

---

# Solveur itératif pour des problèmes stochastiques d'interaction sol-structure

Rémi Lafargue — Didier Clouteau

*LMSSMat, Ecole Centrale de Paris  
F-92295 Châtenay-Malabry  
lafargue@mssmat.ecp.fr  
clouteau@mssmat.ecp.fr*

---

*RÉSUMÉ. Cet article est consacré à la modélisation et à la simulation d'un problème de propagation d'ondes en milieu aléatoire, avec interaction sol-structure. En supposant que la partie du domaine ayant des propriétés physiques aléatoires est à support borné, la formulation proposée est fondée sur un couplage éléments finis/éléments de frontière et des simulations de Monte Carlo. Une méthode de résolution itérative utilisant un préconditionneur, commun à l'ensemble des simulations et construit à partir d'un développement sur la base du chaos polynomial est proposée. On montre que ce préconditionneur, associé à l'équation de Dyson sur le champ moyen, permet d'accélérer uniformément la convergence de l'ensemble des simulations.*

*ABSTRACT. This paper deals with the modeling and the numerical simulation of wave propagation in a random media with sol structure interaction. When the random physical soil properties are restricted to a bounded sub-domain, a coupled finite elements and boundary elements method is proposed to perform Monte Carlo simulations. A iterative solver with an common preconditionner for all simulations is built using a polynomial chaos expansion. It is shown, that this preconditionner related to the Dyson equation on the mean field leads to uniform acceleration of the convergence.*

*MOTS-CLÉS: dynamique stochastique, couplage BEM-FEM, solveurs itératifs, préconditionneurs, chaos polynomial, développement de Karhunen-Loeve.*

*KEYWORDS: BEM-FEM coupling, iterative method, preconditioner, polynomial chaos, Karhunen-Loeve expansion.*

---

## 1. Introduction

L'interaction sol-structure [CLO 75] joue un rôle très important pour la réponse sismique de structures massives comme les centrales nucléaires [BAR 95], les ponts, ou les bâtiments de taille plus modeste posés sur les sols souples [HAO 99]. C'est pourquoi la modélisation numérique de ces problèmes s'est beaucoup développée ces dernières années. Toutefois, dans la pratique les variations des paramètres du sol peuvent être très importantes et avoir des effets significatifs sur la réponse des structures. Des études avancées doivent donc être menées pour quantifier l'effet de cette variabilité. L'objet de ce travail est de développer une approche numérique qui permette de simuler ces phénomènes.

On considère tout d'abord une approche continue du modèle stochastique d'interaction sol-structure [SAV 99, SAV 02]. Ce dernier est décrit par une équation de Lippman-Schwinger, classique en propagation d'ondes en milieux aléatoires, et dont est dérivée une équation dite de Dyson sur le champ moyen [ISH 78, SHE 98]. L'équation de Lippman-Schwinger écrite sous forme variationnelle est résolue numériquement en couplant éléments finis et opérateurs intégraux dans une région bornée et en effectuant des tirages de Monte Carlo (MC). Comme chaque simulation de Monte Carlo conduit à la résolution d'un système linéaire de grande taille, un solveur itératif préconditionné est proposé. Le préconditionneur est construit par projection du système sur la base du chaos polynomial [GHA 91] et correspond physiquement à une approximation de l'opérateur de Dyson s'appliquant au champ moyen.

## 2. Modèle continu

Cette section pose le problème générique de l'interaction dynamique sol-structure pour des propriétés physiques fluctuant sur un domaine borné. Le modèle présenté dans la section 2.1 s'intéresse à une réalisation particulière du problème probabiliste et est écrit, dans la section 2.2, sous la forme d'une équation intégrale définie sur un domaine borné afin de permettre l'utilisation de méthodes de Galerkin classiques pour l'approximation numérique. En remarquant dans la section 2.3 consacrée au problème probabiliste que l'équation intégrale obtenue est la version duale de l'équation de Lippman-Schwinger, on déduira une équation intégrale sur le champ moyen avant de passer à l'approximation numérique proprement dite dans la section 3.

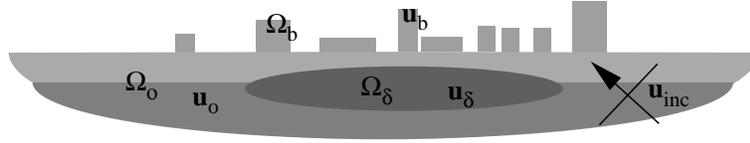
### 2.1. Le problème physique

Soit  $\Omega_o$  un demi-espace stratifié avec des propriétés physiques moyennes déterministes notées  $\mathbf{p}_o = (\lambda_o, \mu_o, \rho_o)$  (coefficients de Lamé, densité massique) et  $P_o$  une surface libre plane. A l'intérieur de  $\Omega_o$ , une région bornée  $\Omega_\delta$  possède des propriétés physiques variant autour des propriétés moyennes  $\mathbf{p}_o$ . Ces fluctuations sont notées

