

---

# Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures

**Pierre Ladevèze\*** — **Guillaume Puel\***  
**Arnaud Deraemaeker\*\*** — **Thierry Romeuf\*\*\***

\* *LMT-Cachan (École Normale Supérieure de Cachan - CNRS - Université Paris 6)*  
61 avenue du Président Wilson F-94235 Cachan Cedex  
{pierre.ladeveze,guillaume.puel}@lmt.ens-cachan.fr

\*\* *Université Libre de Bruxelles - Active Structures Laboratory*  
50 avenue Franklin Roosevelt CP 165/42 B-1050 Bruxelles  
arnaud.deraemaeker@ulb.ac.be

\*\*\* *European Aeronautic Defence and Space Company (EADS Space Transportation)*  
66 route de Verneuil BP 3002 F-78133 Les Mureaux Cedex  
thierry.romeuf@space.eads.net

---

*RÉSUMÉ. La quantification de la qualité d'un modèle est très certainement aujourd'hui une des questions majeures, tout particulièrement en dynamique des structures, avec un nombre croissant de méthodes de validation d'un modèle par rapport à une référence expérimentale. Cet article présente une nouvelle théorie basée sur le concept de méconnaissance mêlant théorie des intervalles et théorie des probabilités ; pour cela, on considère pour chaque sous-structure les deux bornes de l'énergie de déformation, en tant que variables aléatoires. Une stratégie générale de réduction des méconnaissances est alors introduite et appliquée à divers exemples académiques et industriels.*

*ABSTRACT. The quantification of the quality of a structural mechanical model remains a major issue today, with the use of an increasing number of methods in order to validate a model in comparison with an experimental reference. This paper presents a new theory based on the concept of Lack of Knowledge combining convex uncertainty models with probabilistic features by introducing for each substructure two bounds of the strain energy as stochastic variables. A general strategy of reduction of the lack of knowledge is discussed and applied to academic as well as industrial cases.*

*MOTS-CLÉS : méconnaissances, incertitudes, validation de modèle, dynamique des structures.*

*KEYWORDS: lacks of knowledge, uncertainties, model validation, structural dynamics.*

---

## 1. Introduction

La quantification de la qualité d'un modèle reste encore aujourd'hui une question majeure ; dans le domaine de la confrontation avec une référence expérimentale, de nombreuses méthodes ont été développées pour le recalage des rigidités et des masses dans les modèles dynamiques, à partir de résultats d'essai en vibrations libres ou forcées, comme dans [MOT 93] ou [LAD 99]. Toutefois, un modèle, même recalé, peut ne pas rendre compte correctement de certains phénomènes : il peut y avoir des dispersions dans les caractéristiques matériaux, ou la modélisation de certaines parties, comme les liaisons, peut être simplifiée. Afin de décrire ces incertitudes, l'utilisation de méthodes probabilistes s'est intensifiée [SCH 01] ; en général, ces méthodes consistent à étudier les effets des incertitudes affectant les paramètres du modèle sur la variabilité de la sortie. Mais on peut aussi trouver des alternatives qui n'introduisent pas nécessairement de lois de probabilité [BEN 99].

Le concept de *méconnaissance* a été introduit dans [LAD 02] et mêle contenu probabiliste et théorie des intervalles. Le principe de base est la globalisation par sous-structure des différentes sources d'erreur au moyen d'une variable interne scalaire dite de méconnaissance, qui appartient à un intervalle dont les bornes supérieure et inférieure suivent des lois probabilistes. Il est alors possible de calculer pour n'importe quelle quantité d'intérêt un intervalle d'appartenance dont les bornes sont probabilistes. Nous présentons ici les premiers résultats d'une stratégie de réduction des méconnaissances par l'apport d'information expérimentale [LAD 04].

## 2. Méconnaissances de base

### 2.1. Définition

La théorie se place dans le cadre où une structure est modélisée comme un assemblage de sous-structures, les liaisons pouvant être assimilées à des sous-structures particulières. C'est à l'échelle de ces sous-structures que l'on choisit de quantifier les incertitudes, globalisant ainsi toutes les sources d'erreur existantes. Pour le moment, on considère que ces dernières sont du type « rigidité structurale ». Le concept de méconnaissance permet de chiffrer simplement la comparaison que l'on effectue entre le modèle et le réel.

Pour chaque sous-structure  $E$  d'une structure réelle, on peut associer une méconnaissance  $m$  qui évolue dans un intervalle de bornes  $m_E^+$  et  $m_E^-$  définies comme suit :

$$(1 - m_E^-) \bar{K}_E \leq K_E \leq (1 + m_E^+) \bar{K}_E \quad [1]$$

où  $K_E$  et  $\bar{K}_E$  désignent la matrice de rigidité associée à la sous-structure  $E$ , respectivement pour une structure réelle et pour le modèle théorique déterministe. L'inégalité matricielle précédente s'interprète au sens des valeurs propres, mais pour traduire en pratique cette inégalité, on fait intervenir les énergies de déformation :

$$(1 - m_E^-) \bar{e}_E \leq e_E \leq (1 + m_E^+) \bar{e}_E \quad [2]$$

où  $e_E = \frac{1}{2}U^T K_E U$  désigne l'énergie de déformation d'une structure réelle appartenant à la famille de structures semblables étudiées et  $\bar{e}_E = \frac{1}{2}U^T \bar{K}_E U$  celle du modèle théorique déterministe. Cette inégalité doit être vérifiée quel que soit le champ de déplacement  $U$ . Les deux quantités  $m_E^+$  et  $m_E^-$  sont des variables internes scalaires relatives à la sous-structure  $E$  et forment la *méconnaissance de base* sur  $E$ .

