

---

# Utilisation des techniques de la méthode asymptotique numérique pour la résolution des problèmes instationnaires non linéaires

**Bouazza Braikat — Mohammad Jamal — Nouredine Damil**

*Laboratoire de Calcul Scientifique en Mécanique, Faculté des Sciences Ben M'sik, Université Hassan II - Mohammedia, BP 7955, Bd Cdt Driss El Harti, Sidi Othman CP 20450, Casablanca, Maroc*  
*b.braikat@univh2m.ac.ma, m.jamal@univh2m.ac.ma, n.damil@univh2m.ac.ma*

---

*RÉSUMÉ. En se basant sur les techniques utilisées dans la Méthode Asymptotique Numérique (MAN), on propose quelques algorithmes pour la résolution des problèmes instationnaires non linéaires. L'association des techniques d'homotopie, de discrétisation en temps et de perturbation fournit des solveurs implicites génériques. Ces algorithmes utilisent la même triangulation de matrice pour de nombreux pas de temps de calcul et permettent un choix libre de la matrice d'itération. La performance de ces algorithmes est testée sur quelques modèles physiques classiques. Les approximants de Padé sont introduits pour améliorer le domaine de validité des solutions séries. Un algorithme basé sur les développements en temps est aussi proposé.*

*ABSTRACT. Based on the techniques used in the Asymptotic Numerical Method (ANM), we propose some algorithms to solve non linear instationary problems. The combination of the homotopy, time discretization and perturbation techniques leads to implicit generic solvers. These algorithms use the same matrix triangulation of a large number of time steps and allow the free choice of the iterative matrix. The performance of the proposed algorithms is tested on few classical physical models. The Padé approximants are introduced to ameliorate the range of validity of the asymptotic expansion. An algorithm based on time expansions is also proposed.*

*MOTS-CLÉS: algorithme implicite, instationnaire, non linéaire, homotopie, perturbation, méthode asymptotique numérique, approximants de Padé.*

*KEYWORDS: implicit algorithm, instationary, non linear, homotopy, perturbation, Asymptotic Numerical Method, Padé approximants.*

---

## 1. Introduction

Les phénomènes instationnaires non linéaires sont très abondants dans la nature et fréquemment rencontrés dans de nombreux secteurs industriels. Ces phénomènes peuvent se cinder en deux catégories principales selon le type d'équations d'évolutions qui les gouvernent.

La première catégorie contient des problèmes dont l'évolution spatio-temporelle est modélisée par des équations aux dérivées partielles (ou différentielles ordinaires) non linéaires avec dérivée première par rapport à la variable temps. Les problèmes d'évolution tels que ceux de la propagation d'ondes non linéaires, de dynamique des fluides, de conduction de chaleur transitoire, de filtration dans les milieux poreux, de dispersion des radionucléides dans les milieux fluides et d'autres sont des exemples de cette catégorie.

Quant aux problèmes de la seconde catégorie, ils sont modélisés par des équations aux dérivées partielles (ou différentielles ordinaires) non linéaires du deuxième ordre par rapport à la variable temporelle. Les problèmes de vibration et de flambage dynamique des structures élastiques et plastiques, de séisme, de propagation des ondes de transmission dans les fluides font partie de cette catégorie.

Notons que les équations d'évolution non linéaires gouvernant ces deux catégories de problèmes sont parfois couplées et complétées souvent par des conditions aux limites ou par des lois de comportement également non linéaires. Il est à souligner que la détermination, par voie analytique, des solutions exactes des équations régissant l'évolution des systèmes physiques instationnaires non linéaires de grande taille de ces deux catégories de problèmes reste, à l'état actuel de nos connaissances, un défi, exceptions faites, pour certains systèmes à petit nombre de degrés de liberté avec des géométries et conditions aux limites simples. L'accès aux solutions de ces deux catégories de problèmes instationnaires non linéaires ne peut donc se faire que par des analyses approximatives moyennant trois méthodes principales : les méthodes purement analytiques, les méthodes semi-analytiques ou semi-numériques et les méthodes purement numériques (méthodes directes).