$\mathbf{p}_\delta = (\lambda_\delta, \mu_\delta, \rho_\delta)$ . Ainsi le domaine sol  $\Omega_s$  peut être considéré comme une superposition de  $\Omega_o$  et de  $\Omega_\delta$ , les propriétés physiques satisfaisant :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_s &= \mathbf{p}_o + \mathbf{p}_\delta & \text{dans } \Omega_\delta \\ \mathbf{p}_s &= \mathbf{p}_o & \text{dans } \Omega_o \setminus \Omega_\delta \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on suppose que  $\partial\Omega_\delta \cap P_o = \emptyset$ , où  $\partial\Omega$  représente la frontière du domaine  $\Omega$ . Les bâtiments notés  $\Omega_b$  reposent sur  $\Omega_s$ ,  $\Sigma \subset P_o$  représentant l'interface entre  $\Omega_b$  et  $\Omega_s$ . On note  $\mathbf{p}_b$  leur propriétés. La superposition des sous-domaines  $\Omega_s$  et  $\Omega_b$  est appelée  $\Omega$ . On se place dans le cadre des hypothèses de petits déplacements et petites déformations, la perturbation du champ de déplacement étant, pour tout indice  $\beta \in \{o, s, b, \delta\}$ ,  $\mathbf{u}_\beta$ . On peut donc exprimer le tenseur des contraintes  $\sigma_\beta(\mathbf{u}_\beta)$  linéairement en fonction du tenseur des déformations  $\epsilon(\mathbf{u}_\beta)$  grâce aux coefficients de Lamé  $\lambda_\beta$  et  $\mu_\beta$ .



**Figure 1.** Le modèle général

Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$  doit satisfaire l'équation de Navier et la condition de surface libre sur  $\partial\Omega$  qui s'écrit dans le domaine des fréquences :

$$\begin{aligned} \text{Div}\sigma(\mathbf{u}) &= -\rho\omega^2\mathbf{u} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad [1]$$

Le chargement sismique dans  $\Omega$  est dû à un champ incident déterministe  $\mathbf{u}_o^{\text{inc}}$  dans le domaine  $\Omega_o$ . Même dans le cas stochastique, ce champ vérifie l'équation de Navier dans  $\Omega_o$  et la condition de surface libre sur  $P_o$ .

En définissant  $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_o^{\text{inc}}$ , le champ diffracté, comme nouveau champ inconnu dans le sol, le chargement sismique dans l'équation [1] est défini dans  $\Omega_\delta$  comme le chargement dynamique  $\mathbf{f}_o^{\text{inc}}$  suivant :

$$\mathbf{f}_o^{\text{inc}} = \text{Div}\sigma_\delta(\mathbf{u}_o^{\text{inc}}) + \rho_\delta\omega^2\mathbf{u}_o^{\text{inc}} \quad [2]$$

Ainsi les champs diffracté et le déplacement dans le bâtiment doivent satisfaire à :

$$\begin{aligned} \text{Div}\sigma_s(\mathbf{u}_d) + \mathbf{f}_o^{\text{inc}} &= -\rho_s\omega^2\mathbf{u}_d & \text{dans } \Omega_s \\ \text{Div}\sigma_b(\mathbf{u}_b) &= -\rho_b\omega^2\mathbf{u}_b & \text{dans } \Omega_b \\ \mathbf{t}_b(\mathbf{u}_b) + \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_d) &= \mathbf{0} & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_b &= -\mathbf{u}_o^{\text{inc}} & \text{sur } \Sigma \end{aligned} \quad [3]$$

ainsi qu'aux conditions de surface libre sur les autres frontières.

## 2.2. Décomposition de domaines et opérateurs intégraux

En utilisant les techniques classiques de décomposition de domaine, le problème originel [3] est équivalent à un ensemble de problèmes locaux couplés par des interfaces, surfaciques pour un couplage sol-structure, ou volumiques pour un couplage sol-hétérogénéité.

Les approches duales de la décomposition de domaines [AUB 92, TAL 94] consistent à prendre le vecteur contrainte  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t}_b(\mathbf{u}_b) = -\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s)$  à l'interface  $\Sigma$  comme champ auxiliaire inconnu. La même procédure est utilisée pour coupler le domaine sol moyen semi infini  $\Omega_o$  avec le volume borné  $\Omega_\delta$ .  $\mathbf{u}_o$  et  $\mathbf{u}_\delta$  étant les restrictions de  $\mathbf{u}_d$  à  $\Omega_o$  et  $\Omega_\delta$  respectivement, l'effort  $\phi$  couplant  $\Omega_o$  et  $\Omega_\delta$  est défini par :

$$\phi \stackrel{def}{=} \mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_\delta(\mathbf{u}_\delta) + \rho_\delta \omega^2 \mathbf{u}_\delta + \mathbf{f}_o^{\text{inc}} \quad [4]$$