Pour chaque sous-structure, la méconnaissance  $m$  est située à l'intérieur de l'intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  sans que l'on puisse être plus précis. Par contre, les bornes de cet intervalle sont caractérisées par des lois de probabilité dont la nature est fixée *a priori* :

- si la loi de probabilité choisie est de type uniforme, toutes les réalisations possibles de  $m_E^+$  et  $m_E^-$  sont encadrées par deux valeurs notées  $\bar{m}_E^+$  et  $\bar{m}_E^-$  ;
- dans certains cas où la modélisation est imparfaite (par exemple, une liaison non linéaire représentée par un modèle linéaire), le manque d'information est tel que l'on n'associe pas de loi de probabilité aux méconnaissances de base : on peut alors décider de juste affirmer que la méconnaissance  $m$  est située quelque part dans un intervalle (cette fois-ci déterministe) noté  $[-\bar{m}_E^-; \bar{m}_E^+]$ .

D'autres cas de figure sont envisageables, comme l'exemple détaillé ci-dessous.

## 2.2. Illustration

Dans le cas où l'on suppose que les seules sources d'erreur sont les incertitudes concernant le matériau, on peut raisonnablement considérer que l'on peut associer à la méconnaissance  $m$  sur la sous-structure  $E$  une loi gaussienne centrée de densité de probabilité  $p(m)$  :

$$m \in [-m_E^-; m_E^+] \text{ avec } p(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} \quad [3]$$

L'écart type  $\sigma$  de la loi gaussienne peut être défini grâce à deux valeurs notées  $\bar{m}_E^+$  et  $\bar{m}_E^-$  en posant par exemple que  $\int_{-\bar{m}_E^-}^{\bar{m}_E^+} p(m) dm = 0,99$  ; pour éviter des tirages non physiques ( $-m_E^- < -1$ ), on décide d'imposer une densité de probabilité nulle en dehors de  $[-\bar{m}_E^-; \bar{m}_E^+]$  quitte à la renormaliser ensuite. Avec une telle loi, la probabilité d'observer  $m$  dans un intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  donné est :

$$P(-m_E^- \leq m \leq m_E^+) = \int_{-m_E^-}^{m_E^+} p(m) dm \quad [4]$$

Puisque les méconnaissances de base  $m_E^+$  et  $m_E^-$  sont définies dans [2] de part et d'autre du modèle théorique, l'événement précédent peut être décrit par deux événements indépendants :

- soit  $m \in [0; m_E^+]$ , i.e. ( $m_E^- = 0, m_E^+ \geq 0$ ) avec une probabilité  $P^+(m_E^+)$  ;
- soit  $m \in [-m_E^-; 0]$ , i.e. ( $m_E^- \geq 0, m_E^+ = 0$ ) avec une probabilité  $P^-(m_E^-)$ .

On a alors  $P^+(\infty) + P^-(\infty) = 1$ , et même  $P^+(\infty) = P^-(\infty) = \frac{1}{2}$  dans le cas particulier d'une loi gaussienne centrée. Ce cas montre comment on peut représenter une incertitude représentée par une loi de probabilité classique à l'aide de notre concept de méconnaissance : selon la valeur de  $m$  obtenue par tirage, on obtient deux types d'intervalles distincts :  $[0; m_E^+]$  et  $[-m_E^-; 0]$ .

### 2.3. Concept de probabilité d'intervalle

Puisque l'utilisation de deux probabilités  $P^+$  et  $P^-$  est assez délicate en pratique, quelques outils mathématiques ont été introduits : considérons une famille d'intervalles  $[-m_E^-; m_E^+]$  avec  $m_E^+ + m_E^- = L$ . L'intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  est dit *standard* si pour  $L$  donné, la probabilité d'avoir  $m$  appartenant à  $[-m_E^-; m_E^+]$  est maximale sur l'ensemble des intervalles de longueur  $L$  :

$$I(L) = \arg \max_{\substack{[-m_E^-; m_E^+] \\ m_E^+ + m_E^- = L}} P^+(m_E^+) + P^-(m_E^-) \quad [5]$$

De cette définition, on peut introduire le concept de *probabilité d'intervalle* en posant que pour  $L$  donné,  $P(L)$  est la probabilité d'avoir  $m$  appartenant à  $I(L)$  :

$$P(L) = P(m \in I(L)) = \max_{\substack{[-m_E^-; m_E^+] \\ m_E^+ + m_E^- = L}} P^+(m_E^+) + P^-(m_E^-) \quad [6]$$

