
Atténuation des vibrations de structures par traitement piézoélectrique/viscoélastique en utilisant un modèle à dérivées fractionnaires

Ana Cristina Galucio — Jean-François Deü — Roger Ohayon

Conservatoire National des Arts et Métiers
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés
2 rue Conté, F-75003 Paris
galucio@cnam.fr, deu@cnam.fr, ohayon@cnam.fr

RÉSUMÉ. Ce travail présente une formulation éléments finis de poutre sandwich adaptative pour l'atténuation des vibrations. La poutre est composée d'un cœur viscoélastique et des peaux stratifiées élastiques/piézoélectriques. Le couplage électromécanique est pris en compte par une modification de la matrice de rigidité des peaux. La formulation éléments finis proposée ne possède pas de degré de liberté électrique. Pour décrire le comportement viscoélastique du cœur, le modèle fractionnaire de Zener est utilisé. La résolution des équations de mouvement est réalisée par un schéma d'intégration de Newmark combiné à l'approximation de Grünwald pour les dérivées fractionnaires.

ABSTRACT. This work presents a finite element formulation for vibration reduction of an adaptive sandwich beam composed of a viscoelastic core and elastic/piezoelectric laminated faces. The electromechanical coupling is taken into account by modifying the stiffness matrix of the piezoelectric layers. The finite element formulation has no electrical degrees-of-freedom. The fractional derivative Zener model is used to characterize the viscoelastic behavior of the core. Equations of motion are solved using a direct time integration method based on the Newmark scheme in conjunction with the Grünwald approximation of fractional derivatives.

MOTS-CLÉS : traitement amortissant, matériau piézoélectrique, viscoélasticité, dérivées fractionnaires, poutre sandwich, éléments finis, dynamique transitoire.

KEYWORDS: damping treatment, piezoelectric material, viscoelasticity, fractional derivatives, sandwich beam, finite element, transient dynamics.

1. Introduction

Les recherches sur la modélisation par éléments finis de structures munies de matériaux viscoélastiques et piézoélectriques pour l'atténuation de vibrations structurales se sont beaucoup développées ces dernières années. Ces traitements, appelés hybrides actif/passif, sont fortement tributaires de la modélisation mécanique du comportement du matériau viscoélastique. Parmi les divers modèles viscoélastiques existants, le modèle le plus courant est celui qui utilise le concept de module complexe. Une approche plus précise du comportement viscoélastique est basée sur le concept de modèle à variables internes qui permet de prendre en compte la dépendance en fréquence dans le domaine temporel. Dans ce contexte, on peut distinguer le modèle par mini oscillateurs dit GHM [GOL 85] et le modèle ADF (Anelastic Displacement Field) [LES 95]. Une évaluation comparative de ces modèles sur une poutre à revêtement contraint hybride a été effectuée dans [TRI 00] montrant ainsi la supériorité des modèles à variables internes. Néanmoins, de tels modèles introduisent un nombre relativement prohibitif de degrés de liberté internes. L'introduction de dérivées d'ordre fractionnaire dans la loi de comportement du matériau viscoélastique permet de remédier à cet inconvénient. Des solutions dans le domaine temporel pour le modèle fractionnaire de Zener (modèle à quatre paramètres) ont été étudiées dans [ENE 99, GAL 04, SCH 01], entre autres.

Dans ce travail, nous proposons une formulation éléments finis pour l'analyse dynamique de poutres sandwich adaptatives avec traitement hybride actif/passif. La poutre est composée d'un cœur viscoélastique (théorie de Timoshenko) contraint par des peaux stratifiées élastiques munies de pastilles piézoélectriques (théorie d'Euler-Bernoulli). Le couplage électromécanique est pris en compte à travers la modification de la matrice de rigidité des peaux piézoélectriques. Cette approche ne nécessite pas de degré de liberté électrique. En ce qui concerne l'amortissement viscoélastique, la version à dérivée fractionnaire du modèle de Zener est utilisée [BAG 83]. Ce choix est lié au nombre réduit de paramètres nécessaires pour prendre en compte la dépendance en fréquence du matériau sur une large bande de fréquence. Concernant l'implémentation éléments finis du modèle à dérivée fractionnaire, l'idée est d'utiliser le formalisme de Grünwald combiné à un schéma d'intégration de Newmark. Les exemples traités permettent de montrer l'influence de la troncature de la série de Grünwald sur les réponses dynamiques de la structure et l'intérêt d'ajouter une composante active (pastille piézoélectrique) pour atténuer les vibrations.