Les champs  $\mathbf{u}_o$ ,  $\mathbf{u}_\delta$  et  $\mathbf{u}_b$  doivent vérifier les équations suivantes dans chaque sous-domaine avec  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\phi$  comme paramètres :

$$\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_o(\mathbf{u}_o) + \delta_{\Omega_\delta} \phi + \delta_\Sigma \boldsymbol{\tau} = \rho_o \omega^2 \mathbf{u}_o \quad \text{dans} \quad \Omega_o \quad [5]$$

$$\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_\delta(\mathbf{u}_\delta) - \phi + \mathbf{f}_o^{\text{inc}} = -\rho_\delta \omega^2 \mathbf{u}_\delta \quad \text{dans} \quad \Omega_\delta \quad [6]$$

$$\mathbf{t}_\delta(\mathbf{u}_\delta) = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\delta \quad [7]$$

$$\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_b(\mathbf{u}_b) = -\rho_b \omega^2 \mathbf{u}_b \quad \text{dans} \quad \Omega_b \quad [8]$$

$$\mathbf{t}_b(\mathbf{u}_b) = \boldsymbol{\tau} \quad \text{sur} \quad \Sigma \quad [9]$$

De plus ces champs doivent vérifier deux équations de couplage :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_o - \mathbf{u}_b &= -\mathbf{u}_o^{\text{inc}} \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ \mathbf{u}_o - \mathbf{u}_\delta &= \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Omega_\delta \end{aligned} \quad [10]$$

Ces équations sont résolues pour  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\phi$  en éliminant  $\mathbf{u}_o$  grâce à des opérateurs intégraux. On suppose que  $\mathbf{U}^{Go}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , la solution fondamentale du demi-espace homogène existe et peut être calculée soit analytiquement soit numériquement [CLO 90, CLO 01] pour tout couple de points  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dans  $\Omega_o$ . Ainsi en supposant  $\Sigma$  et  $\Omega_\delta$  bornés et réguliers, l'équation [5] peut être résolue en utilisant le potentiel de simple couche  $\mathcal{U}_\Sigma^o$  et le potentiel de Newton  $\mathcal{U}_\delta^o$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_o &= \mathcal{U}_\delta^o \phi + \mathcal{U}_\Sigma^o \boldsymbol{\tau} \\ (\mathcal{U}_\delta^o \phi)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega_\delta} \mathbf{U}^{Go}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ (\mathcal{U}_\Sigma^o \boldsymbol{\tau})(\mathbf{x}) &= \int_{\Sigma} \mathbf{U}^{Go}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad [11]$$

Avec cette décomposition, les équations de couplage [10] s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\Sigma\Sigma}^o \boldsymbol{\tau} + \mathcal{U}_{\Sigma\delta}^o \phi - \mathbf{u}_b &= -\mathbf{u}_o^{\text{inc}} \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ \mathcal{U}_{\delta\Sigma}^o \boldsymbol{\tau} + \mathcal{U}_{\delta\delta}^o \phi - \mathbf{u}_\delta &= \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega_\delta \end{aligned} \quad [12]$$

où  $\mathcal{U}_{\Sigma\Sigma}^o$  et  $\mathcal{U}_{\Sigma\delta}^o$  sont les traces sur  $\Sigma$  respectivement du potentiel de simple couche  $\mathcal{U}_\Sigma^o$  et du potentiel de Newton  $\mathcal{U}_\delta^o$ . Dans la seconde équation  $\mathcal{U}_{\delta\Sigma}^o$  et  $\mathcal{U}_{\delta\delta}^o$  sont les restrictions de ces deux potentiels à  $\Omega_\delta$ . On cherche à résoudre le problème modélisé par

le système [12] en éliminant les variables  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{u}_b$  afin de définir une relation unique entre  $\mathbf{u}_\delta$  et  $\boldsymbol{\phi}$ .

Pour cela, les équations [6]-[7] et [8]-[9] permettent respectivement de faire apparaître les opérateurs  $\mathcal{Z}_\delta$  et  $\mathcal{Z}_b$  tels que :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi} &= \mathcal{Z}_\delta(\mathbf{u}_\delta + \mathbf{u}_o^{\text{inc}}) \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathcal{Z}_b \mathbf{u}_\Sigma\end{aligned}\quad [13]$$

$\mathcal{Z}_\delta$  apparaît comme la rigidité dynamique du domaine  $\Omega_\delta$  alors que  $\mathcal{Z}_b$  est la rigidité de  $\Omega_b$  condensée sur l'interface  $\Sigma$ ,  $\mathbf{u}_\Sigma$  étant la trace de  $\mathbf{u}_b$  sur  $\Sigma$ . En tenant compte de [13], on peut réécrire le système [12] :

$$\mathcal{U}_{\Sigma\Sigma}^o \mathcal{Z}_b \cdot \mathbf{u}_\Sigma + \mathcal{U}_{\Sigma\delta}^o \boldsymbol{\phi} - \mathbf{u}_\Sigma = -\mathbf{u}_o^{\text{inc}} \text{ sur } \Sigma \quad [14]$$

et

$$\mathcal{U}_{\delta\Sigma}^o \mathcal{Z}_b \cdot \mathbf{u}_\Sigma + \mathcal{U}_{\delta\delta}^o \boldsymbol{\phi} - \mathbf{u}_\delta = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega_\delta \quad [15]$$

On peut alors isoler  $\mathbf{u}_\Sigma$  dans l'équation [14] en écrivant :

$$(\mathcal{I}_d - \mathcal{U}_{\Sigma\Sigma}^o \mathcal{Z}_b) \mathbf{u}_\Sigma = \mathbf{u}_o^{\text{inc}} + \mathcal{U}_{\Sigma\delta}^o \boldsymbol{\phi}$$