Une interprétation possible de ces définitions est la suivante : si l'on cherche un intervalle de méconnaissances de base tel que  $m$  ait une probabilité  $P$  donnée d'être à l'intérieur, on considère de façon unique l'intervalle standard  $I(L)$  tel que la probabilité d'intervalle associée  $P(L)$  est égale à  $P$ . On peut montrer que cet intervalle  $I(L)$  est en fait le plus petit intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  tel que  $P^+(m_E^+) + P^-(m_E^-) = P$  :

$$I(L) = \arg \min_{\substack{[-m_E^-; m_E^+] \\ P^+(m_E^+) + P^-(m_E^-) = P}} m_E^+ + m_E^- \quad [7]$$

REMARQUE. – Dans le cas uniforme, il n'y a pas unicité. Ce qui importe est de pouvoir se ramener à une famille d'intervalles « standards » définie par une seule variable stochastique ; il en résulte une simplification notable dans l'analyse.

## 3. Utilisation des méconnaissances

### 3.1. Principe

Considérons une certaine quantité d'intérêt  $\alpha$  concernant l'ensemble de la structure. On pose  $\Delta\alpha_{\text{mod}} = \alpha_{\text{mod}} - \bar{\alpha}$ , où  $\bar{\alpha}$  est la valeur de la quantité d'intérêt pour le modèle théorique déterministe. À la quantité  $\Delta\alpha_{\text{mod}}$ , on peut associer grâce au

modèle de méconnaissance deux bornes  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^+$  et  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^-$  qui l'encadrent : il s'agit simplement, comme on le montrera dans la section 3.2, de la propagation des intervalles de méconnaissances de base  $([-m_E^-; m_E^+])_{E \in \Omega}$ . Dès lors que l'on connaît les lois de probabilité sur les méconnaissances de base, on est capable de déterminer la distribution de ces bornes  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^+$  et  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^-$  sous la forme d'une probabilité d'intervalle  $P_\alpha(L)$  telle que  $P(\Delta\alpha_{\text{mod}} \in I_{\Delta\alpha_{\text{mod}}}(L)) = P_\alpha(L) \forall L$ . Encore une fois, cela revient à dire que, pour une probabilité  $P$  donnée, on considère l'intervalle standard  $I_{\Delta\alpha_{\text{mod}}}(L)$  tel que  $P(\Delta\alpha_{\text{mod}} \in I_{\Delta\alpha_{\text{mod}}}(L)) = P$ . Les deux bornes de cet intervalle  $I_{\Delta\alpha_{\text{mod}}}(L)$ , notées  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^-(P)$  et  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^+(P)$ , constituent ce que l'on appelle la *méconnaissance effective* sur la quantité d'intérêt  $\alpha$ .

### 3.2. Méconnaissances effectives

Le calcul de méconnaissances effectives concerne des quantités  $\alpha$  définies sur l'ensemble de la structure : des pulsations propres  $\omega_i$  et des formes propres de vibration  $\phi_i$ . On rappelle que le couple de valeurs  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^-(P)$  et  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^+(P)$  constitue ce qu'on appelle la *méconnaissance effective* liée à la quantité  $\Delta\alpha_{\text{mod}}$ .

#### 3.2.1. Méconnaissance effective sur une pulsation propre

Si les modes  $\bar{\phi}_i$  du modèle théorique déterministe (associés respectivement aux pulsations propres  $\bar{\omega}_i$ ) sont normalisés par rapport à la matrice de masse, une approximation du premier ordre nous donne pour  $\Delta(\omega_i^2) = \omega_i^2 - \bar{\omega}_i^2$  :

$$\Delta(\omega_i^2) = \phi_i^T K \phi_i - \bar{\phi}_i^T \bar{K} \bar{\phi}_i \simeq \bar{\phi}_i^T (K - \bar{K}) \bar{\phi}_i = 2 \sum_{E \in \Omega} (e_E(\bar{\phi}_i) - \bar{e}_E(\bar{\phi}_i)) \quad [8]$$

La relation [2] nous permet de propager les intervalles  $([-m_E^-; m_E^+])_{E \in \Omega}$ , où pour chaque sous-structure  $E$ ,  $(m_E^-, m_E^+)$  est une réalisation donnée des méconnaissances de base selon les lois de probabilité choisies, de la façon suivante :

$$-\Delta\omega_{\text{imod}}^{2-} \leq \Delta\omega_i^2 \leq \Delta\omega_{\text{imod}}^{2+} \quad [9]$$

avec

$$\Delta\omega_{\text{imod}}^{2-} = 2 \sum_{E \in \Omega} m_E^- \bar{e}_E(\bar{\phi}_i) \quad [10]$$

$$\Delta\omega_{\text{imod}}^{2+} = 2 \sum_{E \in \Omega} m_E^+ \bar{e}_E(\bar{\phi}_i) \quad [11]$$

Connaissant les lois de probabilité sur les méconnaissances de base, on est capable d'obtenir les dispersions des bornes  $\Delta\omega_{\text{imod}}^{2-}$  et  $\Delta\omega_{\text{imod}}^{2+}$ , et donc de déterminer, pour une valeur de probabilité  $P$  donnée, les deux bornes  $\Delta\omega_{\text{imod}}^{2-}(P)$  et  $\Delta\omega_{\text{imod}}^{2+}(P)$  de l'intervalle standard  $I_{\Delta\omega_{\text{imod}}^2}(L)$  associé, ou autrement dit la *méconnaissance effective* sur le carré de la fréquence propre  $\omega_i^2$ .

