.
- [Ibr97] A. Ibrahimbegović. Théorie géométriquement exacte des coques en rotations finies et son implantation éléments finis. *Revue européenne des éléments finis*, 6:263–335, 1997.
- [IF94] A. Ibrahimbegović and F. Frey. Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations-part ii: Computational aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 118:285–308, 1994.
- [IFK95] A. Ibrahimbegović, F. Frey, and I. Kožar. Computational aspects of vector-like parameterization of three-dimensional finite rotations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 38:3653–3673, 1995.
- [Lan95] S. Lang. *Differential and Riemannian Manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [SF89] J.C. Simo and D.D. Fox. On a stress resultants geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parameterization. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 72:267–304, 1989.
- [SFR90] J.C. Simo, D.D. Fox, and M.S. Rifai. On a stress resultants geometrically exact shell model. part iii: The computational aspects of the nonlinear theory. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 79:21–70, 1990.

- [SK92] J.C. Simo and J.G. Kenedy. On a stress resultants geometrically exact shell model. part v: Nonlinear plasticity, formulation and integration algorithms. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 96:133–171, 1992.
- [Spr86] K.W. Spring. Euler parameters and the use of quaternion algebra in the manipulation of finite rotations: A review. *Mechanism Mach. Theory*, 21:365–373, 1986.
- [WTDG73] E.L. Wilson, R.L. Taylor, W.H. Doherty, and J. Ghaboussi. Incompatibles displacement models. *Num. and Comp. Methods in Struct. Mech.*, :43–57, 1973.
- [ZT89] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method : Basic Formulation and Linear Problem*. McGraw-Hill, London, 1989.