

---

# L'approche énergétique de la rupture élastoplastique appliquée à la modélisation de propagation d'une entaille

**Eric Lorentz — Yves Wadier**

*Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables  
Unité mixte de recherche CNRS/EDF  
1, avenue du Général de Gaulle  
F-92141 Clamart Cedex  
eric.lorentz@edf.fr, yves.wadier@edf.fr*

---

*RÉSUMÉ. On définit un taux de restitution de l'énergie en plasticité applicable à une fissure représentée par une entaille, en s'appuyant sur la formulation de Francfort et Marigo pour les milieux fragiles et sur la mécanique continue de l'endommagement. Ce paramètre permet de prédire la propagation progressive ou brutale de l'entaille. Le modèle d'entaille remédie à la fois au paradoxe de Rice et aux effets d'échelle de la théorie de Francfort et Marigo induits par l'hypothèse de Griffith. Les résultats obtenus sur une étude relative à l'effet de « pré-chargement à chaud » sont en bon accord avec l'expérience.*

*ABSTRACT. An energy release rate is defined for a crack represented by a notch, relying on the theory of Francfort and Marigo and Continuum Damage Mechanics. Progressive as well as sudden crack propagation can be predicted. The paradox of Rice and the spurious scale effects of Francfort and Marigo's theory induced by Griffith's hypothesis can be eliminated. The results obtained in the case of the analysis of the « warm pre-stress effect » are in good agreement with the experimental results.*

*MOTS-CLÉS : rupture fragile, plasticité, endommagement, approche énergétique.*

*KEYWORDS : cleavage fracture, plasticity, damage, energy approach.*

---

## 1. Introduction

L'approche globale en mécanique de la rupture vise à caractériser l'amorçage et la propagation de fissures au moyen d'un seul paramètre. Sa simplicité justifie son intérêt sur le plan industriel et explique le volume colossal de travaux sur le sujet. Plus précisément, cette approche s'appuie sur un calcul de variation de l'énergie potentielle dans une propagation virtuelle infinitésimale de la fissure pour définir le taux de restitution d'énergie qui est comparé à un seuil dépendant (et en principe caractéristique) du matériau : la ténacité. On en déduit si la fissure se propage ou non. Il s'agit d'un simple bilan d'énergie : la propagation n'est possible que si elle restitue davantage d'énergie par redistribution des champs mécaniques qu'elle n'en consomme par dissipation.

Quelques questions et limites résultent de cette définition. Comment déterminer le trajet de fissuration, quelle définition pour l'énergie potentielle quand on quitte le cadre de l'élasticité (pour celui, en particulier, de l'élastoplasticité) et quelle définition de la dissipation ? En outre, le caractère infinitésimal exclut les propagations brutales (sur une distance finie). Enfin, il faut noter qu'en l'absence de fissures, le taux de restitution d'énergie est nul : aucune fissure ne peut donc s'initier. De plus, même pour une fissure préexistante, mais en présence de plasticité à écrouissage borné, ce taux de restitution d'énergie est également nul (Rice, 1966).

Une extension de ce cadre a été proposée par Francfort et Marigo en s'appuyant sur un principe de minimisation de l'énergie (Francfort *et al.*, 1998), notamment pour répondre aux questions d'initiation, de propagations brutales et de trajet prédéfini de fissures. Cependant des difficultés subsistent. Seuls des états d'équilibre sont considérés, ce qui revient à négliger les effets dynamiques, même lors d'une propagation brutale. L'application de ce nouveau modèle en plasticité à écrouissage borné (Lorentz *et al.*, 2000) permet de lever le paradoxe de Rice, mais un nouveau paradoxe lié aux effets d'échelle apparaît. A son paroxysme, il se traduit par une contrainte à rupture d'un barreau d'autant plus faible que le barreau est long.

Nous proposons ici une alternative qui vise à caractériser l'amorçage de fissures préexistantes ou non, en régime fragile en présence de plasticité, et dont la propagation peut-être brutale, donc avec effets dynamiques induits. En revanche, on continue de supposer que le trajet de fissuration est connu à l'avance. Cette formulation est fondée sur la modélisation de la fissure par une entaille (Bui 1980). Comme on le verra, elle permet de lever le paradoxe de Rice ainsi que les effets d'échelle indésirables de l'approche de Francfort et Marigo. Diverses comparaisons avec l'expérience nous semblent très prometteuses, comme celle décrite ici relative à l'effet de préchargement à chaud.