En reportant dans l'équation [15] on a maintenant une relation liant  $\boldsymbol{\phi}$  et  $\mathbf{u}_\delta$  :

$$\mathcal{U}_\delta \boldsymbol{\phi} = \mathbf{u}_\delta - \mathbf{u}_r^{\text{inc}} \text{ sur } \Omega_\delta \quad [16]$$

où  $\mathcal{U}_\delta$  est un opérateur intégral déterministe dont le noyau  $\mathcal{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est la fonction de Green du système couplé sol-structure. Il s'écrit :

$$\mathcal{U}_\delta = \mathcal{U}_{\delta\delta}^o + \mathcal{U}_{\delta\Sigma}^o \mathcal{Z}_b (\mathcal{I}_d - \mathcal{U}_{\Sigma\Sigma}^o \mathcal{Z}_b)^{-1} \mathcal{U}_{\Sigma\delta}^o$$

$\mathbf{u}_r^{\text{inc}} = \mathcal{U}_{\delta\Sigma}^o \mathcal{Z}_b (\mathcal{I}_d - \mathcal{U}_{\Sigma\Sigma}^o \mathcal{Z}_b)^{-1} \mathbf{u}_o^{\text{inc}}$  est le champ diffracté par la structure soumise à un champ incident  $\mathbf{u}_o^{\text{inc}}$ . En fait  $\mathbf{u}^{\text{inc}} = \mathbf{u}_o^{\text{inc}} + \mathbf{u}_r^{\text{inc}}$  est le champ incident satisfaisant l'interaction sol-structure. L'équation [16] définit une relation univoque entre  $\mathbf{u}_\delta$  et  $\boldsymbol{\phi}$  tant que l'opérateur  $\mathcal{U}_\delta$  peut être inversé. On élimine  $\mathbf{u}_\delta$  entre les équations [16] et [13] pour ne travailler que sur les efforts  $\boldsymbol{\phi}$  restreints au domaine borné  $\Omega_\delta$  :

$$(\mathcal{I}_d - \mathcal{Z}_\delta \mathcal{U}_\delta) \boldsymbol{\phi} = \mathcal{Z}_\delta \mathbf{u}^{\text{inc}} \quad [17]$$

Cette équation est en fait la formulation duale de l'équation de Lippman-Schwinger sur le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  prenant la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{inc}} + \mathcal{U}_\delta \mathcal{Z}_\delta \mathbf{u} \quad [18]$$

que l'on obtient en multipliant [17] par  $\mathcal{U}_\delta$  et en posant  $\mathbf{u} = \mathcal{U}_\delta \boldsymbol{\phi} + \mathbf{u}^{\text{inc}}$ .

### 2.3. Modèle pour le champ moyen

Les propriétés mécaniques du sol  $\Omega_\delta$  étant aléatoires, l'opérateur  $\mathcal{Z}_\delta$  de l'équation [17] est un opérateur stochastique linéaire que l'on suppose centré et du second ordre. La réponse du système sera donc un champ stochastique que l'on décomposera en une valeur moyenne déterministe et une fluctuation ( $\phi = \underline{\phi} + \phi_f$ ). En suivant une démarche similaire à celle proposée dans [SHE 98] et conduisant à l'équation de Dyson à partir l'équation de Lippman-Schwinger [18], on applique à l'équation [17] les deux opérateurs  $\mathcal{P}$  et  $(\mathcal{I}_d - \mathcal{P})$  où l'opérateur  $\mathcal{P}$  désigne l'espérance mathématique et satisfaisant comme tout opérateur de projection  $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}$ . On obtient alors les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\phi} &= \mathcal{P}\mathcal{Z}_\delta\mathcal{U}_\delta(\underline{\phi} + \phi_f) \\ \phi_f &= (\mathcal{I}_d - \mathcal{P})\mathcal{Z}_\delta\mathbf{u}^{\text{inc}} + (\mathcal{I}_d - \mathcal{P})\mathcal{Z}_\delta\mathcal{U}_\delta(\underline{\phi} + \phi_f)\end{aligned}$$

Par inversion formelle et élimination de  $\phi_f$  ce système conduit à l'équation suivante sur l'effort moyen  $\underline{\phi}$  :

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_d - \mathcal{Z}_{\text{eff}}\mathcal{U}_\delta)\underline{\phi} &= \mathcal{Z}_{\text{eff}}\mathbf{u}^{\text{inc}} \\ \mathcal{Z}_{\text{eff}} &= \mathcal{P}\mathcal{Z}_\delta \sum_{n=0}^{\infty} [\mathcal{U}_\delta(\mathcal{I}_d - \mathcal{P})\mathcal{Z}_\delta]^n\end{aligned}\quad [19]$$

avec  $\mathcal{Z}_{\text{eff}}$  l'opérateur l'impédance du « milieu effectif » constituant l'inclusion. Pour l'équation de Dyson classique dont [19] constitue la formulation duale, cet opérateur est appelé opérateur « de masse ».