2. Principales hypothèses et modèles de comportement

2.1. Hypothèses cinématiques

Considérons une poutre sandwich composée de peaux stratifiées élastiques/piézoélectriques et d'un cœur viscoélastique. La théorie de Timoshenko est appliquée au cœur, tandis que la théorie d'Euler-Bernoulli est appliquée aux peaux. Le champ de déplacements dans la i -ème couche de la poutre sandwich peut être écrit sous la forme :

$$u_{xi}(x, z, t) = u_i(x, t) - (z - z_i)\theta_i(x, t) \quad , \quad u_{zi}(x, z, t) = w(x, t) \quad [1]$$

où l'indice $i = a, b, c$ représente respectivement les couches supérieure, inférieure et centrale, u_{xi} et u_{zi} sont les déplacements axial et transverse de chaque couche, u_i et θ_i sont le déplacement axial de la ligne moyenne et la rotation dans chaque couche et w est le déplacement transverse. Dans la suite, on utilisera les déplacements axiaux moyen et relatif de chaque couche, qui sont définis par $\bar{u} = (u_a + u_b)/2$ et $\tilde{u} = u_a - u_b$.

D'après les hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les peaux ($\theta_k = w'$ pour $k = a, b$ avec $(\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$) et les conditions de continuité des déplacements entre les couches ($u_{xa} = u_{xc}$ en $z = h_c/2$ et $u_{xb} = u_{xc}$ en $z = -h_c/2$), les déplacements axiaux et les rotations peuvent être réécrits en fonction de w' et des variables \bar{u} et \tilde{u}

$$u_a = \bar{u} + \frac{\tilde{u}}{2}, \quad u_b = \bar{u} - \frac{\tilde{u}}{2}, \quad u_c = \bar{u} + \frac{\tilde{h}}{4}w', \quad \theta_a = \theta_b = w', \quad \theta_c = -\frac{\tilde{u} + \bar{h}w'}{h_c} \quad [2]$$

où $\bar{h} = (h_a + h_b)/2$ et $\tilde{h} = h_a - h_b$.

À l'aide des relations [1] et [2] et en prenant en compte l'hypothèse de contrainte plane, on peut écrire la déformation axiale de la i -ème couche ε_{1i} et la déformation de cisaillement du cœur ε_{5c} sous la forme :

$$\varepsilon_{1i} = \varepsilon_i + (z - z_i)\kappa_i, \quad \varepsilon_{5c} = \gamma_c \quad [3]$$

où la déformation de membrane ε_i et la courbure κ_i de la i -ème couche, ainsi que la déformation de cisaillement du cœur γ_c sont définies par :

$$\varepsilon_a = \bar{u}' + \frac{\tilde{u}'}{2}, \quad \varepsilon_b = \bar{u}' - \frac{\tilde{u}'}{2}, \quad \kappa_a = \kappa_b = -w'' \quad [4]$$

$$\varepsilon_c = \bar{u}' + \frac{\tilde{h}}{4}w'' \quad , \quad \kappa_c = \frac{\tilde{u}' + \bar{h}w''}{h_c} \quad , \quad \gamma_c = \frac{\tilde{u}}{h_c} + \left(1 + \frac{\bar{h}}{h_c}\right)w' \quad [5]$$

En l'absence de peaux ($h_a = h_b = 0$), les déformations généralisées du cœur correspondent à celles d'une poutre de Timoshenko classique.

2.2. Comportement piézoélectrique

Les sous-couches piézoélectriques des peaux stratifiées sont considérées polarisées dans la direction de l'épaisseur avec un champ électrique appliqué parallèlement à cette polarisation. Ceci caractérise une action piézoélectrique par extension dont le couplage électromécanique se fait entre la composante axiale de la déformation ε_1 et la composante transverse du champ électrique E_3 . La loi de comportement tridimensionnelle pour les matériaux piézoélectriques orthotropes se réduit alors à :

$$\sigma_1 = \bar{c}_{11}\varepsilon_1 - \bar{e}_{31}E_3 \quad , \quad D_3 = \bar{e}_{31}\varepsilon_1 + \bar{d}_{33}E_3 \quad [6]$$

où σ_1 est la contrainte axiale et D_3 le déplacement électrique transverse. Les constantes élastique, piézoélectrique et diélectrique sont respectivement définies par :

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \quad \bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}}, \quad \bar{d}_{33} = d_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}$$

Ces constantes modifiées résultent de l'hypothèse de contrainte transverse nulle et du fait que seule la composante transverse du champ électrique a une influence non négligeable sur le couplage électromécanique. Si les peaux sont élastiques, les constantes piézoélectriques s'annulent, ce qui implique $\bar{e}_{31} = 0$ et $\bar{d}_{33} = d_{33}$. De plus, si le matériau est isotrope, $\bar{c}_{11} = E/(1 - \nu^2)$, où E et ν sont le module d'Young et le coefficient de Poisson.