## 2. Fissuration et endommagement

La formulation de Francfort et Marigo en élasticité se fonde sur la minimisation d'une énergie  $E_{FM}$  qui dépend à la fois des déplacements  $u$  et des surfaces fissurées potentielles  $S$  (ou nouvellement créées  $\Delta S$ ) :

$$E_{FM}(u, S) = \int_{\Omega} \Phi_{el}(\varepsilon(u)) d\Omega + G_c \text{Aire}(\Delta S) \quad [1]$$

où  $\Omega$  est le domaine occupé par la structure,  $\Phi_{el}$  la densité d'énergie libre élastique et  $G_c$  l'énergie de fissuration du matériau.

Conformément à l'hypothèse de Griffith, l'énergie dissipée est bien proportionnelle à l'aire de la surface créée. En fait, [1] définit une énergie incrémentale : la séquence de chargement est discrétisée en incréments finis et la minimisation permet de déterminer l'état du système  $(u, S)$  à la fin d'un incrément connaissant celui au début de l'incrément  $(u^-, S^-)$ , où on notera dorénavant  $\Delta Q$  la variation d'une quantité  $Q$  au cours de l'incrément considéré.

La minimisation par rapport aux déplacements traduit l'équation d'équilibre sous forme variationnelle (minimisation de l'énergie potentielle à fissures fixées). Quant à la minimisation par rapport à toutes les surfaces fissurées possibles, elle peut être liée à la notion de loi de comportement globale (Lorentz *et al.*, 1999), dans laquelle la variable de fissuration apparaît comme un champ de variable interne.

Nous franchissons maintenant une étape supplémentaire en représentant les surfaces fissurées non plus comme des surfaces de discontinuité du champ de déplacement mais comme des zones endommagées à la rigidité résiduelle nulle. La fissure réelle est ainsi modélisée de façon épaissie, comme une entaille de largeur  $L_c$ , voir figure 1. Il ne s'agit donc plus de fissuration *stricto sensu* mais d'endommagement, mécanisme local de dégradation caractérisé par une énergie volumique dissipée à rupture  $w_c$ , c'est-à-dire l'énergie dissipée par un point matériel passant de l'état sain  $\chi = 0$  à l'état endommagé  $\chi = 1$ , où  $\chi$  désigne la nouvelle variable interne d'endommagement.

En conservant le cadre des lois de comportement globales, l'évolution de l'endommagement est alors donnée par la minimisation de l'énergie suivante, déjà étudiée pour sa simplicité (Francfort *et al.*, 1993) :

$$E(u, \chi) = \int_{\Omega} [(1 - \chi) \Phi_{el}(\varepsilon(u)) + \Delta \chi w_c] d\Omega \quad [2]$$

L'égalité des énergies dissipées dans une avancée de la fissure ou de l'entaille permet d'établir la relation naturelle entre l'énergie de fissuration du modèle de rupture et l'énergie dissipée volumique du modèle d'endommagement :

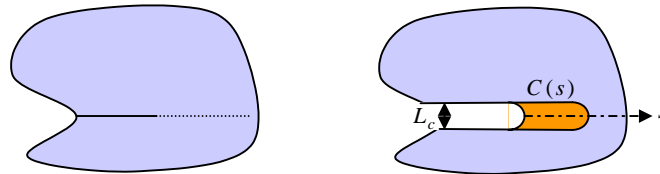
$$G_c = w_c L_c \quad [3]$$

Le mécanisme de rupture est dorénavant caractérisé par deux grandeurs dépendant du matériau,  $w_c$  et  $L_c$ , à la différence de la loi de Griffith qui ne dépend que de la seule énergie de fissuration  $G_c$  : cela permet de corriger le paradoxe lié aux effets d'échelle annoncé en introduction.