### 3.2.2. Méconnaissance effective sur une forme propre

Pour des réalisations  $(m_E^-, m_E^+)_{E \in \Omega}$  de faibles valeurs, on peut approcher la variation de la valeur d'une forme propre en un degré de liberté (ddl) particulier par :

$$\Delta\phi_{ki} = \phi_{ki} - \bar{\phi}_{ki} \simeq U^T \Delta K \bar{\phi}_i = \sum_{E \in \Omega} U^T (K_E - \bar{K}_E) \bar{\phi}_i \quad [12]$$

où  $U$  est un vecteur donné dont nous ne détaillerons pas le calcul ici. En utilisant l'égalité  $U^T K_E \bar{\phi}_i = \frac{1}{2} e_E (U + \bar{\phi}_i) - \frac{1}{2} e_E (U - \bar{\phi}_i)$  et la relation fondamentale [2], on peut propager les intervalles de méconnaissances de base de la façon suivante :

$$-\Delta\phi_{ki}^- \leq \Delta\phi_{ki} \leq \Delta\phi_{ki}^+ \quad [13]$$

avec

$$\Delta\phi_{ki}^- = \frac{1}{2} \sum_{E \in \Omega} \{m_E^- \bar{e}_E (U + \bar{\phi}_i) + m_E^+ \bar{e}_E (U - \bar{\phi}_i)\} \quad [14]$$

$$\Delta\phi_{ki}^+ = \frac{1}{2} \sum_{E \in \Omega} \{m_E^+ \bar{e}_E (U + \bar{\phi}_i) + m_E^- \bar{e}_E (U - \bar{\phi}_i)\} \quad [15]$$

On peut alors déterminer, pour une valeur de probabilité  $P$  donnée, les deux bornes  $\Delta\phi_{ki}^- (P)$  et  $\Delta\phi_{ki}^+ (P)$  de l'intervalle standard  $I_{\Delta\phi_{ki} \text{ mod}} (L)$  associé, ou autrement dit la méconnaissance effective sur la valeur au ddl  $k$  de la forme propre  $\phi_i$ .

## 3.3. Détermination des méconnaissances de base

### 3.3.1. Principe

À la famille de structures réelles peuvent être associées deux valeurs  $\Delta\alpha_{\text{exp}}^- (P)$  et  $\Delta\alpha_{\text{exp}}^+ (P)$  qui, pour une valeur  $P$  donnée, encadrent une proportion  $P$  de valeurs mesurées sur les structures réelles de la quantité d'intérêt  $\Delta\alpha_{\text{exp}}$ . Pour éviter toute ambiguïté, on impose que ces deux valeurs sont celles qui définissent le plus petit intervalle contenant une proportion  $P$  des quantités mesurées  $\Delta\alpha_{\text{exp}}$ . La comparaison entre les données expérimentales et les valeurs issues du modèle de méconnaissance se fait alors en affirmant que les méconnaissances de base doivent être telles que :

$$P(\Delta\alpha_{\text{exp}} \in I_{\Delta\alpha_{\text{mod}}} (L)) \geq P_{\alpha} (L) \forall L \quad [16]$$

En termes d'intervalles standards, cela revient à dire que l'on doit avoir les relations  $\Delta\alpha_{\text{exp}}^- (P) \leq \Delta\alpha_{\text{mod}}^- (P)$  et  $\Delta\alpha_{\text{exp}}^+ (P) \leq \Delta\alpha_{\text{mod}}^+ (P)$  pour toute valeur de probabilité  $P$  donnée. Cette interprétation est en fait une généralisation des valeurs à 99 % évoquées dans [PUE 03].

La quantification de la qualité d'un modèle vis-à-vis d'une référence expérimentale se traduit alors par la détermination des méconnaissances de base qui sont les plus représentatives des données expérimentales. L'idée majeure de cette détermination

est que plus on a d'informations expérimentales, plus on est susceptible de réduire les méconnaissances de base. Ce principe suppose que l'on puisse avoir au départ une certaine description, éventuellement grossière, mais nécessairement majorante, des méconnaissances de base pour chaque sous-structure ; ceci peut être obtenu grâce à de la connaissance *a priori* ou à de l'expérience concernant la structure étudiée. Cette description majorante est donnée par des méconnaissances de base initiales  $(\mathbf{m}_{\mathbf{E}}^{+0}, \mathbf{m}_{\mathbf{E}}^{-0})_{\mathbf{E} \in \Omega}$  (associées à des lois de probabilité).

