
Modélisation « macro » de phénomènes dissipatifs localisés à l'échelle « micro »

Formulation et implantation numérique

Delphine Brancherie — Adnan Ibrahimbegovic

*Laboratoire de Mécanique et Technologie, ENS de Cachan
CNRS/Université Pierre et Marie Curie
61 avenue du Président Wilson
94235 Cachan cedex
delphine.brancherie@utc.fr; ai@lmt.ens-cachan.fr*

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous présentons un modèle capable de prendre en compte à l'échelle de la structure deux types de phénomènes dissipatifs : une dissipation volumique ayant lieu à l'échelle de la structure et une dissipation surfacique ou localisée ayant lieu à des échelles beaucoup plus fines : l'échelle des bandes de localisation. Ceci est réalisé par l'introduction de champs de déplacements discontinus. L'originalité de la méthode est de considérer deux types de dissipation : une dissipation volumique produite à l'échelle « macro » gérée par des modèles continus classiques et une dissipation surfacique localisée à l'échelle « micro » et gérée par des lois discrètes.

ABSTRACT. In this paper, we present a model capable of taking into account both diffuse dissipative mechanisms taking place at the structure scale and localized dissipative mechanisms taking place at finer scale: the localization zones. This is achieved by introducing in a continuum domain discontinuities of the displacement field. The method proposed herein is capable of combining two types of dissipation: a volumic one taken into account by a classical continuum model and a surfacic one taken into account by the introduction of discrete type laws.

MOTS-CLÉS : localisation des déformations, rupture, discontinuités fortes, méthodes EF.

KEYWORDS: strain localization, fracture, strong discontinuities, finite element methods.

1. Introduction

Lors du chargement d'une structure jusqu'à rupture, il est fréquent d'observer l'apparition de zones de faible épaisseur (dites zones de localisation) dans lesquelles se concentrent les déformations. Ces zones à forts gradients de déformation sont le siège de phénomènes dissipatifs localisés qu'il est nécessaire de prendre en compte pour estimer correctement le comportement de la structure. Toute la difficulté est alors d'être capable de représenter à la fois les phénomènes diffus qui ont lieu à l'échelle de la structure (ou échelle « macro ») et les phénomènes localisés ayant lieu à des échelles beaucoup plus fines (ou échelle « micro ») et ce, en conservant une finesse de maillage compatible avec la taille de la structure étudiée. L'approche proposée ici s'appuie sur une *analyse multi-échelle du comportement anélastique* où l'échelle « micro » n'est prise en compte à l'échelle « macro » que par la dissipation anélastique qui s'y produit.

Il est à noter que l'on traite ici de problèmes de comportement anélastique où apparaissent des phénomènes d'adoucissement, cette approche peut ainsi être également interprétée comme une méthode dite « limiteur de localisation ». La nécessité d'avoir recours à de telles méthodes dans le cas des matériaux adoucissants est désormais bien connue ([BOR 92],[BAŽ 84],[NEE 88], [PIJ 87]), les modèles classiques de milieux continus échouant dans la représentation objective des phénomènes de localisation des déformations.

Ainsi, le modèle proposé s'appuie sur des travaux récents concernant les problèmes de localisation ([IBR 03], [JIR 01],[WEL 01]) : les zones de localisation des déformations sont prises en compte par l'intermédiaire de l'introduction de discontinuités du champ de déplacement. L'originalité de l'approche proposée est de pouvoir combiner deux types de dissipation : une dissipation volumique produite à l'échelle « macro » (« process zone ») et une dissipation anélastique surfacique trouvant son origine à l'échelle « micro » (sur la discontinuité). Ceci est plus général que les méthodes largement utilisées aujourd'hui telles que les méthodes PUM ou XFEM ([MEL 96], [BEL 99]) qui ne permettent de gérer que la rupture de structures minces (sans process zone) pour lesquelles la mécanique de la rupture linéaire est adaptée. La dissipation volumique résultant de phénomènes de plasticité ou d'endommagement diffus est prise en compte par l'intermédiaire de modèles continus classiques. La dissipation surfacique produite au niveau des zones de localisation est, quant à elle, prise en compte par une loi discrète « traction-saut de déplacement ». Nous présentons ici la formulation d'un tel modèle dans le cadre des matériaux plastiques ainsi qu'endommageables. Dans une première partie, après quelques rappels sur l'écriture des modèles continus, nous nous attardons sur les modifications liées à l'introduction d'une discontinuité du champ de déplacement, les conditions d'introduction d'une telle discontinuité ainsi que les lois discrètes « traction-saut de déplacement ». L'implantation numérique d'un tel modèle est, dans un deuxième temps, présentée. Enfin, nous présentons quelques exemples numériques considérant des matériaux élastoplastiques et endommageables.

