
Dynamique non linéaire d'un ensemble rotor-stator comportant des mécanismes non linéaires avec jeu

Jean-Jacques Sinou — Fabrice Thouverez — Louis Jézéquel

*Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes CNRS UMR 5513
Equipe Dynamique des Systèmes et des Structures
Ecole Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue
F-69134 Lyon cedex
jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr*

RÉSUMÉ. Ce papier présente une étude portant sur les problèmes vibratoires liés au contact rotor/stator dans les turbo-machines. Un modèle numérique de rotor/stator comportant un roulement non linéaire avec contact de Hertz et du jeu est considéré. Du fait de ces non-linéarités, une analyse complexe est nécessaire. Afin de déterminer les réponses vibratoires d'un tel système, les équations dynamiques non linéaires peuvent être intégrées numériquement. Cependant cette procédure est coûteuse en temps de calcul ; le but de ce papier est donc d'appliquer une méthode de balance harmonique (Alternate Frequency/Time Method) afin d'obtenir les réponses non linéaires du système rotor/stator. En utilisant cette approche, les orbites du rotor et du stator et les évolutions de la force de contact associée pour diverses vitesses de rotation sont étudiés.

ABSTRACT. This paper presents a research devoted to the study of a rotor/stator contact induced vibration problems in turbo-machinery. A numerical rotor/stator system including a nonlinear bearing with Hertz contact and clearance is considered. Due to these nonlinearities, a complex non-linear analysis is necessary. To determine the non-linear responses of the rotor/stator system, the nonlinear dynamic equations can be integrated numerically. But this procedure is both time consuming and costly to perform. The aim of this paper is to apply the Alternate Frequency/Time Method in order to determine the non-linear responses of the rotor/stator problem. By using this non-linear method, the orbits of rotor and stator and the evolutions of the associated contact force responses at various speeds will be performed.

MOTS-CLÉS: dynamique des systèmes, systèmes tournants, contact de Hertz, jeux de roulement, rotor/stator contact, analyse non linéaire, méthode de la balance harmonique.

KEYWORDS: dynamic systems, rotordynamics, Hertz contact, bearing clearances, rotor/stator contact, nonlinear analysis, harmonic balance method.

1. Introduction

La compréhension des phénomènes non linéaires présents dans les machines tournantes est devenue indispensable vu leur rôle prédominant pour caractériser le comportement vibratoire des systèmes tournants ([EHR 92], [VAN 88], [YAM 01], [LAN 90] et [NEL 89]). Cette étude porte sur la dynamique non linéaire des systèmes tournants et des mécanismes associés faisant intervenir le contact et les jeux. On s'intéresse plus particulièrement à des systèmes rotor/stator avec roulements. Ces roulements peuvent être considérés comme des ressorts à raideur non linéaire, en appliquant la théorie du contact de Hertz. Du fait de ces non-linéarités, une analyse complexe est nécessaire. La réponse dynamique peut être déterminée par une intégration temporelle du système non linéaire de départ, mais une telle démarche nécessite un temps de calcul prohibitif. Aussi, des études paramétriques permettant de statuer sur l'influence des roulements (jeu, raideur de contact, etc.) ne sont pas envisageables. Il est alors nécessaire de mettre en place des méthodes non linéaires ([NAY 79], [NAY 95], [CAM 89] et [NAR 98]) permettant d'obtenir de manière rapide et efficace la réponse du système. Dans cette étude, on utilise la méthode de la balance harmonique AFT [CAM 89] qui permet d'exprimer la solution du système dynamique non linéaire sous la forme d'une série de Fourier.

2. Modèle de roulement et de contact

Un roulement est un élément complexe qui comporte des aspects et mécanismes non linéaires importants tels que le jeu radial, la possibilité de contact entre les bagues et les parties tournantes, et la dépendance de la position des éléments par rapport aux bagues.

2.1. Contact billes-bagues

La modélisation d'un roulement nécessite la prise en compte du contact billes-bagues. Ce contact est modélisé par un contact élastique ; d'après la théorie de contact de Hertz [HAR 89], la force élastique de contact Q s'exerçant entre les corps roulants et les pistes de roulement s'écrit comme suit :

$$Q(\delta x) = K_H \delta x^{3/2} \quad [1]$$

où δx définit la distance de pénétration due à la déformation élastique au niveau du point de contact entre les éléments. K_H représente la raideur de contact qui est donnée par :

$$K_H = \frac{4}{3} \sqrt{R} E^* \quad \text{et} \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad [2]$$

avec R le rayon de la bille. E_1 , ν_1 , E_2 et ν_2 représentent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson des deux solides sphéroïdaux [HAR 89].