L'énergie [2] peut être étendue pour prendre en compte la plasticité. Conformément à l'hypothèse de rupture fragile, on suppose que la plasticité et la fissuration sont deux phénomènes découplés. On propose l'expression suivante :

$$E(u, \varepsilon^p, \alpha, \chi) = \int_{\Omega} \left[ (1-\chi) \Phi_{el}(\varepsilon(u), \varepsilon^p) + \Delta\chi w_c \right] d\Omega + E_{bl}(\alpha) + D_{pl}(\Delta\varepsilon^p, \Delta\alpha) \quad [4]$$

où  $\varepsilon^p$ ,  $\alpha$ ,  $E_{bl}$  et  $D_{pl}$  désignent respectivement les champs de déformation plastique et de variables d'écroutissage, l'énergie libre bloquée par l'écroutissage et la dissipation plastique.



**Figure 1.** Modélisation de la fissure par une entaille

### 3. Critère d'amorçage en rupture fragile

Nous nous restreignons dorénavant à des milieux 2D ainsi qu'à des trajets de fissuration prédéfinis et sujets à une évolution continue de la fissure (pas de fissures « en pointillés » le long du trajet). On peut ainsi paramétrer la position de la fissure par l'abscisse curviligne  $s$  de son front, voir à nouveau la figure 1, c'est-à-dire que l'on restreint les champs d'endommagement possibles  $\chi$  à une famille  $\chi(s)$ .

Sous ces hypothèses, on peut formuler la question de l'amorçage de fissures de la manière suivante : à un état donné  $(u^-, \varepsilon^{p-}, \alpha^-)$  du système, correspondant à une

évolution quasi statique du système sans propagation de l'entaille, la solution sans propagation  $s=0$  est-elle toujours licite au regard de la minimisation de [4] ? Dans le cas contraire, il y a propagation. Il s'agit donc de déterminer le minimum :

$$\min_{s \geq 0} E(u^-, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha^-, \chi(s)) \quad [5]$$

Seuls les termes de [4] qui dépendent de  $\chi$  interviennent explicitement dans la minimisation. En outre, comme l'endommagement est initialement nul, *i.e.*  $\chi(0) = 0$ , on a  $\Delta\chi = \chi$ . Donc [5] est équivalent à :

$$\min_{s \geq 0} \int_{\Omega} (w_c - \Phi_{el}^-) \chi(s) \, d\Omega \quad \text{avec:} \quad \Phi_{el}^- = \Phi_{el}(u^-, \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad [6]$$

En appelant « copeau »  $C(s)$  la zone endommagée, c'est-à-dire le support du champ  $\chi(s)$ , on obtient finalement le problème d'optimisation suivant, dans lequel apparaît un taux de restitution d'énergie  $G_p(s)$  :

$$\min_{s \geq 0} \underbrace{\int_{C(s)} w_c \, d\Omega}_{sL_c w_c = sG_c} - \int_{C(s)} \Phi_{el}^- \, d\Omega \Leftrightarrow \max_{s \geq 0} s(G_p(s) - G_c) \quad [7]$$

$$\text{où} \quad G_p(s) = \frac{1}{s} \int_{C(s)} \Phi_{el}^- \, d\Omega \quad [8]$$

Il y aura propagation si le maximum [7] n'est pas atteint en  $s = 0$  ou, encore :

$$\text{propagation si:} \quad \exists s > 0 \quad G_p(s) \geq G_c \quad [9]$$

Ce critère reste valable si la fissure se propage de manière brutale en entraînant des effets dynamiques, puisque la minimisation par rapport au déplacement, c'est-à-dire les équations d'équilibre, n'intervient pas dans son expression. Il est également remarquable que ce critère ne s'appuie que sur la seule énergie élastique et non sur les termes d'énergie bloquée ou de dissipation plastique, grâce au découplage introduit en [4]. Pour finir notons que la valeur finie du paramètre  $L_c$  implique clairement que  $G_p$  est non nul, même si  $s$  tend vers zéro, ce qui lève automatiquement le paradoxe de Rice.