Divers qualificatifs sont utilisés dans le reste de l'article afin de définir les modèles, champs de déplacements et champs de déformation. Concernant les modèles, le

modèle relatif au matériau hors discontinuité, celui relatif à la discontinuité sera qualifié de « discret ». Pour ce qui concerne les déplacements, le champ de déplacement se décompose en une partie *continue* et une partie *discontinue* conduisant ainsi à un champ de déformation se décomposant en une partie *régulière* et une partie *singulière* (au sens des distributions).

2. Formulation théorique

Comme nous venons de l'évoquer dans l'introduction, l'approche proposée ici est capable de tenir compte simultanément de deux types de dissipation :

- *une dissipation volumique* ou diffuse qui a lieu à l'échelle de la structure ou échelle « macro » et qui sera décrite par l'intermédiaire des *modèles continus classiques*.

- *une dissipation surfacique* ou localisée qui a lieu à l'échelle des zones de localisation ou échelle « micro » et qui sera prise en compte par l'introduction de *lois discrètes* « traction-saut de déplacement ».

Les grandeurs relatives à ces deux classes de modèles sont, dans la suite, respectivement surmontées d'une barre et deux barres. Après quelques rappels concernant l'écriture des modèles continus classiques de plasticité et d'endommagement, nous présentons les modifications nécessaires à la prise en compte d'une discontinuité du champ de déplacement.

2.1. Phénomènes dissipatifs diffus : les modèles continus classiques

Nous allons, dans la suite, nous attacher à définir et rappeler les ingrédients nécessaires à la construction des modèles continus classiques utilisés dans le cadre de notre étude.

2.1.1. Modèles élastoplastiques

Nous considérons un modèle continu élastoplastique avec écrouissage isotrope. Le critère de plasticité retenu est le critère de von Mises. Le tableau 1 résume les différents ingrédients nécessaires à la construction d'un tel modèle : $\dot{\gamma}$ est un multiplicateur de Lagrange et $\bar{K} = d^2\bar{\Xi}(\bar{\xi})/d\bar{\xi}^2$. Les équations d'évolution des variables internes sont déduites de l'expression de la dissipation plastique par l'utilisation du principe du maximum de dissipation.

2.1.2. Modèles continus d'endommagement

Nous considérons un modèle d'endommagement isotrope [MAZ 84]. Les points clés de l'écriture d'un tel modèle sont consignés dans le tableau 2. Le modèle est écrit de façon parfaitement parallèle aux modèles de plasticité présentés précédemment.

Modèle constitutif	
Variables d'état/associées	$(\bar{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}), (\bar{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\sigma}), (\xi, \bar{q})$
Énergie libre de Helmholtz	$\bar{\psi}(\bar{\varepsilon}^e, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^e \cdot \mathbf{C} \bar{\varepsilon}^e + \bar{\Xi}(\bar{\xi})$
Fonction seuil	$\bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ \mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\ - (\bar{\sigma}_y - \bar{q}) \leq 0$
Équations d'évolution	
Dissipation plastique	$0 \leq \bar{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \bar{q} \dot{\bar{\xi}}$
Équations d'évolution des variables internes	$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]}{\ \mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\ }$ $\dot{\bar{\xi}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} = \dot{\gamma}$
Équations d'évolution des contraintes	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{ep}} : \dot{\bar{\varepsilon}}$ $\mathbf{C}^{\text{ep}} = \mathbf{C}^e$ si $\dot{\gamma} = 0$ $= \mathbf{C}^e - \frac{(\mathbf{C}^e : \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) \otimes (\mathbf{C}^e : \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}})}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \bar{K} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} \right)^2}$ si $\dot{\gamma} > 0$

Tableau 1. *Modèle élastoplastique*

Ceci permet, entre autres, de garantir la robustesse de l'implantation numérique du modèle et permet l'écriture du module tangent. Les variables internes du modèle sont le tenseur de complaisance du matériau $\bar{\mathbf{D}}$ ($\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{C}^{-1}$ où \mathbf{C} est le tenseur d'élasticité éventuellement endommagé) et la variable d'écroutissage $\bar{\xi}$.