2.2. Positionnement des billes

Si l'on considère un roulement constitué de n billes, chacune d'entre elles est localisée par une position angulaire θ_j (avec $j=1\dots n$ et $\theta_{j+1} - \theta_j = 2\pi/n$), comme illustré en figure 2. L'expression de cette position angulaire est donnée par :

$$\theta_j(t) = \omega_{cage} t + 2\pi(j-1)/n \quad \text{avec} \quad \omega_{cage} = \omega_{rotor} / 2 \cdot (1 - R_b / (R_b + R)) \quad [3]$$

où ω_{cage} , ω_{rotor} , R_b et R définissent respectivement la vitesse de rotation de la cage du roulement, la vitesse de rotation du rotor, le rayon des billes et le rayon de la surface de roulement de la bague intérieure.



Figure 1. Roulement à billes

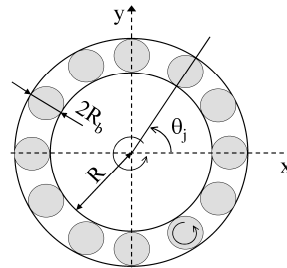


Figure 2. Positionnement de la $j^{\text{ème}}$ bille

2.3. Mécanisme non linéaire du roulement

A partir du déplacement relatif des bagues et de la position angulaire de chacune des billes, il est possible de déterminer le déplacement relatif dans la direction θ_j qui représente le déplacement par rapport au repère local propre à chacune des billes :

$$\Delta_k = \cos(\theta_k)(x_e - x_i) + \sin(\theta_k)(y_e - y_i) \quad [4]$$

où x_e , y_e , x_i et y_i représentent les déplacements extérieurs et intérieurs des bagues dans le repère global, comme définis en figure 2. En considérant un jeu radial δ et en se basant sur la théorie de Hertz [1], la force de contact élastique non linéaire qui s'exerce entre la $k^{\text{ième}}$ bille et les bagues est donnée par :

$$\begin{cases} Q_k = K_H \cdot (\Delta_k - \delta)^{\frac{3}{2}} & \text{si } \Delta_k > \delta \\ Q_k = 0 & \text{si } \Delta_k \leq \delta \end{cases} \quad [5]$$

Ainsi, on obtient, après sommation des forces élastiques de contact non linéaire sur chaque bille, la force globale de contact projetée sur les axes principaux horizontal et vertical :

$$\begin{cases} F_x^{NL} = \sum_{k=1}^n Q_k \cdot \cos(\theta_k) \\ F_y^{NL} = \sum_{k=1}^n Q_k \cdot \sin(\theta_k) \end{cases} \quad [6]$$

2.4. Modélisation du roulement

On considère un roulement comportant 16 billes et un faible jeu radial δ avec la prise en compte du contact élastique local au niveau de chaque bille (théorie du contact de hertz), d'un jeu radial, de la gravité et la présence d'un balourd, dû à une masse m_e située à une distance e du centre géométrique de l'axe principal du roulement. Le modèle dynamique non linéaire est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s &= F_x^{NL} \\ m_s \ddot{y}_s + c_s \dot{y}_s + k_s y_s &= F_y^{NL} - m_s g \\ m_r \ddot{x}_r + c_r \dot{x}_r + k_r x_r &= -F_x^{NL} + m_e e \omega^2 \cos(\omega t) \\ m_r \ddot{y}_r + c_r \dot{y}_r + k_r y_r &= -F_y^{NL} + m_e e \omega^2 \sin(\omega t) - m_r g \end{aligned} \quad [7]$$

3. Dynamique non linéaire

Comme explicité précédemment, le système dynamique non linéaire [7] peut être résolu par l'utilisation d'une intégration temporelle classique. Cependant, une telle approche s'avère très longue en termes de temps de calcul. Aussi, nous proposons par la suite la mise en place d'une méthode de balance harmonique appelée *Alternate Frequency/Time domain Method* ([CAM 89] et [NAR 98]) avec une technique de continuation.

Cette méthode non linéaire va nous permettre d'obtenir de manière rapide et efficace les réponses dynamiques non linéaires et plus particulièrement les orbites des rotors et stators ainsi que les évolutions du contact et des forces de contact associées au niveau du jeu de roulement.