Le procédé de réduction consiste à utiliser l'apport d'informations expérimentales pertinentes pour réduire le niveau de méconnaissance sur une sous-structure à la fois. Considérons que la sous-structure  $E^*$  est fortement concernée par l'apport d'information expérimentale. Il s'agit de déterminer des méconnaissances de base  $(\mathbf{m}_{\mathbf{E}^*}^-, \mathbf{m}_{\mathbf{E}^*}^+)$  plus « petites », les méconnaissances sur les autres sous-structures n'évoluant pas. Ceci se traduit en termes de probabilités d'intervalle par l'inégalité suivante :

$$P_{E^*}^0(L) \leq P_{E^*}(L) \quad \forall L \quad [17]$$

Cette réduction est réalisée sous la contrainte [16] associée à l'apport d'information expérimentale retenue, qui s'écrit pour tout  $P$  :

$$\Delta\alpha_{\text{exp}}^-(P) \leq \Delta\alpha_{\text{mod}}^-(P) \quad \text{et} \quad \Delta\alpha_{\text{exp}}^+(P) \leq \Delta\alpha_{\text{mod}}^+(P) \quad [18]$$

### 3.3.2. Prise en compte des cas les pires

On rappelle que la méconnaissance effective est issue de la probabilité d'intervalle  $P_{\alpha}(L)$  caractérisant les distributions des bornes  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^+$  et  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^-$  encadrant la quantité d'intérêt  $\Delta\alpha_{\text{mod}}$  relative au modèle. Ces bornes font intervenir des contributions de la part de toutes les sous-structures ; ainsi, la réduction de la méconnaissance sur  $E^*$  peut tout à fait être faussée par des niveaux de méconnaissance initiaux très surestimés sur les autres sous-structures  $E \neq E^*$ . Pour éviter ce cas de figure, on envisage de tenir compte des cas les pires concernant toutes les autres sous-structures :

$$\Delta\alpha_{\text{mod}}^{+\text{pire}} = \Delta\alpha_{\mathbf{E}^*}^+ + \sum_{\mathbf{E} \neq \mathbf{E}^*} \Delta\alpha_{\mathbf{E}}^{+\text{pire}} \quad [19]$$

$$\Delta\alpha_{\text{mod}}^{-\text{pire}} = \Delta\alpha_{\mathbf{E}^*}^- + \sum_{\mathbf{E} \neq \mathbf{E}^*} \Delta\alpha_{\mathbf{E}}^{-\text{pire}} \quad [20]$$

avec, dans le cas de la méconnaissance sur le carré d'une pulsation propre :

$$\Delta\alpha_{\mathbf{E}}^{+\text{pire}} = -2\mathbf{m}_{\mathbf{E}}^- \bar{e}_{\mathbf{E}}(\bar{\phi}_{\mathbf{i}}) \quad [21]$$

$$\Delta\alpha_{\mathbf{E}}^{-\text{pire}} = -2\mathbf{m}_{\mathbf{E}}^+ \bar{e}_{\mathbf{E}}(\bar{\phi}_{\mathbf{i}}) \quad [22]$$

On peut alors associer aux bornes  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^{+\text{pire}}$  et  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^{-\text{pire}}$  une probabilité d'intervalle  $P_{\alpha^{\text{pire}}}(L)$  et en déduire les deux bornes  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^{+\text{pire}}(P)$  et  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^{-\text{pire}}(P)$  de l'intervalle standard  $I_{\Delta\alpha_{\text{mod}}^{\text{pire}}}(L)$  associé à une valeur de probabilité  $P$  donnée. Ainsi, de nouvelles contraintes doivent être prises en compte :

$$\Delta\alpha_{\text{exp}}^-(P) \leq \Delta\alpha_{\text{mod}}^{-\text{pire}}(P) \quad \text{et} \quad \Delta\alpha_{\text{exp}}^+(P) \leq \Delta\alpha_{\text{mod}}^{+\text{pire}}(P) \quad [23]$$

### 3.3.3. Coefficient de représentativité

Comme l'information apportée par l'essai expérimental est nécessairement partielle, on introduit dans les égalités précédentes un coefficient multiplicateur sur la contribution de  $E^*$  qui permet de quantifier à quel point l'information expérimentale sélectionnée est représentative du comportement de la structure : ce terme  $\rho_{E^*} \in ]0; 1]$ , appelé *coefficient de représentativité*, est maximal quand les données expérimentales traduisent parfaitement la mécanique globale de la structure. Pour illustrer cette idée, on peut prendre l'exemple d'un essai de traction : ce dernier sera très adapté pour réduire la méconnaissance sur un modèle de sous-structure isotrope, d'où l'idée de prendre une valeur maximale  $\rho_{E^*} = 1$  ; inversement, pour un modèle de sous-structure orthotrope, cet essai directionnel ne peut donner d'informations que dans la direction de sollicitation ; l'apport d'informations est donc très partiel et on pondère alors l'essai avec un coefficient  $\rho_{E^*} < 1$ . Au bilan, on considère :

$$\Delta\alpha_{\text{mod}}^{+\text{pire}} = \rho_{E^*} \Delta\alpha_{E^*}^+ + \sum_{E \neq E^*} \Delta\alpha_E^{+\text{pire}} \quad [24]$$

$$\Delta\alpha_{\text{mod}}^{-\text{pire}} = \rho_{E^*} \Delta\alpha_{E^*}^- + \sum_{E \neq E^*} \Delta\alpha_E^{-\text{pire}} \quad [25]$$

## 4. Application à un cas simple

### 4.1. Définition de la structure

#### 4.1.1. Données du modèle

La structure étudiée est un treillis plan analogue à celui étudié dans [PUE 03] ; il est constitué de six barres rectilignes reliées par des rotules, que l'on peut l'observer sur la figure 1. On suppose que les barres ne sont sollicitées qu'en traction-compression, et que les liaisons entre la structure et le bâti sont parfaitement rigides. Les caractéristiques matériaux du modèle théorique déterministe sont données dans le tableau 1.