On suppose dans ce travail que le potentiel électrique est linéaire par sous-couche piézoélectrique (indice k_j)

$$\phi_{k_j}(x, z, t) = \bar{\phi}_{k_j}(x, t) + (z - z_{k_j}) \frac{V_{k_j}(x, t)}{h_{k_j}} \quad [7]$$

où $z_{k_j} = \pm(h_{k_j} + h_c)/2 \pm \sum_{r=1}^{j-1} h_{k_r}$, $\bar{\phi}_{k_j} = (\phi_{k_j}^+ + \phi_{k_j}^-)/2$ et $V_{k_j} = \phi_{k_j}^+ - \phi_{k_j}^-$. Les signes $+$ et $-$ symbolisent les surfaces supérieure et inférieure de la couche. Le champ électrique est donc constant sur l'épaisseur de la pastille piézoélectrique

$$E_{3k_j} = -\frac{\partial \phi_{k_j}}{\partial z} = -\frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \quad [8]$$

2.3. Modèle viscoélastique unidimensionnel

2.3.1. Loi de comportement

Nous utilisons dans ce travail le modèle fractionnaire de Zener pour décrire le comportement du cœur viscoélastique. De plus, nous supposons que le module d'Young est proportionnel au module de cisaillement, c'est-à-dire que le coefficient de Poisson est indépendant de la fréquence. La loi de comportement du matériau viscoélastique s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\sigma_i + \tau^\alpha \mathcal{D}^\alpha \sigma_i = \xi_i \left(\varepsilon_i + \tau^\alpha \frac{E_\infty}{E_o} \mathcal{D}^\alpha \varepsilon_i \right) \quad \text{pour } i = 1, 5 \quad [9]$$

où E_o et E_∞ sont les modules élastiques relaxé et non relaxé, α l'ordre de la dérivée fractionnaire ($0 < \alpha < 1$) et τ le temps de relaxation. L'indice i correspond aux composantes axiale ($\xi_1 = \frac{E_o \nu}{1 - \nu^2}$) et de cisaillement ($\xi_5 = \frac{E_o}{2(1 + \nu)}$). L'opérateur fractionnaire \mathcal{D}^α , selon la définition de Riemann-Liouville, est :

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t - s)^\alpha} ds \quad [10]$$

où Γ est la fonction gamma.

La transformée de Fourier de l'équation [9] permet d'obtenir l'expression du module complexe d'élasticité :

$$E^*(\omega) = \frac{E_o + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad [11]$$

Cette expression, qui est utilisée dans l'identification des paramètres du modèle, permet de décrire de la dépendance en fréquence intrinsèque aux matériaux viscoélastiques sur une large bande de fréquence [BAG 83].

2.3.2. Identification des paramètres du modèle

L'identification des quatre paramètres du modèle E_o , E_∞ , τ et α peut être réalisée à partir de différents essais dynamiques (en régime transitoire ou harmonique). Pour les matériaux viscoélastiques isotropes, des essais de traction-compression permettent, par exemple, d'identifier le module d'Young et des essais de torsion le module de cisaillement.

À partir de l'équation [11], on peut extraire la partie réelle et la partie imaginaire du module complexe, ce qui fournit respectivement le module élastique :

$$E'(\omega) = \frac{E_o + (E_\infty + E_o)(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + E_\infty(\omega\tau)^{2\alpha}}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + (\omega\tau)^{2\alpha}} \quad [12]$$

et le module de perte du matériau viscoélastique :

$$E''(\omega) = \frac{(E_\infty - E_o)(\omega\tau)^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + (\omega\tau)^{2\alpha}} \quad [13]$$

Ces modules sont positifs quelles que soient la fréquence et la valeur de α , si $E_o \geq 0$, $E_\infty \geq 0$, $E_\infty/E_o \gg 1$ et $\tau \geq 0$. Le facteur de perte $\eta = E''/E'$ est toujours positif grâce à ces hypothèses. Concernant les aspects thermodynamiques du modèle fractionnaire à quatre paramètres, le lecteur peut se référer à l'article de Lion [LIO 97].

Les données expérimentales utilisées pour tracer les courbes maîtresses du matériau viscoélastique ISD112 à 27°C ont été fournies par le fabricant dans un intervalle de fréquence de 20 Hz à 5000 Hz. Ces courbes maîtresses présentent respectivement la partie réelle G' du module de cisaillement complexe et le facteur de perte $\eta = G''/G'$ en fonction de la fréquence (voir figure 1).

En supposant que les valeurs asymptotiques de la partie réelle du module élastique (E_o et E_∞) et la valeur maximale du facteur de perte η_{\max} sont connues, l'ordre de la dérivée fractionnaire α peut être calculé analytiquement à partir de

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\eta_{\max}(E_\infty - E_o) \frac{2\sqrt{E_o E_\infty} + (E_\infty + E_o)\sqrt{1 + \eta_{\max}^2}}{\eta_{\max}^2(E_\infty + E_o)^2 + (E_\infty - E_o)^2} \right] \quad [14]$$

On note que cette expression est indépendante de τ . Le temps de relaxation peut, quant à lui, être obtenu par minimisation de l'écart entre les valeurs théorique et expérimentale du module complexe, par exemple par une méthode des moindres carrés.

À titre de comparaison, les courbes maîtresses du modèle classique de Zener (ou solide standard) et du modèle à dérivées fractionnaires sont tracées sur la figure 1 pour

des valeurs fixées de E_o et E_∞ . On observe que le modèle à dérivées fractionnaires (trait plein) s'approche beaucoup mieux des données expérimentales que le modèle du solide standard (trait interrompu), avec seulement un paramètre supplémentaire.