3.1. Méthode de la balance harmonique AFT

Le système non linéaire [7] peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}^{\text{NL}}(\mathbf{x}, \omega, \tau) - \mathbf{f}(\omega, \tau) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega, \tau) = 0 \quad [8]$$

où \mathbf{M} , \mathbf{K} et \mathbf{C} sont les matrices de masse, de raideur et d'amortissement. \mathbf{f}^{NL} correspond au vecteur comportant les termes non linéaires dus au contact.

On recherche alors la solution périodique du système [8] sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre m

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^m [\mathbf{X}_{2i-1} \cos(i\omega t) + \mathbf{X}_{2i} \sin(i\omega t)] \quad [9]$$

avec \mathbf{X}_0 , \mathbf{X}_{2i-1} et \mathbf{X}_{2i} définissant les coefficients de Fourier. m définit le nombre d'harmoniques choisi de manière à n'en garder que le nombre minimum nécessaire à une bonne approximation de la réponse non linéaire du système. Après substitution de l'expression [9] dans le système non linéaire [8] et développement de Taylor du système en fonction de la pulsation du forcing (et donc développement par rapport aux variables $(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \omega)$), on obtient :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}^{\text{NL}} - \mathbf{F} + (\mathbf{A} + \mathbf{J})\Delta\mathbf{X} + \mathbf{Q}\Delta\omega = 0 \quad [10]$$

où \mathbf{A} et \mathbf{J} sont les matrices jacobienne associées aux termes linéaires et non linéaires du système [8] telles que :

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{K} \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j \dots \mathbf{A}_m) \text{ avec } \mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} & j\omega \mathbf{C} \\ -\omega j \mathbf{C} & -(\omega j)^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad [11]$$

$$\mathbf{J} = (\Gamma \otimes \mathbf{I}) \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & [\partial \mathbf{f}^{\text{NL}} / \partial \mathbf{x}] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} (\Gamma^{-1} \otimes \mathbf{I}) \quad [12]$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} 1/(2m+1) & \text{pour } i=1 \\ 2/(2m+1) \cos((j-1)i\pi/2m+1) & \text{pour } i=2,4,\dots,2m \\ 2/(2m+1) \sin((j-1)(i-1)\pi/2m+1) & \text{pour } i=3,5,\dots,2m+1 \end{cases} \quad [13]$$

pour $j = 1, 2, \dots, 2m + 1$. \mathbf{F} et \mathbf{Q} représentent respectivement les vecteurs des coefficients de Fourier de la fonction \mathbf{f} , et les coefficients de Fourier de la dérivée de \mathbf{g} par rapport à ω . \mathbf{F}^{NL} correspond au vecteur des coefficients de Fourier de la fonction non linéaire \mathbf{f}^{NL} . \mathbf{X} et $\Delta\mathbf{X}$ contiennent les coefficients de Fourier et les incréments associés des vecteurs \mathbf{x} et $\Delta\mathbf{x}$. D'un point de vue pratique, il est difficile de déterminer le vecteur \mathbf{F}^{NL} , directement à partir des coefficients de Fourier \mathbf{X} . Aussi, Cameron et Griffin [CAM89] ont proposé de calculer \mathbf{F}^{NL} en suivant la démarche suivante : $\mathbf{X} \xrightarrow{\text{DFT}^{-1}} \mathbf{x}(t) \longrightarrow \mathbf{f}^{\text{NL}}(t) \xrightarrow{\text{DFT}} \mathbf{F}^{\text{NL}}$. Cette procédure consiste donc à définir le vecteur \mathbf{x} , définissant l'évolution temporelle du système au cours d'une période, à partir du vecteur des coefficients de Fourier associés \mathbf{X} . Le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel se réalise par l'intermédiaire de la fonction Γ , définie en (13) (DFT^{-1} : Direct Fourier Transform inverse). Ensuite, il est plus aisé de trouver l'expression des fonctions non linéaires dans le domaine temporel, étant donné que leurs expressions exactes sont connues. Enfin, l'expression \mathbf{F}^{NL} , fonction des termes non linéaires dans le domaine fréquentiel, est déterminée à partir des termes non linéaires \mathbf{f}^{NL} dans le domaine temporel obtenus précédemment, par la fonction Γ^{-1} , (DFT : Direct Fourier Transform). Finalement l'expression [10] permet d'avoir la nouvelle estimation du vecteur des coefficients de Fourier \mathbf{X}^{k+1} tels que :

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \Delta\mathbf{X}^k \quad [14]$$

$$\Delta\mathbf{X}^k = -(\mathbf{A} + \mathbf{J})^{-1} (\mathbf{F}^{\text{NL}} - \mathbf{F} + \mathbf{Q}\Delta\omega + (\mathbf{A} + \mathbf{J})\mathbf{X}^k) \quad [15]$$