#### 4. Application : étude du préchargement à chaud

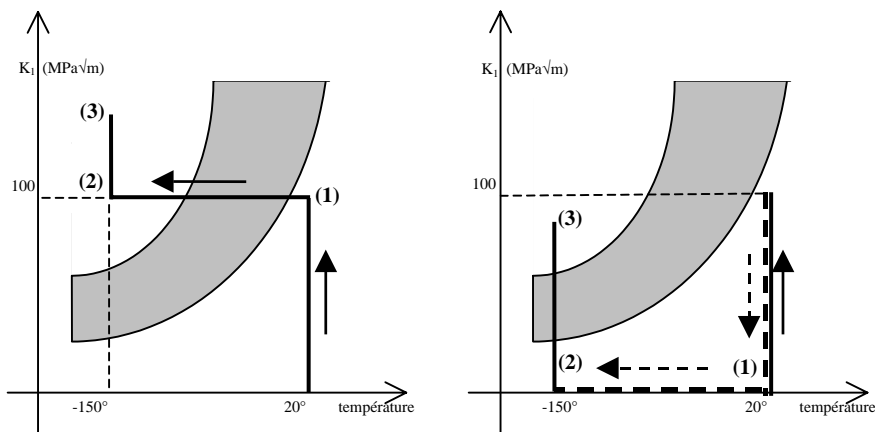
L'effet dit de « préchargement à chaud » a été observé maintes fois lors d'essais expérimentaux. Il correspond à un très net accroissement de la ténacité apparente en clivage à basse température après avoir effectué un pré-chargement à température ambiante ou à haute température.

##### 4.1. Définition et données du problème

Pour caractériser cet effet de préchargement à chaud, un programme expérimental récent (Lefèvre *et al.*, 2002) s'est appuyé sur des éprouvettes CT25 en acier ferritique 18MND5. Deux types de cycles de chargement ont été examinés. Ils combinaient efforts mécaniques, mesurés *via* un coefficient d'intensité des contraintes élastique  $K_I$ , et évolution thermique (voir figure 2) :

- LCF (Load/Cooling/Fracture) : chargement à 20°C (1), puis refroidissement de 20°C à – 150°C à charge constante (2), puis chargement et rupture à – 150°C (3).
- LUCF (Load/Unload/Cooling/Fracture) : chargement suivi d'une décharge à 20°C (1), puis refroidissement de 20°C à – 150°C (2) et enfin chargement et rupture à – 150°C (3).

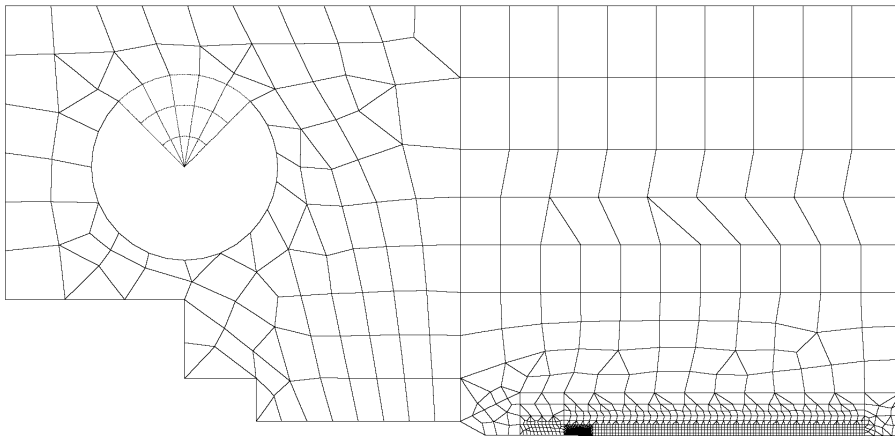
Comme on peut le constater, les valeurs critiques de ténacité apparente  $K_{Ic}$  (plage de valeurs en grisé) sont atteintes et même largement dépassées au moment de la rupture.



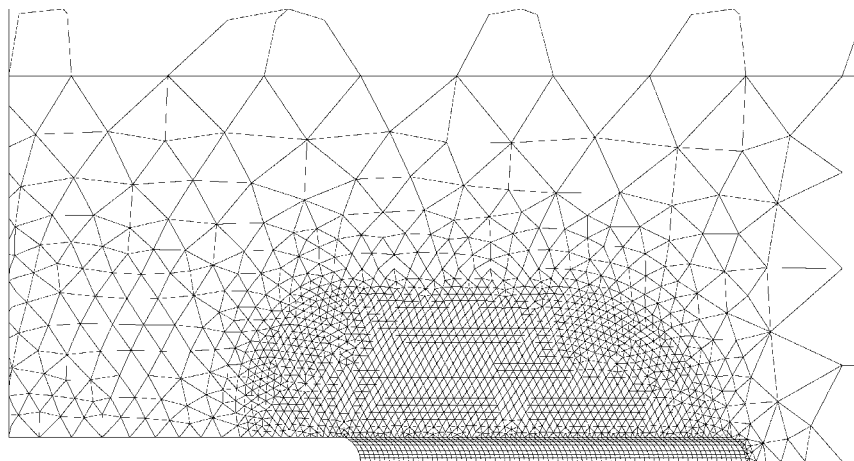
**Figure 2.** Cycles de chargements considérés, LCF et LUCF