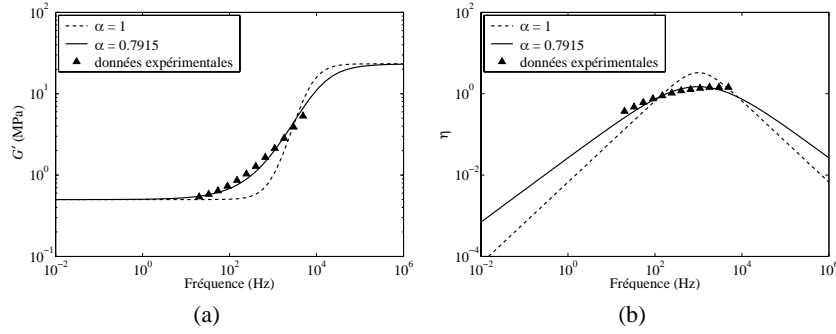


Figure 1. Courbes maîtresses du matériau viscoélastique ISD112 à 27°C : (a) partie réelle du module de cisaillement G' et (b) facteur de perte η

Il est important de noter que le modèle à quatre paramètres utilisé dans ce travail peut être enrichi de façon à prendre en compte l'influence de facteurs environnementaux tels que la température. De plus, la non-symétrie de la courbe maîtresse du facteur de perte par rapport à η_{\max} , observée sur certains polymères, peut être décrite en introduisant deux ordres fractionnaires différents dans l'Équation [9], c'est-à-dire en utilisant un modèle à cinq paramètres [PRI 03].

2.3.3. Approximation des dérivées fractionnaires

L'opérateur fractionnaire D^α , qui apparaît dans la loi de comportement [9], peut être approché par différentes méthodes. Une des plus simples à mettre en œuvre est basée sur la définition de Grünwald qui consiste à approcher l'opérateur fractionnaire par différences finies

$$(D^\alpha f)_n \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{N_t} A_{j+1} f_{n-j} \quad [15]$$

où Δt , supposé fixe, est l'incrément de temps du schéma numérique ($f_n = f(t_n)$ et $t_n = n\Delta t$), N_t la troncature de la série et A_{j+1} les coefficients de Grünwald définis soit à partir de la fonction gamma soit par une formule de récurrence

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} \quad \text{ou} \quad A_{j+1} = \frac{j-\alpha-1}{j} A_j$$

Il est intéressant de noter que ces coefficients sont décroissants lorsque j augmente, ce qui décrit le phénomène de mémoire évanescence. Cela signifie que le comportement du matériau viscoélastique, à un instant donné, dépend plus fortement de l'histoire récente que de celle plus éloignée.

3. Formulation éléments finis

Cette section est consacrée à la formulation éléments finis de la poutre sandwich composée d'un cœur viscoélastique et de peaux stratifiées élastiques/piézoélectriques. La formulation variationnelle est obtenue à partir du principe d'Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0 \quad [16]$$

où $T = T_a + T_b + T_c$ est l'énergie cinétique, $U = U_a + U_b + U_c$ l'énergie interne et W le travail des efforts extérieurs. La variation de l'énergie cinétique pour chaque peau stratifiée (composée de N_k plis) et pour le cœur s'écrit classiquement sous la forme :

$$\delta T_k = - \sum_{j=1}^{N_k} \int_{\Omega_{k_j}} \rho_{k_j} (\ddot{u}_{xk} \delta u_{xk} + \ddot{u}_{zk} \delta u_{zk}) d\Omega \quad \text{avec } k = a, b \quad [17]$$

$$\delta T_c = - \int_{\Omega_c} \rho_c (\ddot{u}_{xc} \delta u_{xc} + \ddot{u}_{zc} \delta u_{zc}) d\Omega \quad [18]$$

Le couplage électromécanique apparaît dans l'écriture de l'énergie interne dont la variation s'écrit, pour les peaux stratifiées (élastiques/piézoélectriques) et pour le cœur (supposé ici élastique), sous la forme suivante :

$$\delta U_k = \sum_{j=1}^{N_k} \int_{\Omega_{k_j}} (\sigma_{1k_j} \delta \varepsilon_{1k} - D_{3k_j} \delta E_{3k_j}) d\Omega \quad \text{avec } k = a, b \quad [19]$$

$$\delta U_c = \int_{\Omega_c} (\sigma_{1c} \delta \varepsilon_{1c} + \sigma_{5c} \delta \varepsilon_{5c}) dV \quad [20]$$