Le résidu \mathbf{R} déterminé sur l'estimation du vecteur des coefficients de Fourier est donnée par :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}^{\text{NL}} - \mathbf{F}, \quad [16]$$

et les critères de convergence choisis sont :

$$\delta_1 = \sqrt{\mathbf{R}_0^2 + \sum_{j=1}^m (\mathbf{R}_{2j-1}^2 + \mathbf{R}_{2j}^2)} \quad [17]$$

et

$$\delta_2 = \sqrt{\Delta\mathbf{X}_0^2 + \sum_{j=1}^m (\Delta\mathbf{X}_{2j-1}^2 + \Delta\mathbf{X}_{2j}^2)}. \quad [18]$$

3.2. Méthode de continuation

Généralement, le comportement non linéaire d'un système rotor/stator tournant est calculé pour diverses vitesses de rotation du rotor. Afin de gagner en temps de calcul et d'obtenir de façon efficace les réponses vibratoires d'un tel système non linéaire, une technique de continuation est utilisée [NAR 98]. Cette technique consiste à estimer la solution \mathbf{X} du système non linéaire pour un nouveau jeu de paramètres (sur lequel la vitesse de rotation a évolué par exemple) comme étape préliminaire de l'application de la méthode de balance harmonique. Dans cette étude, cette estimation est réalisée en se basant sur les solutions obtenues pour les calculs précédents (ici on se base sur les trois dernières solutions du problème) et en considérant une recherche de la solution souhaitée par extrapolation (polynôme de Lagrange d'ordre 4). Ainsi, en considérant les solutions connues sous la forme (\mathbf{X}_i, ω_i) où \mathbf{X}_i et ω_i représentent le vecteur solution du système non linéaire et la vitesse de rotation du rotor pour le $i^{\text{ème}}$ calcul, la longueur d'arc entre deux points consécutifs $(\mathbf{X}_{i+1}, \omega_{i+1})$ et (\mathbf{X}_i, ω_i) est donnée par :

$$\delta s_{i+1} = \sqrt{(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i)^T (\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i) + (\omega_{i+1} - \omega_i)^2} \quad (i = 0, 1 \text{ et } 2) \quad [19]$$

L'estimation du point de départ de recherche de la solution du système non linéaire [8] (situé à la distance Δs par rapport au calcul précédent) par utilisation de la méthode de balance harmonique AFT est donc définie par extrapolation de Lagrange

$$[\mathbf{X}_4 \ \omega_4]^T = \sum_{i=1}^3 \left(\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^3 \left(\frac{S_3 - S_j}{S_i - S_j} \right) \right) [\mathbf{X}_i \ \omega_i]^T \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 3 \quad [20]$$

avec

$$S_0 = 0; \quad S_1 = \delta s_1; \quad S_2 = S_1 + \delta s_2; \quad S_3 = S_2 + \delta s_3; \quad S_4 = S_3 + \Delta s \quad [21]$$

Il est bon de noter qu'une telle technique de continuation se base sur une évolution faible de la solution du système dynamique non linéaire entre deux jeux de paramètres où uniquement un seul paramètre a changé entre ces deux calculs.

3.3. Application au modèle de roulement avec contact

On étudie la dynamique non linéaire et les mécanismes associés pour deux jeux de roulement, comme indiqué sur le tableau 1. La méthode de la balance

harmonique AFT-DFT en prenant 6 harmoniques (minimum nécessaire pour obtenir une solution périodique tout à fait conforme aux résultats obtenus par intégration temporelle pour toute la plage de fréquences considérées dans l'étude) est utilisée afin d'obtenir les réponses non linéaires du système [7]. En considérant le 1^{er} jeu de paramètres, la réponse en fréquence est donnée sur la figure 3. On observe que le pic de résonance se situe aux alentours de 50 Hz. De plus, lorsque l'on recherche les orbites du stator et du rotor pour différentes fréquences de rotation ω , on s'aperçoit que le comportement dynamique non linéaire de ces derniers est plus ou moins complexe suivant la fréquence d'excitation, comme indiqué sur les figures 4 à 6.