#### 4.2. Modélisation et calculs

La géométrie de la structure considérée est celle d'une CT25 à bords entaillés standard, dont on ne représente que la moitié supérieure par raison de symétrie et qu'il est classique de traiter en déformations planes. On adopte une largeur d'entaille  $L_c = 100 \mu\text{m}$  qui impose l'emploi de mailles de  $6 \mu\text{m}$  de côté au voisinage du fond d'entaille, soit un maillage de plus de 20 000 degrés de liberté, présenté sur les figures 3 et 4. Le comportement du matériau est représenté par une loi de plasticité avec critère de von Mises (chargement LCF : écrouissage isotrope ; chargement LUCF : écrouissage cinématique de Chaboche).



**Figure 3.** Maillage d'une demie éprouvette CT



**Figure 4.** Maillage de la zone du fond d'entaille

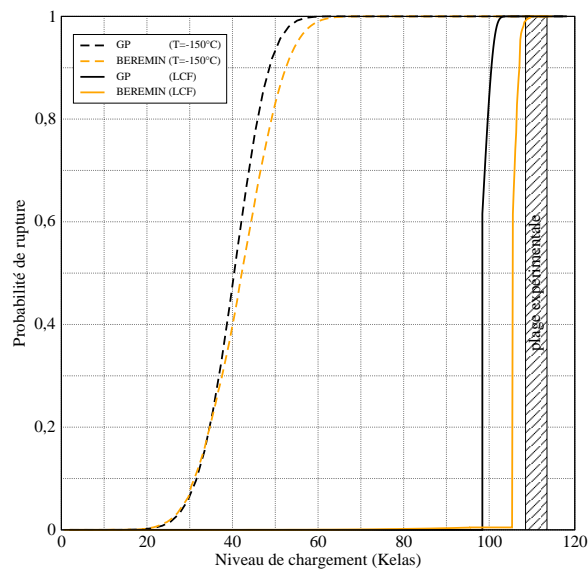
Afin de pouvoir également confronter nos résultats à ceux obtenus avec un modèle de BEREMIN, on définit une probabilité de rupture fonction de  $G_p$  et  $G_c$  de la forme :

$$P_r = 1 - \exp \left[ -a \left( G_p / G_c \right)^{m/2} \right] \quad [10]$$

où  $m$  (l'exposant du modèle de BEREMIN) et  $a$  sont des constantes identifiées à partir de la dispersion des résultats. Cette formule, construite par analogie avec celle du modèle de BEREMIN (Wadier *et al.*, 2003), n'a d'autre but que de permettre de faire des comparaisons entre les deux approches.

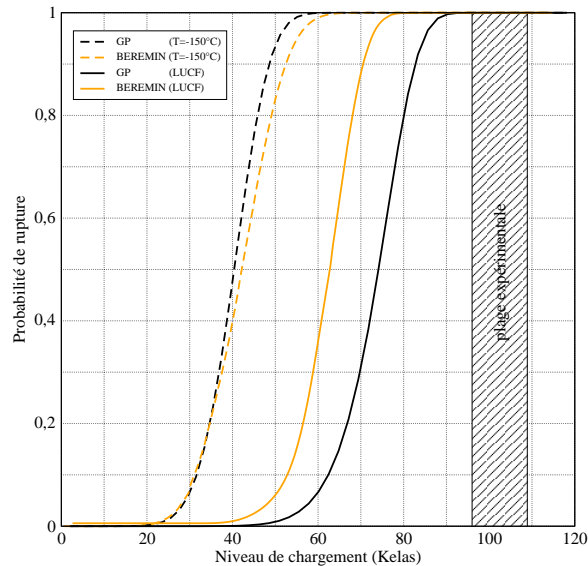
#### 4.3. Résultats obtenus

Nous avons tout d'abord identifié l'énergie de fissuration  $G_c$  en fonction de la température en utilisant les valeurs connues du chargement à rupture (sans préchargement, zones grisées). Nous avons ensuite simulé les 2 cycles de chargement LCF et LUCF puis comparé nos prédictions aux résultats expérimentaux et à ceux issus du modèle de BEREMIN (Wadier *et al.*, 2003). Les conclusions sont les suivantes (voir figures 5 et 6) :