L'équation [19] permettant d'approcher la solution moyenne, elle constitue une bonne candidate pour construire ultérieurement un préconditionneur pour la résolution numérique de l'équation de Lippman-Schwinger [17]. Toutefois, l'opérateur  $\mathcal{Z}_{\text{eff}}$ , donné sous la forme d'une série d'opérateurs, ne peut être assemblé explicitement, la convergence n'étant par ailleurs assurée que pour de faibles perturbations. Plusieurs approximations ont été proposées (cf. [SHE 98]) dont la plus simple, revenant à tronquer la série à l'ordre 1, est la « first order smooth approximation » (FOSA), soit :

$$\mathcal{Z}_{\text{eff}}^1 = \mathcal{P}(\mathcal{Z}_\delta\mathcal{U}_\delta\mathcal{Z}_\delta)\quad [20]$$

qui a bien un sens pour  $\mathcal{Z}_\delta$  un opérateur aléatoire du second ordre. On montrera dans la prochaine section qu'une projection de l'équation [17] sur le chaos polynomial d'ordre 1 conduit à la même approximation, permettant ainsi de construire numériquement l'opérateur  $\mathcal{Z}_{\text{eff}}^1$ , ainsi que l'approximation numérique de l'opérateur intégral associé au « milieu effectif » équivalent :

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_\delta(\mathcal{I}_d - \mathcal{Z}_{\text{eff}}\mathcal{U}_\delta)\quad [21]$$

### 3. Discrétisation du modèle

Afin de construire une approximation numérique de notre problème, il convient d'aborder la discrétisation de l'équation [17] tant du point de vue spatial que vis-à-vis de l'aléa.

### 3.1. Discrétisation spatiale

L'approximation numérique de cette formulation est classiquement réalisée en projetant les champs inconnus  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{u}_b$ ,  $\phi$  and  $\mathbf{u}_\delta$  dans des espaces de dimensions finies, et en écrivant les conditions cinématiques [12] et les conditions d'équilibre [5]-[9] au sens faible. Le couplage au niveau de l'interface  $\Sigma$  étant classiquement réalisé par couplage entre une méthode d'éléments finis pour la structure et une méthode d'éléments de frontière pour le sol [CLO 01], par souci de simplification, seul le couplage entre l'hétérogénéité et le sol est considéré ici. Ainsi il reste à discrétiser ces équations en utilisant des bases de dimension finie  $\boldsymbol{\Psi}_\delta = \{\psi_{kn}(\mathbf{x}_\delta)\}_{n=1, N_\delta, k=1,3}$  et  $\mathbf{W}_\delta = \{w_{iI}(\mathbf{x}_\delta)\}_{I=1, M_\delta, i=1,3}$  pour  $\phi$  et  $\mathbf{u}_\delta$  respectivement, conduisant à un système mixte. Toutefois, il a été montré dans [SAV 99] que cette formulation revenait à écrire l'équation [17] sous forme variationnelle pour tout champ virtuel  $\mathbf{v}'_\delta = \mathcal{U}_\delta \phi'$ , le système linéaire final s'écrivant pour  $\mathbf{q}_\delta$ , le vecteur des coefficients de  $\phi$  dans la base  $\boldsymbol{\Psi}_\delta$  :

$$\mathbf{U}\mathbf{q}_\delta + \mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_\delta (\mathbf{U}_\delta \mathbf{q}_\delta + \mathbf{u}_\delta^{\text{inc}}) = \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{Z}_\delta = \mathbf{K}_\delta - \omega^2 \mathbf{M}_\delta \quad [22]$$

où, lorsque les  $w_{iI}(\mathbf{x}_\delta)$  sont les fonctions de base élément finis,  $\mathbf{K}_\delta$  et  $\mathbf{M}_\delta$  sont les matrices de masse et de rigidité éléments finis du domaine  $\Omega_\delta$  avec les propriétés  $\mathbf{p}_\delta$  ; et lorsque les  $\psi_{kn}(\mathbf{x}_\delta)$  sont des fonctions de base constantes par éléments  $C_n$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{U}_\delta$  sont les approximations des potentiels de Newton  $\mathcal{U}_{\delta\delta}$  données par :

$$[\mathbf{U}]_{nkml} = \int_{C_n} \int_{C_m} \mathbf{U}_{kl}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \quad ; \quad [\mathbf{U}_\delta]_{Iiml} = \int_{C_m} \mathbf{U}_{il}^G(\mathbf{x}_I, \mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}$$

avec  $\mathbf{x}_I$ , les coordonnées des nœuds éléments finis et  $[\mathbf{u}_\delta^{\text{inc}}]_{Ik} = \mathbf{u}^{\text{inc}}(\mathbf{x}_I) \cdot \mathbf{e}_k$ .