Le modèle initial de méconnaissances de base  $(\mathbf{m}_E^{+0}, \mathbf{m}_E^{-0})_{E \in \Omega}$  est le suivant :

- pour les groupes g1 et g2 : loi gaussienne de moyenne nulle et telle que  $2,5 \times \text{écart type}$  égal à 0,5 ;
- pour le groupe g3 : loi uniforme de moyenne nulle et d'étendue  $[-0,5; 0,5]$ .

#### 4.1.2. Données expérimentales

On considère une famille de treillis tous semblables, simulés à partir du modèle théorique déterministe en introduisant certaines dispersions de raideur dans les caractéristiques matériaux ; ces dernières sont obtenues en multipliant les raideurs du modèle déterministe par des variables aléatoires associées à des lois précisées dans le tableau 1. Il faut noter que le matériau « X » n'est pas très bien connu et que la dispersion associée de raideur vérifie une distribution uniforme.

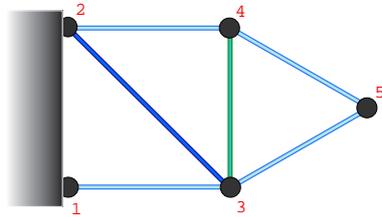


Figure 1. Treillis plan étudié

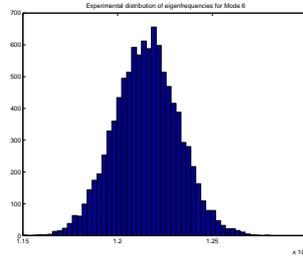


Figure 2. Répartition de  $\omega_{6 \text{ exp}}^2$

Gr.	Matériau	Module d'Young	Loi choisie	Caractéristiques relatives ( $\mu$ : moyenne / $\sigma$ : écart type)
g1	alu	$E_{g1} = 72GPa$	gaussienne	$\mu = 0 / 2,5 \times \sigma = 0,05$
g2	acier	$E_{g2} = 210GPa$	gaussienne	$\mu = -0,05 / 2,5 \times \sigma = 0,1$
g3	« X »	$E_{g3} = 10GPa$	uniforme	domaine = $[-0,1; 0,2]$

Tableau 1. Propriétés matériaux du modèle déterministe du treillis et caractéristiques relatives des structures numériquement simulées, où les barres 1-3, 3-5, 4-5 et 2-4 forment le groupe g1, la barre 2-3 est le groupe g2 et la barre 3-4 est le groupe g3

Pour chacun de ces treillis « expérimentaux » simulés, on est capable de calculer les fréquences propres et modes propres, et donc de déterminer la répartition des quantités d'intérêt expérimentales (voir par exemple la répartition de la quantité  $\omega_{exp}^2$  pour le mode 6 sur la figure 2). Le processus de réduction est entrepris en utilisant comme informations expérimentales les valeurs  $\Delta\omega_{i \text{ exp}}^{2+}(0,99)$  et  $\Delta\omega_{i \text{ exp}}^{2-}(0,99)$  qui encadrent 99 % des valeurs expérimentales de fréquences propres effectivement mesurées ; en particulier, on ne s'occupe pas de la répartition de ces valeurs à l'intérieur de ces valeurs. Si on voulait une description plus riche, on pourrait aussi utiliser les valeurs à 50 % de ces quantités expérimentales, ce qui nous donnerait une estimation de l'écart type.

#### 4.2. Réduction des méconnaissances de base

Compte tenu du modèle initial de méconnaissances et des données expérimentales, il est important de sélectionner quelles sont les meilleures mesures pour réaliser les réductions successivement sur les différentes sous-structures. Une méthode efficace consiste à s'appuyer sur le fait que la sensibilité des méconnaissances effectives vis-à-vis des méconnaissances de base est directement liée aux énergies de déformation modales du modèle théorique déterministe, comme on peut le constater dans les expressions de la section 3.2. En effet, les informations expérimentales les plus pertinentes dans le processus de réduction des méconnaissances de base de la structure  $E^*$  sont celles pour lesquelles l'énergie de déformation modale se trouve majoritairement

dans  $E^*$ . Comme les informations expérimentales que nous avons retenues concernent des fréquences propres, nous avons besoin de considérer les énergies  $\bar{e}_E(\bar{\phi}_i)$ ; celles-ci sont répertoriées dans le tableau 2 où les plus importantes ont été mises en valeur.