Modèle constitutif	
Variables d'état/associées	$(\bar{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}), (\bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{Y}}), (\xi, \bar{q})$
Énergie libre de Helmholtz	$\bar{\psi}(\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} : \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\varepsilon} + \bar{\Xi}(\bar{\xi})$
Fonction seuil	$\bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q}) = \underbrace{\sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\sigma}}}_{\ \boldsymbol{\sigma}\ _{\mathbf{D}^e}} - \frac{1}{\sqrt{E}} (\bar{\sigma}_f - \bar{q}) \leq 0$
Équations d'état	$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\varepsilon}$ et $\bar{q} = -\frac{d}{d\xi} \bar{\Xi}(\bar{\xi})$
Equations d'évolution	
Dissipation	$0 < \mathcal{D} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} : \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\varepsilon} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}}$
Évolution des variables internes	$\dot{\bar{\mathbf{D}}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{\ \boldsymbol{\sigma}\ _{\mathbf{D}^e}} ; \dot{\bar{\xi}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}}$
Évolution des contraintes	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{ed}} : \dot{\bar{\varepsilon}}$ $\mathbf{C}^{\text{ed}} = \bar{\mathbf{D}}^{-1}$ si $\dot{\gamma} = 0$ $= \bar{\mathbf{D}}^{-1} - \frac{(\bar{\mathbf{D}}^{-1} : \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) \otimes (\bar{\mathbf{D}}^{-1} : \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}})}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \bar{K} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} \right)^2}$ si $\dot{\gamma} > 0$

Tableau 2. *Modèle élastoendommageable*

$\bar{\mathbf{Y}}$ note la force thermodynamique associée à $\bar{\mathbf{D}}$. On a dans le cas traité : $\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}$.

2.2. Discontinuités de déplacement : les phénomènes dissipatifs localisés

Les phénomènes localisés à l'échelle des bandes de localisation sont, quant à eux, pris en compte *via* l'introduction de discontinuités du champ de déplacement. À l'échelle de la structure, les bandes de localisation de faibles épaisseurs peuvent, en effet, être vues comme des discontinuités du champ de déplacement. Afin de prendre en compte, à l'échelle « macro », les phénomènes dissipatifs ayant lieu à l'échelle « micro » (bandes de localisation), une loi de comportement dissipative reliant traction et saut de déplacement sur la surface de discontinuité est introduite. Dans la suite, nous présentons les modifications liées à l'introduction d'une surface de discontinuité de déplacement dans un milieu continu. L'écriture de la loi de comportement associée à la surface de discontinuité ainsi que l'obtention de la condition d'introduction de cette surface sont ensuite discutées.

2.2.1. Cinématique de la discontinuité

Considérons un domaine Ω séparé en deux sous-domaines Ω^+ et Ω^- par la surface Γ_s , surface de discontinuité du champ de déplacement. Le champ de déplacement et le champ de déformation s'écrivent :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)\mathcal{H}_{\Gamma_s} \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + (\bar{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \mathbf{n})^s \delta_{\Gamma_s} \quad [1]$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface de discontinuité, \mathcal{H}_{Γ_s} est la fonction de Heaviside ($\mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \in \Omega^-$ et $\mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in \Omega^+$) et δ_{Γ_s} note la distribution de Dirac et $\bar{\bar{\mathbf{u}}}$ le saut de déplacement sur Γ_s . Le champ de déplacement $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ est continu.