### 3.2. Réduction de la dimension aléatoire

La discrétisation de l'aléa sur les propriétés mécaniques du sol est fondée sur l'hypothèse que le domaine  $\Omega_\delta$  est borné. En effet, la perturbation des paramètres élastiques  $\mathbf{p}_\delta$  est modélisée comme un processus stochastique du second ordre centré dans  $\Omega_\delta$  et caractérisé par son opérateur de covariance de noyau  $\mathbf{R}_p$ .  $\Omega_\delta$  étant borné, le processus aléatoire  $\mathbf{p}_\delta$  peut être approché par le développement de Karhunen-Loeve [GHA 91] :

$$\mathbf{p}_\delta = \sum_{r=1}^N \theta_r \mathbf{p}_r \quad [23]$$

où les  $\mathbf{p}_r(\mathbf{x})$  sont les premiers modes propres de l'opérateur de covariance dont les valeurs propres sont les  $\sigma_r^2$  :

$$\sigma_r^2 \mathbf{p}_r(\mathbf{x}') = \int_{\Omega_\delta} \mathbf{R}_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{p}_r(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \quad , \quad \int_{\Omega_\delta} \mathbf{p}_r \mathbf{p}_r' dV = \delta_{rr'} \sigma_r^2$$

les  $\theta_r$  étant des variables aléatoires non corrélées d'écart type unité.

Grâce à ce développement, les matrices éléments finis  $\mathbf{K}_\delta$  et  $\mathbf{M}_\delta$  apparaissant dans l'équation [22], étant des fonctions linéaires des paramètres élastiques  $\mathbf{p}_\delta$ , deviennent des fonctions linéaires des variables aléatoires  $\theta_r$  :

$$\mathbf{K}_\delta = \sum_r \theta_r \mathbf{K}_r \quad ; \quad \mathbf{M}_\delta = \sum_r \theta_r \mathbf{M}_r \quad [24]$$

les matrices  $\mathbf{K}_r$  et  $\mathbf{M}_r$  étant des matrices déterministes calculées pour des paramètres élastiques déterministes  $\mathbf{p}_r$ . Ainsi l'équation [22] s'écrit maintenant :

$$\mathbf{U} \mathbf{q}_\delta + \sum_r \theta_r \mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_r (\mathbf{U}_\delta \mathbf{q}_\delta + \mathbf{u}^{\text{inc}}) = \mathbf{0} \quad [25]$$

où  $\mathbf{Z}_r = \mathbf{K}_r - \omega^2 \mathbf{M}_r$  sont les matrices d'impédance dues aux variations déterministes des paramètres élastiques  $\mathbf{p}_r$ . Ainsi le problème probabiliste a été réduit à un nombre fini de variables aléatoires  $\theta_r$  regroupées par commodité dans un vecteur aléatoire noté  $\boldsymbol{\theta}$ . Toutefois l'équation [25] reste une équation fonctionnelle pour  $\mathbf{q}_\delta(\boldsymbol{\theta})$ .

### 3.3. Discrétisation de la dimension aléatoire

Le but de cette section est de construire une approximation vis-à-vis de la dimension aléatoire réduite  $\boldsymbol{\theta}$  du problème. Pour ce faire, le vecteur  $\mathbf{q}_\delta(\boldsymbol{\theta})$  est projeté sur une base de dimension finie  $\{\psi_l(\boldsymbol{\theta})\}_{l=1, n_l}$ . Alors, en multipliant l'équation [25] par une fonction test  $\psi_{k'}$  ( $\boldsymbol{\theta}$ ) puis en prenant la moyenne, on obtient le système déterministe suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \mathbf{q}_{l'} + \sum_{rk} \mathbf{U}_{rll'} \mathbf{q}_l &= \sum_r \mathbf{v}_{rl'} \quad ; \quad \mathbf{q}_\delta(\boldsymbol{\theta}) = \sum_l^{N_l} \psi_l(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_l \\ \mathbf{U}_{rll'} &= \mathcal{P}_{\theta_r} \psi_{l'} \psi_l \mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_r \mathbf{U}_\delta \quad ; \quad \mathbf{v}_{rl'} = -\mathcal{P}_{\theta_r} \psi_{l'} \mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_r \mathbf{u}^{\text{inc}} \end{aligned} \quad [26]$$

Les fonctions de base  $\psi_l(\boldsymbol{\theta})$  peuvent être soit les polynômes de Hermite pour des méthodes éléments finis spectraux, soit des fonctions constantes par morceaux pour des simulations de Monte Carlo. Dans ce deuxième cas, la matrice finale est diagonale par blocs, conduisant à résoudre un grand nombre de systèmes indépendants pour des tirages indépendants des variables aléatoires  $\theta_r$ , alors que dans le premier cas, elle est creuse.

### 3.4. Chaos polynomial au premier ordre

Nous utilisons ici la base du chaos polynomial au premier ordre ( $\phi_l(\boldsymbol{\theta}) = \theta_l$ ) pour construire un préconditionneur afin d'accélérer les résolutions de Monte-Carlo. En notant  $\mathbf{C}_r = \mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_r \mathbf{U}_\delta$ , l'équation [26] devient :

$$\begin{cases} \mathbf{U} \mathbf{q}_\delta + \sum_r \mathbf{C}_r \mathbf{q}_r &= \mathbf{0} \\ \mathbf{U} \mathbf{q}_r + \mathbf{C}_r \mathbf{q}_\delta &= -\mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_r \mathbf{u}^{\text{inc}} \end{cases}$$

avec  $\mathbf{q}_\delta(\boldsymbol{\theta}) = \underline{\mathbf{q}}_\delta + \sum_r \theta_r \mathbf{q}_r$ ,  $\underline{\mathbf{q}}_\delta$  étant l'approximation de la moyenne du vecteur  $\mathbf{q}_\delta(\boldsymbol{\theta})$ . En éliminant  $\mathbf{q}_\delta$  on obtient la version discrète de l'équation de Dyson [19] :