$\bar{e}_E(\bar{\phi}_i)$	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
E=g1	<b>3, 3.10<sup>5</sup></b>	<b>1, 3.10<sup>6</sup></b>	<b>7, 6.10<sup>6</sup></b>	3, 8.10 <sup>6</sup>	<b>2, 5.10<sup>7</sup></b>	<b>6, 0.10<sup>7</sup></b>
E=g2	<b>1, 4.10<sup>5</sup></b>	6, 7.10 <sup>4</sup>	9, 9.10 <sup>3</sup>	<b>1, 0.10<sup>7</sup></b>	2, 0.10 <sup>6</sup>	1, 7.10 <sup>5</sup>
E=g3	<b>2, 5.10<sup>5</sup></b>	<b>1, 7.10<sup>6</sup></b>	6, 1.10 <sup>5</sup>	4, 7.10 <sup>5</sup>	6, 9.10 <sup>4</sup>	1, 9.10 <sup>5</sup>

**Tableau 2.** *Énergies de déformation modales pour les modes 1 à 6*

La réduction est menée en considérant que les informations expérimentales sont représentatives du comportement global du treillis (coefficients  $\rho_E$  égaux à 1). Les méconnaissances obtenues après réduction sont données dans le tableau 3 et peuvent être directement comparées dans ce cas simple avec les dispersions de raideur introduites pour simuler l'expérimental (tableau 1).

Gr.	Données expérimentales	Méconnaissances après réduction
g1	$(\Delta\omega_{6\text{exp}}^{2+}(0, 99), \Delta\omega_{6\text{exp}}^{2-}(0, 99))$	gaussienne : $\mu = -0, 001 / 2, 5 \times \sigma = 0, 033$
g2	$(\Delta\omega_{4\text{exp}}^{2+}(0, 99), \Delta\omega_{4\text{exp}}^{2-}(0, 99))$	gaussienne : $\mu = -0, 030 / 2, 5 \times \sigma = 0, 063$
g3	$(\Delta\omega_{2\text{exp}}^{2+}(0, 99), \Delta\omega_{2\text{exp}}^{2-}(0, 99))$	uniforme : domaine = $[-0, 101; 0, 205]$

**Tableau 3.** *Résultats de la réduction des méconnaissances de base du treillis*

### 4.3. Capacité de prédiction

Avec les méconnaissances de base que l'on vient juste de déterminer, on peut calculer les méconnaissances effectives pour les trois modes que l'on n'a pas encore utilisés (1, 3 et 5), de façon à évaluer la qualité des résultats de notre procédé de réduction. La comparaison est réalisée sur les valeurs à 99 % dans le tableau 4. On constate que les contraintes sont respectées de façon satisfaisante pour les modes 1, 3 et 5, ce qui montre la cohérence des résultats obtenus avec les modes 2, 4 et 6.

i	$\Delta\omega_{i\text{mod}}^{2-}$	$\Delta\omega_{i\text{exp}}^{2-}$	$\Delta\omega_{i\text{exp}}^{2+}$	$\Delta\omega_{i\text{mod}}^{2+}$	$\Delta\phi_{ki\text{mod}}^{-}$	$\Delta\phi_{ki\text{exp}}^{-}$	$\Delta\phi_{ki\text{exp}}^{+}$	$\Delta\phi_{ki\text{mod}}^{+}$
1	1, 36.10 <sup>6</sup>	1, 35.10 <sup>6</sup>	1, 53.10 <sup>6</sup>	1, 54.10 <sup>6</sup>	0, 85	0, 88	0, 99	1, 01
3	1, 58.10 <sup>7</sup>	1, 58.10 <sup>7</sup>	1, 71.10 <sup>7</sup>	1, 70.10 <sup>7</sup>	-1, 00	-0, 98	-0, 91	-0, 90
5	5, 28.10 <sup>7</sup>	5, 29.10 <sup>7</sup>	5, 68.10 <sup>7</sup>	5, 69.10 <sup>7</sup>	-0, 74	-0, 72	-0, 62	-0, 62

**Tableau 4.** *Comparaison modèle-expérimental (valeurs à 99 %) pour les modes 1, 3, 5*

## 5. Étude d'un cas industriel

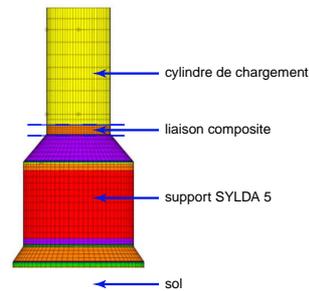
### 5.1. Description de la structure

On présente ici l'application de la méthode à une structure industrielle réelle : le support de satellites Sylda5, développé par le groupe EADS, et capable de transporter

deux satellites simultanément (figure 3). Des mesures en 260 capteurs sous vibrations libres ont été réalisées par IABG pour DASA/DORNIER sous contrat avec le CNES. Le modèle proposé par EADS représente à la fois le support proprement dit et un cylindre de chargement simulant la présence d'un satellite posé sur le support ; il est constitué de 38 sous-structures comprenant divers matériaux, dont des matériaux sandwichs orthotropes, de l'aluminium et de l'acier. Les premières mesures ayant montré qu'il était indispensable de tenir compte de la déformation du sol sous le support, le sol a été très simplement modélisé par 3 ressorts de torsion, un ressort de translation et une contrainte de mouvement de corps rigide pour tous les nœuds de l'interface entre le support et le sol. Au final, le modèle comprend 27 648 ddl et 9 728 éléments.