Les déplacements généralisés $\mathbf{d}_e = [\bar{u} \ w \ \tilde{u}]^T$ sont discrétisés avec des fonctions de forme linéaires pour les déplacements moyen et relatif et cubiques pour les déflexions. Ils sont liés au vecteur des degrés de liberté $\mathbf{q}_e = [\bar{u}_1 \ w_1 \ w'_1 \ \tilde{u}_1 | \bar{u}_2 \ w_2 \ w'_2 \ \tilde{u}_2]^T$ par $u_i = \mathbf{H}_{xi} \mathbf{q}_e$, $w = \mathbf{H}_z \mathbf{q}_e$ et $\theta_i = \mathbf{H}_{ri} \mathbf{q}_e$, où l'indice e représente une quantité élémentaire et \mathbf{H}_x , \mathbf{H}_z et \mathbf{H}_r sont les vecteurs d'interpolation associés respectivement aux déplacements axiaux et transverses et aux rotations. De plus, la déformation de membrane, la courbure et la déformation de cisaillement sont définies par $\epsilon_i = \mathbf{B}_{mi} \mathbf{q}_e$, $\kappa_i = \mathbf{B}_{bi} \mathbf{q}_e$ et $\gamma_c = \mathbf{B}_{sc} \mathbf{q}_e$. Les relations entre les opérateurs de déformation-déplacement et les fonctions de forme sont telles que $\mathbf{B}_{mi} = \mathbf{H}'_{xi}$, $\mathbf{B}_{bi} = \mathbf{H}'_{ri}$ et $\mathbf{B}_{sc} = \mathbf{H}_{rc} - \mathbf{H}_{rk}$ ($k = a, b$).

À l'aide des relations précédentes, les variations élémentaires de l'énergie cinétique, de l'énergie interne et du travail des efforts extérieurs s'écrivent respectivement $\delta T_e = -\delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e$, $\delta U_e = \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e^* \mathbf{q}_e$ et $\delta W_e = \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{F}_e^*$. Après assemblage, l'équation de mouvement du système s'écrit :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}^{n+1} + \mathbf{K}^* \mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{F}^{*n+1} \quad [21]$$

où $\mathbf{M} = \mathbf{M}^a + \mathbf{M}^b + \mathbf{M}^c$ est la matrice de masse, \mathbf{K}^* et \mathbf{F}^* sont la matrice de rigidité et le vecteur des efforts extérieurs modifiés pour prendre en compte le comportement viscoélastique du cœur et le couplage électromécanique issu des peaux piézoélectriques. Dans les paragraphes suivants, \mathbf{K}^* et \mathbf{F}^* seront déterminés pour prendre en compte (i) le couplage électromécanique dans les peaux stratifiées et (ii) le comportement viscoélastique du cœur.

3.1. Peaux stratifiées piézoélectriques

La formulation éléments finis proposée pour modéliser le couplage électromécanique des peaux ne nécessite pas de degrés de liberté électriques supplémentaires. La prise en compte du couplage se fait par une modification de la matrice de rigidité des couches piézoélectriques (dans le cas capteur) ou par une modification du chargement imposé (dans le cas actionneur).

De façon classique, les matrices élémentaires de masse et de rigidité de chaque peau stratifiée ($k = a, b$) s'écrivent :

$$\mathbf{M}_e^k = b \int_0^{L_e} [I_0^k (\mathbf{H}_{xk}^T \mathbf{H}_{xk} + \mathbf{H}_z^T \mathbf{H}_z) - I_1^k (\mathbf{H}_{xk}^T \mathbf{H}_{rk} + \mathbf{H}_{rk}^T \mathbf{H}_{xk}) + I_2^k \mathbf{H}_{rk}^T \mathbf{H}_{rk}] dx$$

$$\mathbf{K}_e^k = b \int_0^{L_e} [A^k \mathbf{B}_{mk}^T \mathbf{B}_{mk} + B^k (\mathbf{B}_{mk}^T \mathbf{B}_{bk} + \mathbf{B}_{bk}^T \mathbf{B}_{mk}) + D^k \mathbf{B}_{bk}^T \mathbf{B}_{bk}] dx$$

où les moments d'inertie et les constantes de rigidité sont définis par :

$$\{ [I_0^k, I_1^k, I_2^k], [A^k, B^k, D^k] \} = \sum_{j=1}^{N_k} \{ \rho_{k_j}, \bar{c}_{11}^{k_j} \} [H_0^{k_j}, H_1^{k_j}, H_2^{k_j}]$$

avec $[H_0^{k_j}, H_1^{k_j}, H_2^{k_j}] = \int_{z_{k_j} - h_{k_j}/2}^{z_{k_j} + h_{k_j}/2} [1, (z - z_k), (z - z_k)^2] dz$

Dans le cas où il y a symétrie des couches par rapport à la ligne moyenne de la poutre, le terme de couplage membrane/flexion B^k s'annule.