Il est alors possible de montrer, à partir de cette expression du champ de déformation et en tenant compte du fait que le champ de contrainte doit rester borné (afin d'assurer que la puissance des efforts intérieurs reste finie), que les variables internes peuvent se décomposer en une partie régulière correspondant au modèle continu et une partie singulière associée à la surface de discontinuité :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + \bar{\bar{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}, t)\delta_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad [2]$$

où \mathbf{v} désigne le vecteur des variables internes. De la même façon, le multiplicateur de Lagrange $\dot{\gamma}$ est décomposé en une partie continue et une partie discontinue :

$$\dot{\gamma} = \dot{\bar{\gamma}} + \dot{\bar{\bar{\gamma}}}\delta_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad [3]$$

2.2.2. Analyse de la dissipation

Il est alors possible de décomposer l'énergie libre de Helmholtz en une partie continue et une partie singulière de telle façon que :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) = \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})\delta_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad [4]$$

où $\bar{\psi}$ est associée au modèle continu et $\bar{\bar{\psi}}$ correspond au modèle discret associé à la surface de discontinuité.

En considérant l'expression de la dissipation :

$$0 \leq \mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{d}{dt} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) \quad [5]$$

et les expressions des déformations et de l'énergie libre, on peut également décomposer la dissipation en une partie singulière et une partie régulière :

$$0 \leq \mathcal{D} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{d}{dt} \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}})}_{\bar{\mathcal{D}}} + \underbrace{\left(\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} - \frac{d}{dt} \bar{\psi}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \right)}_{\bar{\mathcal{D}}} \delta_{\Gamma_s} \quad [6]$$

où $\mathbf{t}_{\Gamma_s} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_s}$. $\bar{\mathcal{D}}$ rend compte de l'énergie dissipée dans le volume alors que $\bar{\mathcal{D}}$ représente l'énergie dissipée à l'échelle « micro » au niveau de la bande de localisation matérialisée par la surface de discontinuité.

2.2.3. Loi discrète sur la discontinuité

La dissipation $\bar{\mathcal{D}}$ qui a lieu au niveau de la surface de discontinuité est prise en compte et contrôlée par l'introduction d'une fonction seuil pour la discontinuité. Le domaine élastique est alors défini, de façon générique, par :

$$\bar{\phi}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = \hat{\phi}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}) - (\bar{\sigma}_f - \bar{q}) \leq 0 \quad [7]$$

Dans notre travail, la fonction $\bar{\phi}$ choisie pour représenter le comportement des bandes de cisaillement dans le cas des matériaux élastoplastiques est une loi du type loi de Schmidt [ASA 83] de façon à représenter un mode de fonctionnement localisé du type mode II. Dans le cas de l'analyse réalisée sur le modèle de matériau endommageable, la fonction seuil choisie s'écrit sous la forme d'un critère à deux surfaces : une surface permet de relier les composantes normales de la traction et du saut de déplacement, l'autre relie les composantes tangentielles. Ces deux surfaces sont couplées par l'intermédiaire de la variable associée à l'écrouissage sur Γ_s : \bar{q} :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = |\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}| - (\bar{\sigma}_f - \bar{q}) \leq 0 \\ \bar{\phi}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} - (\bar{\sigma}_s - \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \bar{q}) \leq 0 \end{cases} \quad [8]$$

La construction des modèles discrets permettant de reproduire le comportement des bandes de localisation se fait de façon tout à fait similaire aux modèles continus classiques présentés précédemment et ce, en s'appuyant sur la thermodynamique des interfaces. Ceci fournit l'évolution des variables internes, les lois d'état et les équations d'évolution des tractions.

Il est à noter que la fonction seuil [8] permet de définir, outre l'évolution du domaine élastique, le critère d'introduction de la surface de discontinuité : cette dernière est introduite dans Ω dès que $|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}| = \bar{\sigma}_f$.

3. Implantation numérique

Nous allons essentiellement nous attarder sur les modifications nécessaires à la prise en compte de discontinuités du champ de déplacement dans les méthodes éléments finis.