	ξ_r	ξ_s	$m_e e$	$\omega_0^s ; \omega_0^r$	K_H	δ
Jeu n° 1	2%	5%	50. e-3 kg.m	150 ;500 rad/s	10.e+10 N/m	2.e-5 m
Jeu n° 2	2%	5%	50. e-3 kg.m	150 ;500rad/s	10.e+10 N/m	20.e-5 m

Tableau 1. Jeu de données n° 1 et n° 2

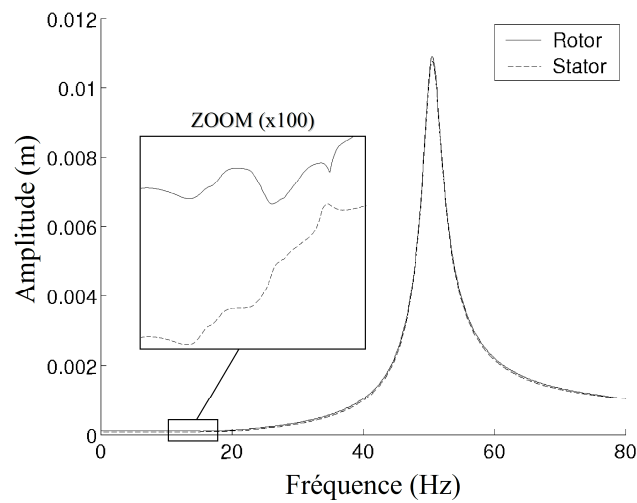


Figure 3. Amplitudes du rotor et du stator ($\delta = 2.10^{-5} m$)

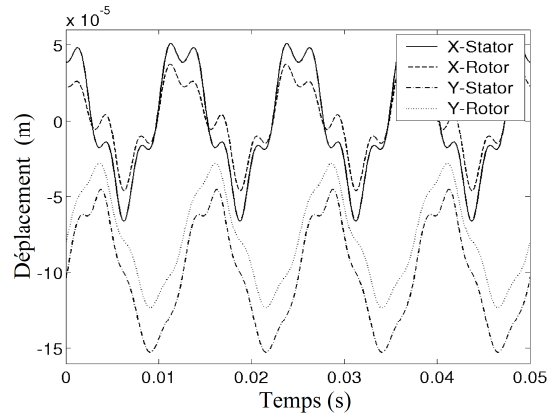


Figure 4. Déplacements du rotor et stator pour $f = 13.4\text{Hz}$ ($\delta = 2.10^{-5} m$)

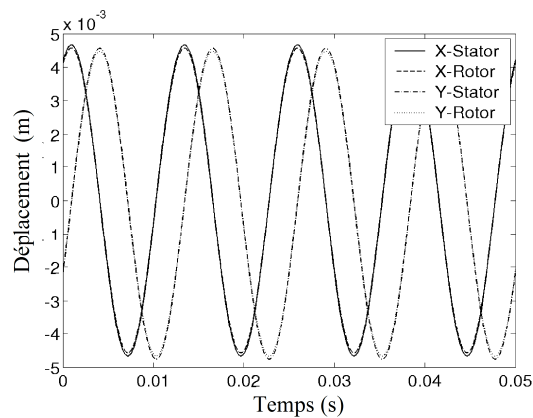


Figure 5. Déplacements du rotor et stator pour $f = 45\text{Hz}$ ($\delta = 2.10^{-5} m$)

En s'intéressant à l'évolution du contact entre le rotor et le stator et à la force de contact associée (évolution prise sur deux périodes $2T = 4\pi/\omega$, voir figure 7), on distingue trois plages de comportement. A basses fréquences (1-10 Hz), la gravité est prédominante sur les forces de balourd : ainsi, le contact est permanent et le changement de contact au niveau des billes est uniquement dû à la participation de la vitesse de rotation ω_{cage} dans l'expression [3]. Entre 10 et 19 Hz, le contact et le mécanisme des roulements associés, ainsi que les orbites du stator et du rotor (comportement multiharmonique), deviennent plus complexes, comme illustré figures 6 et 7. Ceci s'explique physiquement par le fait que la force de balourd compense progressivement (en fonction de l'évolution de la vitesse de rotation du rotor) la gravité pour finalement devenir prédominante. Dans cette zone