L'effet piézoélectrique inverse (cas actionneur) est caractérisé par l'apparition d'une déformation mécanique en présence d'un champ électrique. Ce champ électrique est imposé sous forme d'un chargement extérieur écrit en fonction de la différence de potentiel entre les électrodes de la pastille piézoélectrique

$$\hat{\mathbf{F}}_{ek_j}^{n+1} = -b \int_0^{L_e} \bar{e}_{31}^{k_j} V_{k_j}^{n+1} [\mathbf{B}_{mk}^T + (z_{k_j} - z_k) \mathbf{B}_{bk}^T] dx \quad [22]$$

Dans le cas de l'effet piézoélectrique direct (cas capteur), un champ électrique est induit lors de la déformation des pastilles. Cela se traduit par une augmentation de la rigidité de la structure

$$\hat{\mathbf{K}}_e^k = b \int_0^{L_e} \left[\hat{A}^k \mathbf{B}_{mk}^T \mathbf{B}_{mk} + \hat{B}^k (\mathbf{B}_{mk}^T \mathbf{B}_{bk} + \mathbf{B}_{bk}^T \mathbf{B}_{mk}) + \hat{D}^k \mathbf{B}_{bk}^T \mathbf{B}_{bk} \right] dx \quad [23]$$

$$\text{où } \left[\hat{A}^k, \hat{B}^k, \hat{D}^k \right] = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{(\bar{e}_{31}^{kj})^2}{\bar{d}_{33}^{kj}} \left[H_0^{kj}, H_1^{kj}, (H_1^{kj})^2 / H_0^{kj} \right]$$

L'équation de mouvement au niveau élémentaire s'écrit alors :

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e^{n+1} + (\mathbf{K}_e + \hat{\mathbf{K}}_e) \mathbf{q}_e^{n+1} = \mathbf{F}_e^{n+1} + \hat{\mathbf{F}}_{ek_j}^{n+1} \quad [24]$$

Puisque cette formulation éléments finis ne possède pas de degré de liberté électrique, un post-traitement des résultats est nécessaire dans le cas capteur afin de quantifier le voltage induit dans les pastilles. Un modèle éléments finis avec degré de liberté électrique de tension permet d'éviter ce post-traitement, mais augmente cependant la taille du système à résoudre [TRI 01].

3.2. Cœur viscoélastique

Nous nous intéressons ici à la formulation éléments finis du cœur viscoélastique, les peaux stratifiées étant supposées élastiques. En introduisant la variable interne de déformation $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - E_o \sigma_i / (E_\infty \xi_i)$, la loi de comportement [9] peut se réécrire par

$$\bar{\varepsilon}_i + \tau^\alpha D^\alpha \bar{\varepsilon}_i = \frac{E_\infty - E_o}{E_\infty} \varepsilon_i \quad [25]$$

En appliquant la définition de Grünwald (Équation [15]) et en notant que $A_1 = 1$, la forme discrétisée de l'équation précédente est :

$$\bar{\varepsilon}_i^{n+1} = (1 - c) \frac{E_\infty - E_o}{E_\infty} \varepsilon_i^{n+1} - c \sum_{j=1}^{N_i} A_{j+1} \bar{\varepsilon}_i^{n+1-j} \quad [26]$$

où $c = \tau^\alpha / (\tau^\alpha + \Delta t^\alpha)$ est une constante sans dimension. Avec la discrétisation spatiale de l'équation [26] et après quelques manipulations, l'équation de mouvement de la poutre sandwich s'écrit [GAL 04] :

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e^{n+1} + (\mathbf{K}_e + \bar{\mathbf{K}}_e) \mathbf{q}_e^{n+1} = \mathbf{F}_e^{n+1} + \bar{\mathbf{F}}_e^{n+1} \quad [27]$$

où les matrices élémentaires de masse et de rigidité sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e^c &= b \int_0^{L_e} \rho_c \left[h_c (\mathbf{H}_{xc}^T \mathbf{H}_{xc} + \mathbf{H}_z^T \mathbf{H}_z) + \frac{h_c^3}{12} \mathbf{H}_{rc}^T \mathbf{H}_{rc} \right] dx \\ \mathbf{K}_e^c &= b \int_0^{L_e} \left[\frac{E_o}{1 - \nu^2} \left(h_c \mathbf{B}_{mc}^T \mathbf{B}_{mc} + \frac{h_c^3}{12} \mathbf{B}_{bc}^T \mathbf{B}_{bc} \right) + \frac{E_o}{2(1 + \nu)} h_c \mathbf{B}_{sc}^T \mathbf{B}_{sc} \right] dx \end{aligned}$$

et où les termes modifiés sont :

$$\bar{\mathbf{K}}_e = c \frac{E_\infty - E_o}{E_o} \mathbf{K}_e^c \quad [28]$$

$$\bar{\mathbf{F}}_e^{n+1} = -c \frac{E_\infty}{E_o} \mathbf{K}_e^c \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1} \bar{\mathbf{q}}_e^{n+1-j} \quad [29]$$

On peut noter que la matrice de rigidité modifiée est constante si le pas de temps Δt est fixe. De plus, le terme qui dépend de l'histoire des déplacements associés à $\bar{\varepsilon}$ a été placé au second membre de l'Équation [27] afin de faciliter la mise en œuvre numérique. Ces déplacements "anélastiques" sont actualisés à chaque pas de temps à partir de l'expression suivante :

$$\bar{\mathbf{q}}_e^{n+1} = (1 - c) \frac{E_\infty - E_o}{E_\infty} \mathbf{q}_e^{n+1} - c \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1} \bar{\mathbf{q}}_e^{n+1-j} \quad [30]$$

Il est important de souligner que $\bar{\mathbf{q}}$ n'est pas un vecteur de degrés de liberté supplémentaires. Il s'agit simplement d'un artifice numérique utilisé pour décrire le phénomène de mémoire évanescence intrinsèque aux matériaux viscoélastiques.