3.1. Enrichissement cinématique : la méthode des modes incompatibles

Avant l'introduction de toute discontinuité, la discrétisation des équations d'équilibre conduit à la résolution de l'équation dont les inconnues sont les déplacements nodaux :

$$\begin{cases} \mathbf{A} \sum_{e=1}^{Nel} [\mathbf{f}^{int,e}(t) - \mathbf{f}^{ext,e}(t)] = \mathbf{0} \\ \text{avec } \mathbf{f}^{int,e}(t) = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(t) d\Omega^e, t \in [0, T] \end{cases} \quad [9]$$

où $(\cdot)^{ext,e}$ et $(\cdot)^{int,e}$ désignent respectivement les contributions élémentaires aux efforts extérieurs et intérieurs. L'opérateur « \mathbf{A} » est l'opérateur d'assemblage et Ω^e est un domaine élémentaire. Les valeurs de $\boldsymbol{\sigma}(t)$ sont obtenues par intégration des équations présentées à la section 2.1.

Lorsque la localisation est détectée, la base des fonctions de forme de l'élément concerné doit être enrichie par une fonction de forme présentant une discontinuité. Une telle fonction $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ est représentée pour un élément triangulaire à 3 nœuds sur la figure 1.

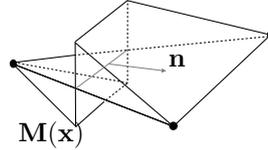


Figure 1. Fonction de forme \mathbf{M} pour un élément TRI3

L'interpolation des champs de déformation réels et virtuels est alors donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}_r \bar{\mathbf{u}}, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}\mathbf{w} + \mathbf{G}_v \bar{\bar{\boldsymbol{\beta}}} \quad [10]$$

où $\mathbf{G}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{M}$ avec \mathbf{L} la matrice associée à l'opérateur ∇^s . \mathbf{w} et $\bar{\bar{\boldsymbol{\beta}}}$ désignent, respectivement, le champ de déplacement et le champ de saut de déplacement virtuels. \mathbf{G}_v est une fonction de mode incompatible modifiée qui garantit la vérification du « patch test » [IBR 91] :

$$\mathbf{G}_v = \mathbf{G}_r - \frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_r d\Omega^e \quad [11]$$

Vu la forme de \mathbf{M} , \mathbf{G}_r se décompose en une partie continue $\bar{\mathbf{G}}_r$ et une partie discontinue $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_r$ (il en est de même pour \mathbf{G}_v). Avec ce choix d'interpolation pour les champs de déformation réels et virtuels, le problème discrétisé prend la forme des équations obtenues dans le cadre de la méthode des modes incompatibles ([WIL 90], [WIL 73]) :

$$\begin{cases} \mathbf{A} \sum_{e=1}^{Nel} [\mathbf{f}^{int,e}(t) - \mathbf{f}^{ext,e}(t)] = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^e = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{G}}_v^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega^e + \int_{\Gamma_s} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v^T \mathbf{t}_{\Gamma_s} d\Gamma_s = \mathbf{0}, \forall e \in [1, Nel] \end{cases} \quad [12]$$

L'équation d'équilibre global est complétée par une équation d'équilibre local écrite pour chaque élément localisé qui correspond à la forme faible de l'équation de continuité des tractions le long de Γ_s . $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{t}_{Γ_s} sont calculées à partir des équations présentées dans le tableau 2 et des mêmes équations écrites pour la surface de discontinuité.

3.2. Résolution globale et locale

La linéarisation de la deuxième équation du système [12] conduit à l'équation :

$$\begin{aligned} L(\mathbf{h}^e) = \mathbf{h}^{e(i)} + \mathbf{F}_v^T \Delta \mathbf{d}^{(i)} + \mathbf{H}^{(i)} \Delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}^{(i)} \\ + \underbrace{\int_{\Gamma_s} \bar{\mathbf{G}}_v \frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}}{\partial \mathbf{d}} d\Gamma_s}_{\mathbf{K}_d^{(i)}} \Delta \mathbf{d}^{(i)} + \underbrace{\int_{\Gamma_s} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v \frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}}{\partial \bar{\bar{\mathbf{u}}}} d\Gamma_s}_{\mathbf{K}_\alpha^{(i)}} \Delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}^{(i)} = 0 \end{aligned} \quad [13]$$