**Figure 5.** Cycle LCF, probabilités de rupture en fonction du chargement





**Figure 6.** Cycle LUCF : probabilités de rupture en fonction du chargement

– concernant le chargement monotone on peut constater que l'accord entre l'approche énergétique et BEREMIN est excellent, ce qui signifie que la formule proposée pour le calcul de la probabilité est adaptée ;

– concernant le cycle LCF, les prévisions par l'approche énergétique (trait continu) ainsi que celles du modèle de BEREMIN (trait discontinu) dit « CPZM » parce qu'il prend en compte les effets de décharge dans le calcul de la probabilité de rupture (Lefèvre *et al.*, 2002), sont en bon accord avec les valeurs expérimentales (plage hachurée) ;

– concernant le cycle LUCF, les résultats obtenus par l'approche énergétique (écrouissage cinématique) sous-évaluent la charge à rupture (conservatisme) à l'instar de ceux obtenus avec le modèle de BEREMIN. Dans ce cas, il semble bien que la simple détermination du comportement élastoplastique du matériau par un écrouissage isotrope ou cinématique ne suffise pas. Il serait utile de mieux connaître ce comportement en décharge.

## 5. Conclusion

A l'issue de la comparaison expérience/théorie, le taux de restitution d'énergie défini en [8] semble être un bon candidat pour prédire l'amorçage de fissures.

D'autres résultats le confirment également, notamment la bonne représentation de l'effet « petit défaut » (en anglais, *shallow crack effect*), directement lié aux effets d'échelle (Wadier *et al.*, 2003).

Comme ce paramètre tient compte d'éventuelles propagations brutales, entraînant de ce fait des effets dynamiques, une piste de recherche consiste à étendre son emploi pour caractériser également la propagation, et donc l'arrêt de fissure, le cas échéant. Il pourrait ainsi apparaître comme une alternative à l'emploi de modèles cohésifs (Laverne *et al.*, 2003) ; *a minima*, une comparaison entre ces deux approches radicalement différentes semble requise pour s'assurer de leur cohérence.

## 6. Bibliographie

- Bui H. D., « Solution explicite d'un modèle de frontière libre en élastoplasticité avec endommagement », *CRAS*. t290, série Iib, 1980.
- Francfort G., Marigo J.J., "Stable damage evolution in a brittle continuous medium", *Eur. J. Mech. A/Solids*, 12, 149-189, 1993.
- Francfort G., Marigo J.J., "Revisiting brittle fracture as an energy minimisation problem", *J. Mech. Phys. Sol.*, 46, 1319-1342, 1998.
- Laverne J., Lorentz E., Marigo J.J., « Un modèle de rupture avec énergie de Barenblatt : considérations théoriques et implantations numériques », *Proc. 16<sup>e</sup> Congrès français de mécanique*, 2003.
- Lefèvre W., Barbier G., Masson R., Rousselier G. : A modified Beremin model to simulate the warm pre-stress effect. N.E.A.D. : 15/02/2002.
- Lorentz E., Andrieux S., "A variational formulation for nonlocal damage models", *Int. J. Plast.*, 15, 119-138, 1999.
- Lorentz E., Wadier Y., Debruyne G., « Mécanique de la rupture fragile en présence de plasticité : définition d'un taux de restitution d'énergie », *CRAS*. t.328, série Iib, 2000.
- Rice J. R., "An examination of the fracture mechanics energy balance from the point of view of continuum mechanics", *Proc. 1st Int. Conf. Fracture*, vol. 1, ed. Yokobori et al., 309-340, 1966.
- Wadier Y., Bonnamy M., "The energy approach of elastoplastic fracture mechanics applied to the analysis of the warm pre-stress effect", *ASME - PVP*, Cleveland, USA, 2003.
- Wadier Y., Bonnamy M., "Programme VOCALIST : the energy approach of elastoplastic fracture mechanics applied to the analysis of the shallow crack effect", *ASME PVP*, Cleveland, USA, 2003.