3.3. Cas général et algorithme de résolution

L'équation générale de mouvement de la poutre sandwich, d'après [24] et [27], est

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}^{n+1} + (\mathbf{K} + \hat{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1} + \hat{\mathbf{F}}^{n+1} + \bar{\mathbf{F}}^{n+1} \quad [31]$$

Pour sa résolution, on utilise un schéma de Newmark (accélération moyenne) à pas de temps constant. La matrice de rigidité modifiée $\bar{\mathbf{K}}$ est constante à chaque pas de temps et donc calculée une seule fois, alors que les vecteurs $\bar{\mathbf{F}}$ et $\hat{\mathbf{F}}$ sont actualisés à chaque pas de temps. $\bar{\mathbf{F}}$ est évalué uniquement à partir de l'histoire récente de $\bar{\mathbf{q}}$ et $\hat{\mathbf{F}}$ dépend de la tension imposée et donc de la loi de contrôle. Le contrôleur choisi dans ce travail est de type dérivatif par rétroaction de la dérivée temporelle de la tension du capteur. La tension V_C induite dans le capteur par les déformations de la poutre est mesurée et envoyée au contrôleur qui calcule sa dérivée temporelle et l'envoie, amplifiée par le gain de contrôle K_d , à l'actionneur comme tension imposée $V_A = -K_d V_C$. Si le gain est nul, il s'agit d'un contrôle passif de vibrations (contrôleur en boucle ouverte).

4. Résultats et analyse

Considérons une poutre sandwich dont le cœur viscoélastique (ISD112 à 27°C) est contraint par des couches élastiques (aluminium) munies de pastilles piézoélectriques (PZT5H). Les caractéristiques géométriques de la poutre sont présentées sur la figure 2 et ses propriétés mécaniques sont présentées dans le tableau 1. La poutre

est discrétisée par un maillage régulier de 56 éléments. La structure est soumise à un chargement triangulaire à son extrémité libre d'intensité 1 N et de durée totale 4 ms. Les pastilles piézoélectriques collées sur les surfaces inférieure et supérieure représentent respectivement le capteur et l'actionneur. Les calculs sont réalisés avec un pas de temps de 1 ms pour un temps d'étude de 200 ms.

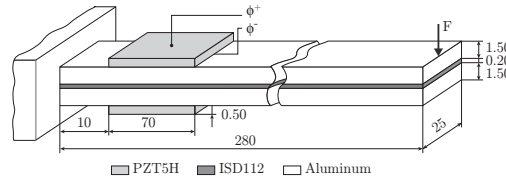


Figure 2. Caractéristiques de la poutre sandwich (en mm)

Tableau 1. Propriétés mécaniques et piézoélectriques de la poutre sandwich

	Aluminium	PZT5H	ISD112
masse volumique (kg/m^3), ρ	2690	7500	1600
coefficient de Poisson, ν	0,345	–	0,5
const. élastique (GPa)	$E = 70,3$	$c_{11} = c_{33} = 126$ $c_{13} = 84,1$	$E_o = 1,5 \times 10^{-3}$ $E_\infty = 69,95 \times 10^{-3}$
const. piézoélectrique (C/m^2)	–	$e_{31} = -6,5$ $e_{33} = 23,3$	–
const. diélectrique (F/m), d_{33}	–	$1,3 \times 10^{-8}$	–
temps de relaxation (ms), τ	–	–	$1,4052 \times 10^{-2}$

Pour connaître l'influence de la troncature de la série de Grünwald, on se place tout d'abord dans le cas d'un système en boucle ouverte. Il s'agit de montrer que seule l'histoire récente des déplacements nécessite d'être stockée à chaque pas de temps pour décrire correctement le phénomène de mémoire évanescence. La figure 3 (a) présente l'évolution au cours du temps de l'énergie dissipée par le matériau visco-élastique D . Cette énergie est la différence entre la partie liée à la rigidité modifiée et celle liée à l'effort modifié ($D = U_d - W_d$). La figure 3 (b) présente l'erreur en énergie dissipée $\| D_{\text{ref}} - D \| / \| D_{\text{ref}} \|$ où D_{ref} est calculée à partir d'une solution de référence qui prend en compte toute l'histoire (200 ms). On y observe une erreur importante lorsque seulement 5 termes (point A) sont retenus dans la série ($\approx 2,52\%$), tandis qu'avec 10 termes (point B) cette erreur diminue considérablement ($\approx 0,16\%$). Ce point B correspond au premier minimum local de la courbe qui oscille ensuite légèrement. Différents calculs nous ont permis de constater que la durée associée à ce minimum est quasi constante quel que soit le pas de temps choisi. Cela signifie que plus la discrétisation temporelle est fine, plus il est nécessaire de stocker un nombre de termes important. On voit ainsi l'intérêt d'utiliser un schéma d'intégration implicite.