Le système linéarisé à résoudre s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(i)} & \mathbf{F}_r^{(i)} \\ \mathbf{F}_v^T + \mathbf{K}_d^{(i)} & \mathbf{H}^{(i)} + \mathbf{K}_\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^{(i)} \\ \Delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int(i)} \\ -\mathbf{h}^{e(i)} \end{bmatrix} \quad [14]$$

où,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{ep/ed} \mathbf{B} d\Omega & \mathbf{F}_r &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{ep/ed} \bar{\mathbf{G}}_r d\Omega \\ \mathbf{F}_v &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{ep/ed} \bar{\mathbf{G}}_v d\Omega & \mathbf{H} &= \int_{\Omega} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v^T \mathbf{C}^{ep/ed} \bar{\mathbf{G}}_r d\Omega \end{aligned} \quad [15]$$

avec $\mathbf{C}^{ep/ed}$ le module *tangent* consistant élastoplastique ou élastoendommageable.

L'équation d'équilibre local est résolue au niveau élémentaire de façon à déterminer le saut de déplacement $\bar{\bar{\mathbf{u}}}$. Après condensation statique, la résolution du problème se réduit à la résolution de l'équation classique :

$$\hat{\mathbf{K}}^{(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int(i)} \quad [16]$$

où $\widehat{\mathbf{K}}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} - \mathbf{F}_r^{(i)} \left(\mathbf{H}^{(i)} + \mathbf{K}_\alpha^{(i)} \right)^{-1} \left(\mathbf{F}_v^{T(i)} + \mathbf{K}_d^{(i)} \right)$ prend en compte au niveau « macro » le comportement à l'échelle de la bande de localisation.

Le schéma de résolution comprend ainsi trois niveaux : le niveau global permet de déterminer le champ de déplacements nodaux, le niveau élémentaire permet, par la résolution de l'équation d'équilibre élémentaire, de calculer le saut de déplacement, enfin, l'intégration des lois de comportement au niveau des points de Gauss fournit l'état de contrainte et de traction.

4. Quelques résultats numériques

4.1. Test de cisaillement simple sur matériau élastoplastique

Ce premier exemple présente les résultats obtenus pour un test de cisaillement simple en déformations planes. La géométrie est maillée avec des éléments Q4, l'interpolation des déformations est modifiée en utilisant la méthode B-bar ([HUG 79], [HUG 87]) de façon à pallier les problèmes de blocages liés à la quasi-incompressibilité des déformations. De plus, pour mettre en évidence l'objectivité de la solution par rapport à la discrétisation, le calcul est mené pour deux maillages différents (figure 2).

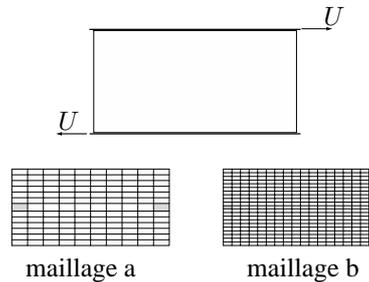


Figure 2. Maillages considérés et conditions aux limites

La géométrie testée est un rectangle de 20 cm sur 10 cm. Les paramètres matériau utilisés pour réaliser le test sont donnés dans le tableau 3. Pour la partie continue du comportement, une loi d'érouissage exponentiel avec saturation ($\bar{\beta}$ et $\bar{\sigma}_\infty$) a été choisie.

La courbe de réponse pour les deux maillages considérés (figure 3) permet de conclure à l'objectivité de la solution vis-à-vis de la discrétisation EF : les courbes de réponse sont quasi identiques ; l'évaluation de la charge limite ultime et de l'énergie dissipée donnent, dans les deux cas, les mêmes résultats. Les deux mécanismes de dissipation sont reproduits : on observe trois phases dans le comportement :

- une première phase correspond à la réponse élastique de la structure ;

– la deuxième phase correspond à la phase de dissipation diffuse entamée dès lors que la fonction seuil est violée. Cette phase se poursuit jusqu'à l'apparition d'une première surface de discontinuité (matérialisé par les points sur la courbe). Les surfaces se propagent alors pour traverser de part en part le barreau, le pic de la courbe effort / déplacement est alors atteint ;

– la dernière phase du comportement est alors entamée. La structure entre dans la phase post-pic de son comportement, seules les surfaces de discontinuité sont actives.