$$\overbrace{(\mathbf{U} - \mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_{\text{eff}} \mathbf{U}_\delta)}^{\tilde{\mathbf{U}}} \underline{\mathbf{q}}_\delta = \mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_{\text{eff}} \mathbf{u}^{\text{inc}}$$

où  $\tilde{\mathbf{U}}$  est l'approximation de l'opérateur de Green du « milieu effectif » défini dans [21] avec des hétérogénéités effectives dont l'impédance donnée dans [20] est approchée par la matrice  $\mathbf{Z}_{\text{eff}}$  sous la forme :

$$\mathbf{Z}_{\text{eff}} = \sum_r \mathbf{Z}_r \underbrace{\mathbf{U}_\delta \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}_\delta^T}_{\mathbf{U}_{\delta\delta}} \mathbf{Z}_r = \mathcal{P}(\mathbf{Z}_\delta \mathbf{U}_{\delta\delta} \mathbf{Z}_\delta)$$

Une fois la projection sur le chaos calculée, la solution complète s'écrit :

$$\mathbf{q}_\delta = \underline{\mathbf{q}}_\delta + \sum_r \mathbf{q}_r \theta_r + \mathbf{q}'(\boldsymbol{\theta}) \quad [27]$$

où le terme correctif  $\mathbf{q}'$  possède une faible projection dans cette base. Avec cette décomposition, l'équation devient :

$$(\mathbf{U} + \sum_r \theta_r \mathbf{C}_r^\delta) \mathbf{q}' = -\{(\mathbf{U} + \sum_r \theta_r \mathbf{C}_r^\delta)(\underline{\mathbf{q}}_\delta + \sum_r \theta_r \mathbf{q}_r) - \sum_r \theta_r \mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_r \mathbf{u}^{\text{inc}}\} \quad [28]$$

la solution  $\mathbf{q}'$  étant simulée par tirages de Monte Carlo. Afin de réduire le temps de calcul, la méthode de résolution itérative GMRES [SAA 86] est employée du fait des propriétés spécifiques des matrices (pleines, complexes) en association avec les préconditionneurs  $\mathbf{U}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}$  et  $\mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{U}}$  avec  $\mathbf{P}_2^{-1}$  défini par :

$$\mathbf{P}_2^{-1} = \mathbf{I} - \sum_r \theta_r \mathbf{U}_\delta^T \mathbf{Z}_r \mathbf{U}^{-1}$$

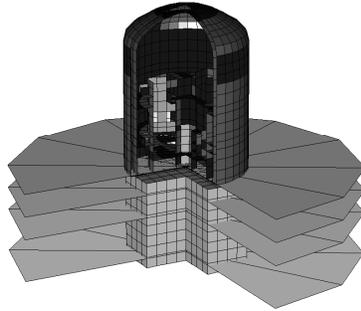
et qui, appliqué à la matrice du système [28], donne en moyenne :

$$\mathcal{P}(\mathbf{P}_2^{-1}(\mathbf{U} + \sum_r \theta_r \mathbf{C}_r^\delta)) = \mathbf{U} - \sum_r \mathbf{C}_r^\delta \mathbf{U}^{-1} \mathbf{C}_r^\delta = \tilde{\mathbf{U}}$$

Ainsi, le préconditionneur  $\tilde{\mathbf{U}}$  est « global » pour l'ensemble des simulations et a déjà été inversé pour calculer les coefficients du premier ordre de la décomposition. Le préconditionneur  $\mathbf{P}_2$  dépend lui de  $\boldsymbol{\theta}$  mais son inverse étant connu explicitement il est peu coûteux à construire.

### 3.5. Résultats numériques

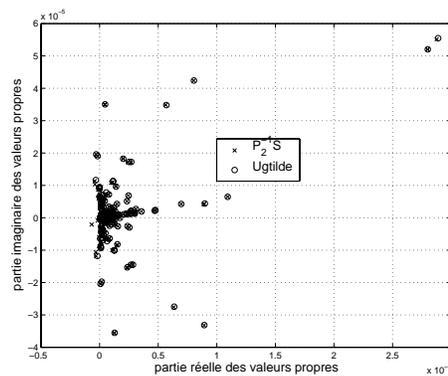
La procédure de résolution définie précédemment est appliquée à un cas test industriel afin de vérifier l'efficacité des préconditionneurs proposés. Il s'agit du calcul de la réponse en fréquence d'une centrale nucléaire reposant sur un milieu hétérogène



**Figure 2.** Bâtiment réacteur sur une hétérogénéité aléatoire

borné inclus dans un demi-espace stratifié (figure 2). Les fluctuations des modules élastiques dans la zone sous la fondation présentent des taux de variation importants atteignant 75%.