fréquentielle, on a alors des contacts et pertes de contacts sur les billes du roulement, (comme indiqué figure 7). On observe alors une transition d'un contact continu dû à la gravité (avec un changement du contact et de la force de contact sur les billes peu évolutifs comme indiqué en figure 7a), à un contact tournant dû à la force de balourd (avec un contact et la force de contact associée évoluant fortement sur chacune des billes avec un passage par période $2T = 4\pi/\omega$ sur chaque bille, comme illustré figure 7f). Enfin, au-delà de 19 Hz, on obtient de nouveau un comportement mono-harmonique du système : la force de balourd étant prédominante sur la force de gravité. La force de contact s'exerce alors sur chacune des billes périodiquement (avec $T = 2\pi/\omega$). En outre, les figures 7 permettent de montrer que les forces de contact évoluent fortement au niveau du pic de résonance du système, ce qui est tout à fait normal d'après les expressions [4]-[6]. En termes de temps de calcul, l'utilisation de la méthode de balance harmonique AFT avec 6, 8 et 10 harmoniques (qui permettent d'obtenir des réponses vibratoires tout à fait conformes aux résultats obtenus par intégration temporelle pour toute la plage de fréquences considérées dans l'étude) donne respectivement un temps de calcul de 200, 220 et 240 CPU. Par utilisation d'une méthode d'intégration temporelle classique telle que Runge-Kutta d'ordre 4 le temps de calcul est de 1 800 CPU.

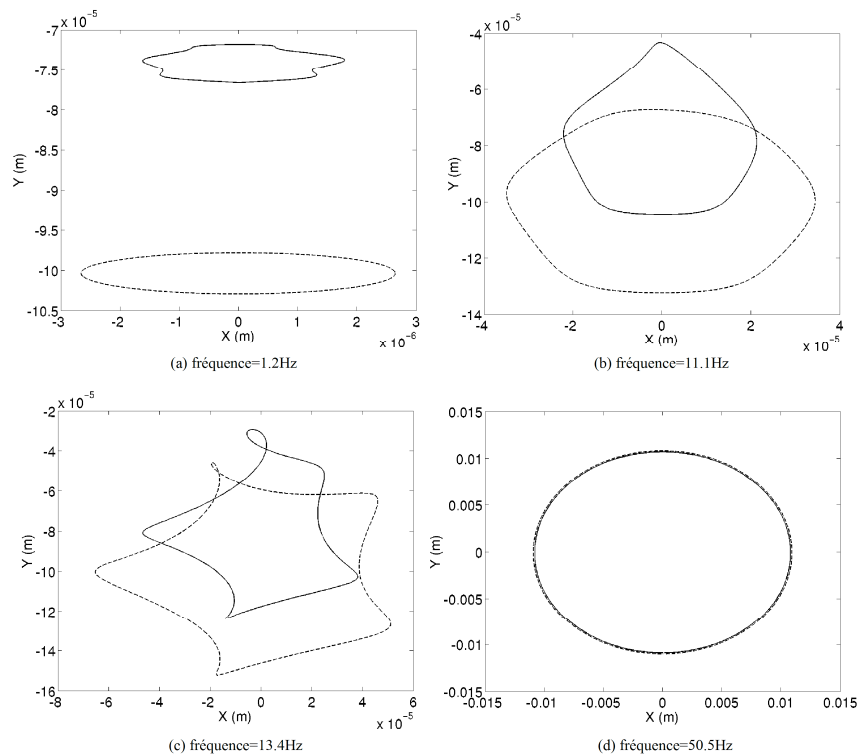


Figure 6. Evolution des orbites ($\delta = 2.10^{-5} m$, trait plein = rotor, tiret = stator)