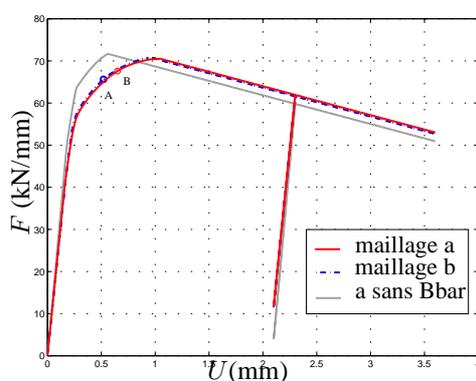


Figure 3. Réponse effort/déplacement imposé sur le bord haut de la barre

Modèle continu	
Module d'Young	210 GPa
Coefficient de Poisson	0.4999
$\bar{\sigma}_y / \bar{\sigma}_\infty$	0.55 GPa / 0.75 GPa
$\bar{\beta} / \bar{K}$	200 / -1.8 GPa
Paramètre de la loi discrète	
\bar{K}	-0.05 GPa/mm

Tableau 3. Paramètres des modèles continus et discrets

Afin de mettre en évidence l'importance du couplage de la méthode à la méthode B-bar, un calcul est réalisé en ne considérant que la méthode à discontinuité forte. La courbe de réponse, dans ce cas, présente une rigidité plus importante dans la phase de dissipation volumique. Ceci est caractéristique des phénomènes de blocage liés à la quasi-incompressibilité.

4.2. Test de traction simple

On considère pour le matériau un modèle d'endommagement isotrope [MAZ 84] tel que celui présenté précédemment. Un test de traction simple est réalisé sur un barreau de 20 cm sur 10 cm (épaisseur unitaire). Un défaut a été introduit en réduisant la contrainte limite $\bar{\sigma}_f$ de deux éléments situés sur la partie basse du maillage. La loi d'adoucissement choisie pour la discontinuité est une loi exponentielle qui conduit à une relation linéaire « traction-saut de déplacement ».

À nouveau, afin de mettre en évidence le caractère régularisant de la méthode, le test est réalisé en considérant deux maillages (figure 4) : l'un grossier et non structuré et l'autre fin et structuré.

Modèle continu	
Module d'Young	38 GPa
Coefficient de Poisson	0.18
$\bar{\sigma}_f$	2 MPa
\bar{K}	1000 MPa
Modèle discret	
$\bar{\sigma}_f$	2.55 MPa (2.5 MPa (élément affaibli))
$\bar{\sigma}_s/\bar{\sigma}_f$	0.3
$\bar{\beta}_f$	2.55 MPa/mm

Tableau 4. Propriétés du matériau hors discontinuité et sur la discontinuité

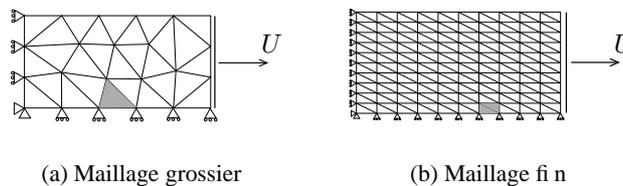


Figure 4. Maillages, conditions aux limites et éléments affaiblis

La figure 5 donne l'évolution de l'effort en fonction du déplacement imposé u . Là encore, la méthode permet de reproduire, jusqu'à rupture complète, le comportement de façon indépendante de la discrétisation.

Le calcul de la longueur cumulée de surface de discontinuité pour les deux maillages donnent $\ell = 157$ mm pour le maillage grossier et $\ell = 133$ mm pour le maillage fin. Malgré cette différence, les courbes de réponse effort/déplacement et l'énergie dissipée restent les mêmes pour les deux maillages. La méthode permet donc la régularisation de la solution de façon robuste.