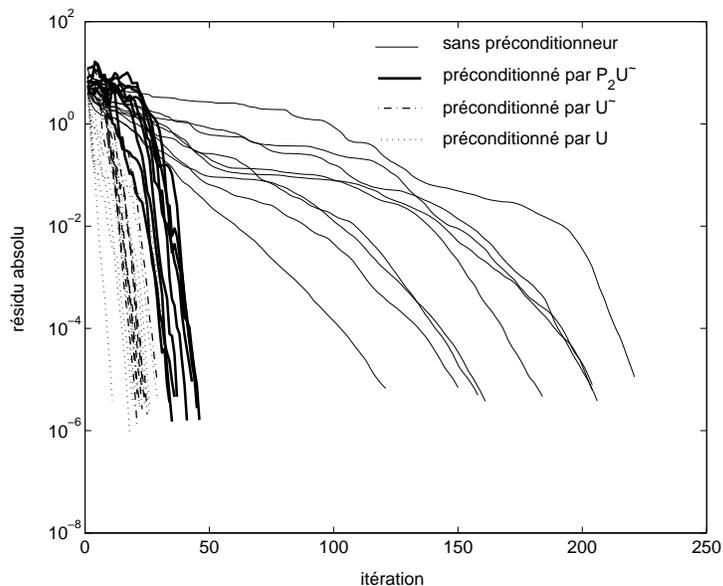
Tout d'abord, la figure 3 montre le bon accord entre le spectre de  $\tilde{\mathbf{U}}$  et le spectre de  $\mathbf{P}_2^{-1}(\mathbf{U} + \sum_r \theta_r \mathbf{C}_r^\delta)$  pour une réalisation particulière, confirmant la pertinence de l'approche.



**Figure 3.** Spectres de la matrice  $\tilde{\mathbf{U}}$  représentant le milieu effectif et de la matrice  $\mathbf{P}_2^{-1}(\mathbf{U} + \sum_r \theta_r \mathbf{C}_r^\delta)$  à inverser pour un tirage particulier

La figure 4 montre la convergence de l'algorithme GMRES combiné aux préconditionneurs  $\mathbf{U}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{U}}$  pour 9 tirages représentatifs de l'ensemble des tirages. Tous les préconditionneurs réduisent de façon significative le nombre d'itérations. De plus,  $\tilde{\mathbf{U}}$  se comporte mieux que  $\mathbf{U}$  au sens où il rend le taux de convergence à peu près constant pour tous les tirages. Néanmoins le préconditionneur  $\mathbf{P}_2$ , théoriquement adapté à chaque tirage, semble avoir une influence néfaste sur le taux de convergence,

indiquant que pour des fluctuations importantes, il est nécessaire d'envisager un développement à un ordre plus élevé.



**Figure 4.** Influence des préconditionneurs sur la convergence de l'algorithme

#### 4. Conclusion

Une méthode pour prendre en compte le caractère aléatoire des propriétés du sol dans une zone bornée a été proposée. Cette modélisation est basée sur un couplage entre opérateurs intégraux et éléments finis stochastique qui conduit à des approximations numériques des équations de Lippman-Schwinger et Dyson, classiques en physique théorique.

Une méthode itérative a permis d'accélérer la convergence des simulations de Monte Carlo grâce à l'introduction de préconditionneurs basés sur une décomposition sur la base du chaos polynomial.

Pour une décomposition au premier ordre, ces préconditionneurs semblent assez robustes au niveau des taux de convergence. Mais des approximations à des ordres plus élevés semblent nécessaires pour des fluctuations des propriétés mécaniques à grand écart type.

#### 5. Bibliographie

[AUB 92] AUBRY D., CLOUTEAU D., *A subdomain approach to dynamic soil-structure interaction*, vol. pp. 251–272, Nantes : Ouest Editions/AFPS, 1992.

- [BAR 95] DE BARROS F., LUCO J., « Identification of foundation impedance functions and soil properties from vibration tests of the Hualien containment model », *Soil Dyn. Earthquake Engrg.*, vol. 14, 1995, p. 229–248.
- [CLO 75] CLOUGH R., PENZIEN J., *Dynamics of structures*, New York : McGraw-Hill, 1975.
- [CLO 90] CLOUTEAU D., « Propagation d’ondes dans les milieux hétérogènes, Application à la tenue d’ouvrages sous séismes », PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 1990.
- [CLO 01] CLOUTEAU D., AUBRY D., *Computational soil-structure Interaction*, Kluwer, 2001.
- [GHA 91] GHANEM, SPANOS, *Stochastic finite elements : a spectral approach*, New York : Springer Verlag, 1991.
- [HAO 99] HAO H., ZHANG S., « Spatial ground motion effect on relative displacement of adjacent building structures », *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, vol. 28, 1999, p. 333–349.
- [ISH 78] ISHIMARU A., *Wave propagation and scattering in random media*, Oxford University Press, 1978.
- [SAA 86] SAAD Y., SCHULTZ M., « GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems », *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 7, 1986, p. 856-869.
- [SAV 99] SAVIN E., « Effet de la variabilité du sol et du champ incident en interaction sismique sol-structure », PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 1999.
- [SAV 02] SAVIN E., CLOUTEAU D., « Coupling a bounded domain and an unbounded heterogeneous domain for elastic wave propagation in three-dimensional random media », *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, vol. 24, 2002, p. 607-630.
- [SHE 98] SHENG P., *Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena*, Academic Press, 1998.
- [TAL 94] LE TALLEC P., *Domain decomposition methods in computational mechanics*, North-Holland, 1994.