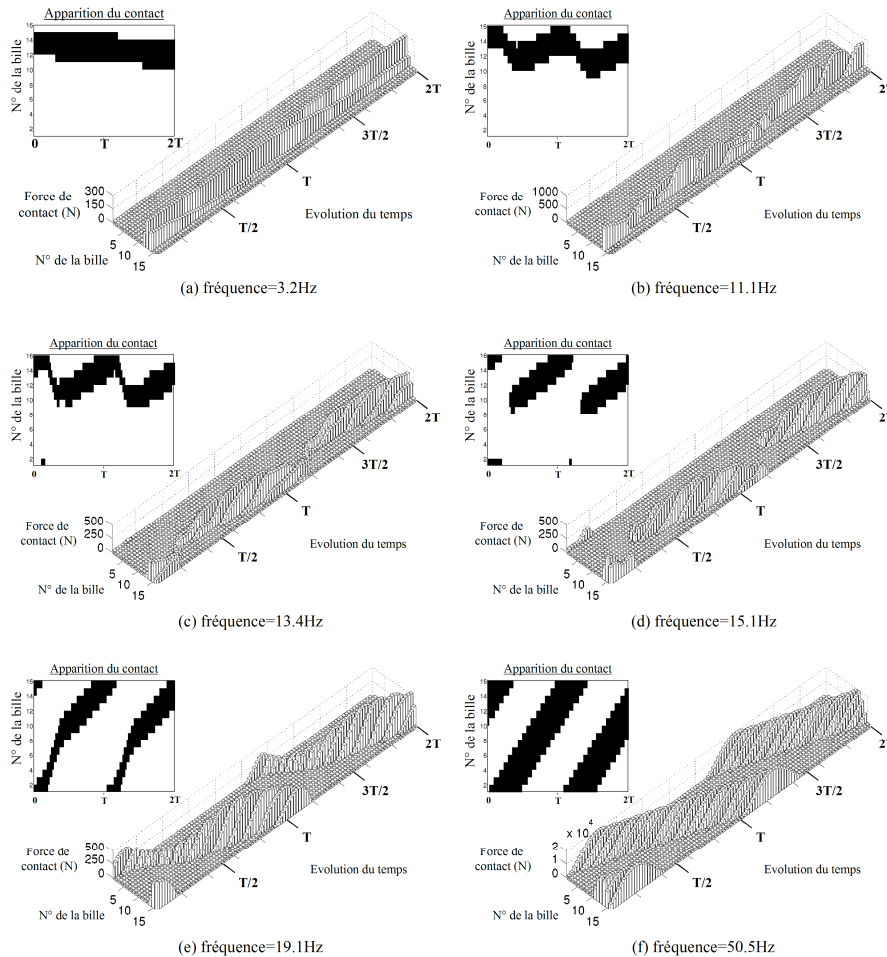


Figure 7. Evolution du contact ($\delta = 2.10^{-5} m$, noir = contact, blanc = pas de contact)

Dans un second temps, on s'intéresse à un jeu radial dans les roulements très importants (jeu de données n° 2 d'après le tableau 1), qui ne correspond pas à un fonctionnement normal de ces derniers. Les figures 8 et 9 indiquent les trois mêmes phases de comportement non linéaire du système par rapport à l'évolution de la vitesse de rotation du rotor. Cependant, dans ce dernier cas, le comportement non linéaire dans la phase de transition (force de balourd et gravité de même grandeur) est très complexe : le nombre d'harmonique minimum nécessaire est alors de 10. De plus, en comparant les figures 7f et 9d, on s'aperçoit que la zone globale de contact sur les billes est plus étroite lorsque le jeu est important.

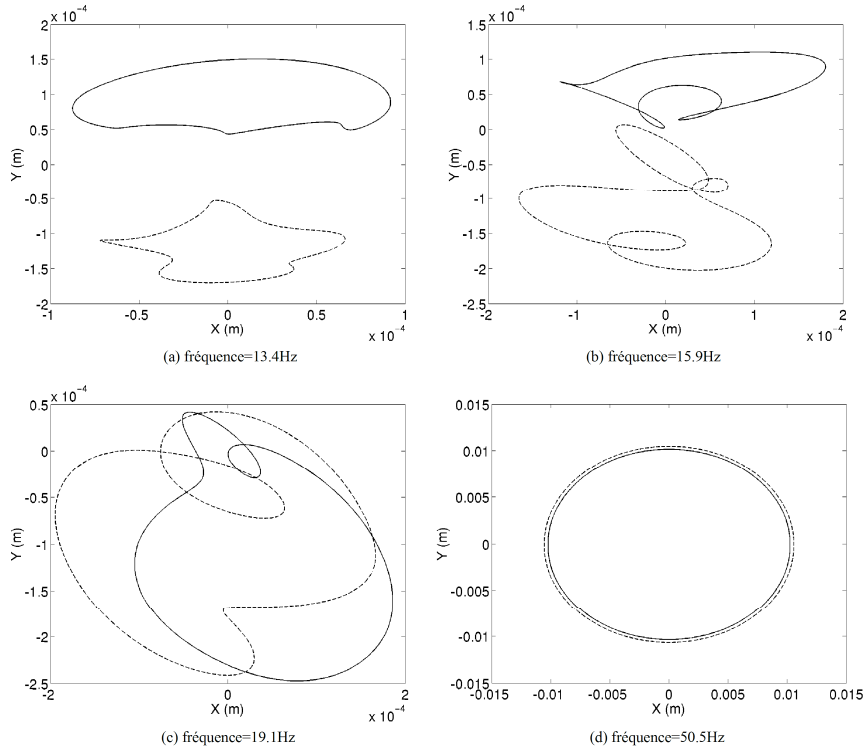


Figure 8. Evolution des orbites ($\delta = 20.10^{-5} m$, trait plein = rotor, tiret = stator)