**Figure 3.** Photo du support Sylda5



**Figure 4.** Modèle associé au Sylda5

## 5.2. Détermination des méconnaissances de base

Au préalable, le modèle a été recalé en utilisant la méthode décrite dans [LAD 99], à l'aide des 12 premiers modes. Il s'agit dès lors de déterminer les méconnaissances restantes. Dans ce but, la structure est divisée en 4 grands groupes de sous-structures, comme précisé sur la figure 4 :

- le groupe g1 est associé au cylindre de chargement ;
- le groupe g2 comprend la liaison composite entre le cylindre et le Sylda5 ;
- le groupe g3 est le support Sylda5 proprement dit ;
- le groupe g4 est associé au modèle de sol.

Le modèle initial de méconnaissances de base est le suivant :

- pour les groupes g1 et g3 : loi gaussienne de moyenne nulle et telle que  $2,5 \times$  écart type égal à 0,2 ;
- pour le groupe g2 : loi uniforme de moyenne nulle et d'étendue  $[-0, 2; 0, 2]$  ;
- pour le groupe g4 : loi uniforme de moyenne nulle et d'étendue  $[-0, 5; 0, 5]$ .

L'information expérimentale est constituée des valeurs extrêmes de fréquences propres et formes propres d'une série de mesures (modélisation par intervalle, sans loi

de probabilité) ; on précise dans le tableau 5 dans quel ordre et avec quelles données est réalisée la réduction, ainsi que les méconnaissances de base après réduction (coefficients  $\rho_E$  égaux à 1). Ces résultats confirment la qualité du modèle du support (g3) qui a été recalé ainsi que celui de la liaison (quelques %) tandis que la très grande simplicité du modèle introduit pour le sol se traduit par une forte valeur de méconnaissance.

Gr.	Données expérimentales	Méconnaissances après réduction
g3	$(\Delta\omega_{4\text{exp}}^{2+}, \Delta\omega_{4\text{exp}}^{2-})$	gaussienne : $\mu = -0,008 / 2,5 \times \sigma = 0,008$
g1	$(\Delta\omega_{8\text{exp}}^{2+}, \Delta\omega_{8\text{exp}}^{2-})$	gaussienne : $\mu = 0,072 / 2,5 \times \sigma = 0,072$
g4	$(\Delta\omega_{6\text{exp}}^{2+}, \Delta\omega_{6\text{exp}}^{2-})$	uniforme : domaine = $[0, 0; 0, 435]$
g2	$(\Delta\omega_{3\text{exp}}^{2+}, \Delta\omega_{3\text{exp}}^{2-})$	uniforme : domaine = $[-0,060; 0, 0]$

**Tableau 5.** Résultats de la réduction des méconnaissances de base du Sylva

## 6. Conclusion

On a vu dans cet article quelques applications de la théorie des méconnaissances qui est en fait une approche quantitative de la validation de modèle. La méthode permet de quantifier les incertitudes au niveau des sous-structures en utilisant des quantités d'intérêt définies sur l'ensemble de la structure. Le procédé de réduction présenté ici permet de déterminer les méconnaissances de base pour chaque sous-structure à partir de valeurs majorantes supposées *a priori* ; pour cela, les données expérimentales sont considérées comme de l'information permettant de réduire les méconnaissances de la structure. Ces études constituent les prémisses de l'élaboration d'une méthode générale de réduction des méconnaissances.

## 7. Bibliographie

- [BEN 99] BEN-HAIM Y., « Design Certification with Information-Gap Uncertainty », *Structural Safety*, vol. 21, 1999, p. 269-289.
- [LAD 99] LADEVÈZE P., CHOUAKI A., « Application of a Posteriori Error Estimation for Structural Model Updating », *Inverse Problems*, vol. 15, 1999, p. 49-58.
- [LAD 02] LADEVÈZE P., « Sur une Théorie des Méconnaissances en Calcul des Structures », Programme RAF 2001 n° SY/XS 136 127, Avril 2002, EADS Launch Vehicles.
- [LAD 04] LADEVÈZE P., PUEL G., ROMEUF T., « On a Strategy of Reduction of the Lack of Knowledge (LOK) in Model Validation », *Proceedings of the Fourth International Conference on Sensitivity Analysis of Modeling Output*, Santa Fe, New Mexico, 2004.
- [MOT 93] MOTTERSHEAD J., FRISWELL M., « Model Updating in Structural Dynamics : A Survey », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 167, n° 2, 1993, p. 347-375.
- [PUE 03] PUEL G., LADEVÈZE P., DERAEMAERKER A., BARTHE D., « Sur une Théorie des Méconnaissances en Calcul des Structures », *Actes du Sixième Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (Var), 20-23 Mai 2003, p. 399-406.
- [SCH 01] SCHÜLLER G. I., « Computational Stochastic Mechanics - Recent Advances », *Computers and Structures*, vol. 79, 2001, p. 2225-2234.