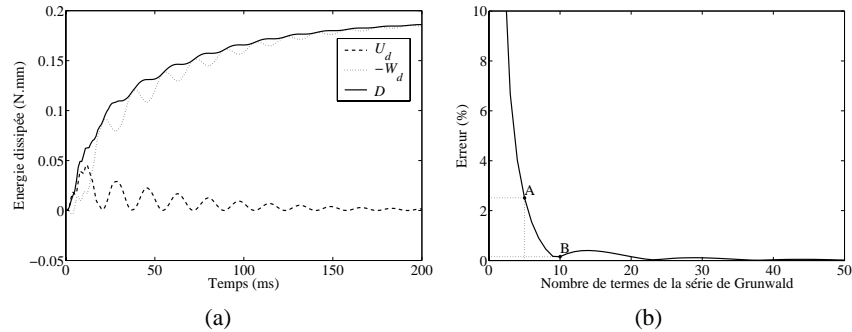


Figure 3. (a) Évolution temporelle de l'énergie dissipée et (b) Erreur en énergie en fonction du nombre de termes de la série de Grünwald

Enfin, les évolutions temporelles de la flèche en bout de poutre, avec et sans contrôle actif, sont présentées sur la figure 4. Dans cet exemple, une loi de contrôle par rétroaction du voltage est utilisée entre le capteur et l'actionneur. La courbe en trait plein correspond à un contrôle passif de vibrations (boucle ouverte). On remarque que les vibrations transverses de la poutre sont rapidement atténuées pour les gains de contrôle de -2 ms (trait pointillé) et de -6 ms (trait interrompu).

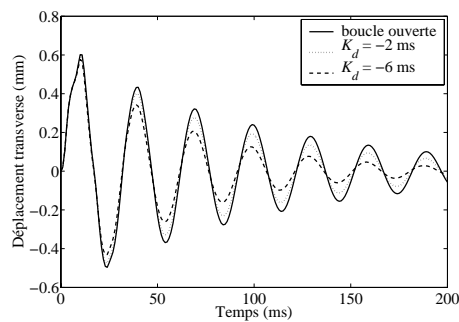


Figure 4. Déplacement transverse en bout de poutre pour plusieurs valeurs de K_d

5. Conclusion

Une formulation éléments finis pour l'analyse dynamique transitoire de poutres sandwich munies d'un traitement par revêtement contraint actif est proposée. La poutre sandwich est composée d'un cœur viscoélastique et de peaux stratifiées piézoélectriques. La formulation éléments finis ne possédant pas de degré de liberté électrique, le couplage électromécanique est pris en compte par la modification de la matrice de rigidité des peaux piézoélectriques dans le cas capteur. Le modèle fractionnaire de Zener est utilisé pour modéliser le comportement viscoélastique du cœur, c'est-à-dire

caractériser sa dépendance en fréquence. Concernant la résolution de l'équation de mouvement de la poutre sandwich, un schéma d'intégration de Newmark combiné à l'approximation de Grünwald pour les dérivées fractionnaires est développé. Seule l'histoire récente des déplacements est stockée dans l'algorithme de résolution, ce qui réduit substantiellement le coût de calcul. La formulation éléments finis proposée permet une implémentation relativement simple d'un traitement hybride par revêtement actif contraint de poutres sandwich pour l'atténuation de vibrations.

6. Bibliographie

- [BAG 83] BAGLEY R. L., TORVIK P. J., « Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures », *AIAA Journal*, vol. 21, 1983, p. 741-748.
- [ENE 99] ENELUND M., OLSSON P., « Damping described by fading memory – analysis and application to fractional derivative models », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, 1999, p. 939-970.
- [GAL 04] GALUCIO A. C., DEÛ J.-F., OHAYON R., « Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators », *Computational Mechanics*, vol. 33, 2004, p. 282-291.
- [GOL 85] GOLLA D. F., HUGHES P. C., « Dynamics of viscoelastic structures – a time-domain, finite element formulation », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, n° 4, 1985, p. 897-906.
- [LES 95] LESIEUTRE G. A., BIANCHINI E., « Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement field », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 117, n° 4, 1995, p. 424-430.
- [LIO 97] LION A., « On the thermodynamics of fractional damping elements », *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 9, 1997, p. 83-96.
- [PRI 03] PRITZ T., « Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 265, 2003, p. 935-952.
- [SCH 01] SCHMIDT A., GAUL L., « FE implementation of viscoelastic constitutive stress-strain relations involving fractional time derivatives », *Proc. Constitutive Models for Rubbers II*. A.A. Balkema Publishers, Tokyo, 2001, p. 79-89.
- [TRI 00] TRINDADE M. A., BENJEDDOU A., OHAYON R., « Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 122, 2000, p. 169-174.
- [TRI 01] TRINDADE M. A., BENJEDDOU A., OHAYON R., « Finite element modelling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams – part I : Formulation », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, 2001, p. 835-854.