4. Conclusion

Cette étude propose la modélisation d'un système de roulement avec billes. Le contact (théorie de Hertz) et le jeu radial sont pris en compte, ainsi que la gravité et la présence d'un balourd sur le rotor. La méthode de la balance harmonique AFT est mise en œuvre et permet d'examiner les problèmes de contact et perte de contact au niveau des billes et de déterminer les orbites du stator et du rotor associés, pour deux jeux de paramètres suivant le jeu radial des roulements. Il apparaît trois zones fréquentielles où le comportement non linéaire du système étudié est plus ou moins complexe. Aussi, la méthode de la balance harmonique AFT s'avère tout à fait efficace pour déterminer les réponses vibratoires des systèmes dynamiques comportant des non-linéarités à la fois continues et discontinues. Cette approche est de plus tout à fait applicable pour des problèmes de grandes tailles .

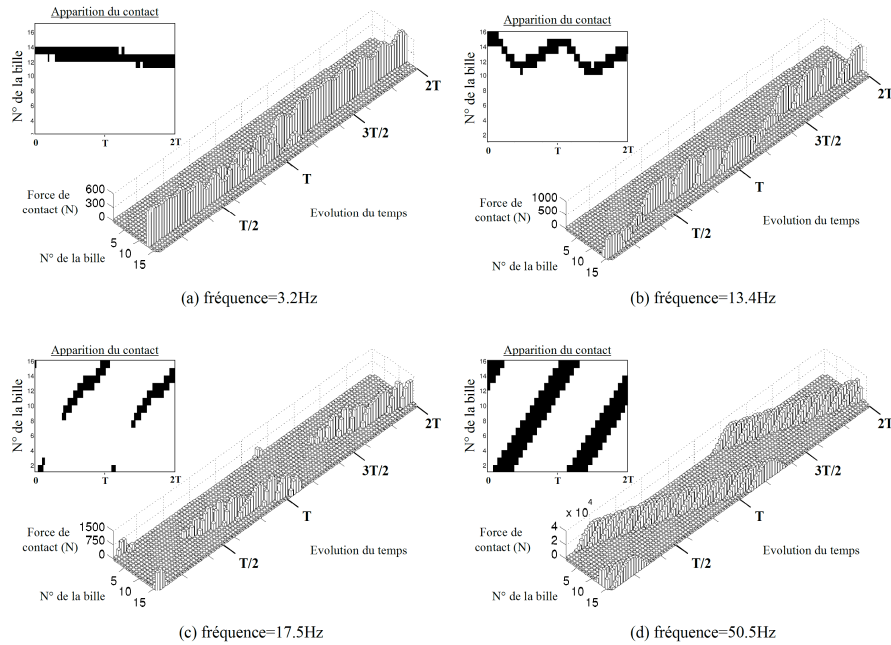


Figure 9. Evolution du contact ($\delta = 20 \cdot 10^{-5} m$, noir = contact, blanc = pas de contact)

5. Bibliographie

- [CAM 89] Cameron T.M. and Griffin J.H., "An Alternating Frequency/time Domain method for calculating the steady state response of nonlinear dynamic", *Journal of Applied Mechanics*, 1989, 56, 149-154.
- [EHR 92] Ehrich F.F., *Handbook of rotordynamics*, Macgraw-hill, 1992.
- [HAR 89] Harris T., *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1989.
- [LAN 90] Lalanne M., et Ferraris G., *Rotordynamics - Prediction in Engineering*, John Wiley and Sons, 1990.
- [NAR 98] Narayanan S. and Sekar P., "A Frequency Domain Based Numeric-Analytical Method for Non-linear Dynamical Systems", *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 211(3), 409-424.
- [NAY 79] Nayfeh A.H., and Mook D.T., *Nonlinear Oscillations*, New-York, John Wiley and Sons, 1979.
- [NAY 95] Nayfeh A.H., et Balachandran B., *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Comptational and Experimental Methods*, John Wiley & Sons, 1995.

- [NEL 89] Nelson H.D., and Nataraj C., “Periodic solutions in rotor dynamic systems with nonlinear supports: a general approach”, *Journal of vibration, Acoustics, Stress and reliability in Design*, 1989, 111, 187-193.
- [VAN 88] Vance J.M., *Rotordynamics of turbomachinery*, John Wiley and Sons, 1988.
- [YAM 01] Yamamoto T., and Ishida Y., *Linear and nonlinear rotordynamics: a modern treatment with applications*, John Wiley and Sons, 2001.