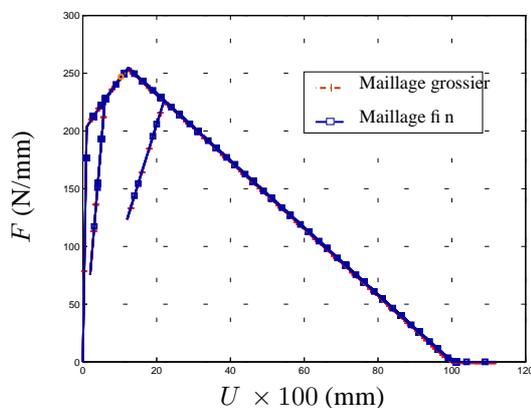


Figure 5. Courbes effort mesuré/déplacement imposé à l'extrémité libre

Notons que pour des cas de chargements plus complexes, il n'est pas nécessaire d'affaiblir des éléments, l'hétérogénéité du chargement suffit à déclencher la localisation et donc l'introduction de surface de discontinuité.

5. Conclusion

Le modèle proposé est donc capable de prendre en compte à l'échelle de la structure des phénomènes dissipatifs ayant lieu à des échelles beaucoup plus fines dites échelle « micro » correspondant aux zones de localisation. Ceci est réalisé par l'introduction de discontinuités du champ de déplacement au niveau desquelles est prise en compte la dissipation surfacique localisée. Cette méthode permet de rendre compte, du point de vue de l'énergie dissipée, de phénomènes ayant lieu à des échelles très différentes tout en conservant une finesse de maillage compatible avec la taille de la structure étudiée.

D'autre part, la prise en compte d'une dissipation volumique *i.e.* de la contribution des « process-zones » permet de mieux définir l'orientation des fissures conduisant à la rupture finale de la structure, dans le cas de structures massives.

6. Bibliographie

- [ASA 83] ASARO R., « Micromechanics of crystals and polycrystals », *Advanced in Applied Mechanics*, vol. 23, 1983, p. 1-115.
- [BAŽ 84] BAŽANT Z.P., BELYTSCHKO T., CHANG T.P., « Continuum Theory for Strain Softening », *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, n° 12, 1984, p. 1666-1691.

- [BEL 99] BELYTSCHKO T., BLACK T., « Elastic Crack Growth in Finite Elements With Minimal Remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, n° 5, 1999, p. 601-620.
- [BOR 92] DE BORST R., MUHLHAUS H.B., PAMIN J., SLUYS L.J., « Computational Modelling of Localisation of Deformation », *Computational Plasticity III*, Owen and Onate eds, 1992, p. 483-502.
- [HUG 79] HUGHES T.J.R., « Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, n° 9, 1979, p. 1413-1418.
- [HUG 87] HUGHES T.J.R., *The Finite Element Methods*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N.J., 1987.
- [IBR 91] IBRAHIMBEGOVIĆ A., WILSON E.L., « A modified method of incompatible modes », *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 7, 1991, p. 187-194.
- [IBR 03] IBRAHIMBEGOVIĆ A., BRANCHERIE D., « Combined hardening and softening constitutive model of plasticity : precursor to shear slip line failure », *Computational Mechanics*, vol. 31, 2003, p. 88-100.
- [JIR 01] JIRÁSEK M., ZIMMERMANN T., « Embedded crack model : II. Combination with smeared cracks », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, 2001, p. 1291-1305.
- [MAZ 84] MAZARS J., « Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire du béton de structure », Thèse de doctorat, Thèse de doctorat de l'université de Paris 6, 1984.
- [MEL 96] MELENK J.M., BABUŠKA I., « The partition of unity finite element method : Basic theory and applications », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 136, 1996, p. 289-314.
- [NEE 88] NEEDLEMAN A., « Material Rate Dependence and Mesh Sensitivity in Localization Problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 63, 1988, p. 69-85.
- [PIJ 87] PIAUDIER-CABOT G., BAŽANT ., « Nonlocal damage theory », *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113, 1987, p. 1512-1533.
- [WEL 01] WELLS G.N., SLUYS L.J., « A new method for modelling cohesive cracks using finite elements », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, 2001, p. 2667-2682.
- [WIL 73] WILSON E.L., TAYLOR R.L., DOHERTY W.P., GHABOUSSI J., « Incompatible displacement models », FENVES S., AL., Eds., *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, p. 43-57, Academic Press, 1973.
- [WIL 90] WILSON E.L., IBRAHIMBEGOVIĆ A., « Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 7, 1990, p. 229-241.