Les méthodes purement analytiques sont utilisées pour résoudre des problèmes à géométries et à conditions aux limites simples. Les résolutions en espace et en temps sont effectuées analytiquement. La résolution spatiale se fait moyennant des méthodes de type Galerkin ou Ritz ou par l'analyse modale [BAT 96] comme en dynamique des structures. L'intégration en temps [NAY 73], [NAY 79], [NAY 81] est faite par la méthode de la balance harmonique, la technique de Poincaré-Linsdedt, la méthode de la moyenne ou la méthode des échelles multiples.

Les secondes procédures, qualifiées de semi-numériques ou semi-analytiques, s'appuient sur la méthode de séparation de variables. La solution du problème non linéaire instationnaire est cherchée sous forme d'un produit d'une fonction temporelle multipliée par une fonction spatiale. La fonction temporelle est supposée, en général, harmonique. L'utilisation de la méthode de la balance harmonique [NAY 73] conduit à

un problème aux limites non linéaire vérifié par la fonction spatiale. La solution numérique de ce problème s'obtient en faisant appel aux procédures de discrétisation spatiale (éléments finis, différences finies,...) et en utilisant des algorithmes itératifs [BAT 96], [ZIE 87], [GER 93].

Concernant les méthodes purement numériques [BAT 96], [ZIE 87], [ARG 91], [FLE 91], [GER 93], leur principe consiste à intégrer directement les équations modélisant le problème instationnaire non linéaire considéré. Elles se basent sur les procédures de discrétisation spatiale (différences finies, éléments finis,...). L'intégration temporelle est faite par le choix d'un schéma en temps de type explicite ou implicite du genre Euler, Crank-Nicolson pour les problèmes de la première catégorie ou appartenant à la famille de Newmark pour les problèmes de la seconde catégorie. Il est à souligner que les schémas explicites sont conditionnellement stables et exigent un très grand nombre de pas de temps. Ces schémas sont plus efficaces pour les problèmes à haute fréquence [ARG 91] ou pour les problèmes de dynamique rapide. Pour les schémas implicites, ils sont souvent inconditionnellement stables mais exigent la résolution de toutes les équations en même temps donc plus d'espace mémoire. Ces approches purement numériques permettent d'accéder à la solution de ces problèmes selon une description point par point. Elles sont opérationnelles, quelle que soit la nature des non linéarités impliquées, mais elles peuvent exiger d'importants temps de calcul CPU surtout pour les systèmes physiques de grande taille.

En discrétisant en espace les équations d'évolution du problème instationnaire non linéaire par différences finies ou par éléments finis, on obtient des équations non linéaires dépendantes du temps. Le but de ce travail consiste à utiliser les techniques de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) pour résoudre ces équations temporelles. Dans la littérature, deux stratégies sont possibles pour résoudre ces équations. La première consiste à résoudre itérativement le problème en utilisant la même matrice pour tous les pas de temps ou au moins pour un grand nombre de pas de temps. Cette stratégie peut être adoptée quand les non linéarités ont peu d'effet durant un pas de temps, en particulier pour de faibles pas de temps. Cette approche est appliquée pour les problèmes de propagation d'ondes non linéaires [FOR 78], [TAH 84], [ISK 89], [FLE 91], [SMI 97]. D'une manière inverse, quand le problème est à forte non linéarité où le nombre de triangulations de matrices à faire et le temps de calcul d'un pas deviennent alors beaucoup plus importants, on utilise généralement des méthodes de type Newton [BAT 96], [ARG 91], [CRI 97].

On discute, dans cet article, une famille d'algorithmes pour la résolution numérique des deux catégories de problèmes instationnaires non linéaires obtenus par discrétisation en espace. Ces algorithmes sont développés en faisant appel aux techniques utilisées dans la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [DAM 90], [COC 94]. Les premiers sont construits en appliquant les techniques suivantes : homotopie, discrétisation en temps et méthode de perturbation par rapport au paramètre d'homotopie. L'intégration temporelle est effectuée par des schémas en temps implicites de types Euler, Crank-Nicolson ou Newmark. Le couplage de ces techniques conduit à des solveurs implicites d'ordre élevé qui se distinguent principalement par le type de

transformation homotopique considérée et le type de développements asymptotiques choisis. Ces algorithmes ont l'avantage d'utiliser premièrement la même triangulation de matrice pour de nombreux pas de temps et deuxièmement de faire un choix libre de la matrice à inverser. On présente aussi un algorithme basé sur les développements par rapport au temps.

La performance des algorithmes proposés est évaluée sur la résolution de quelques problèmes instationnaires non linéaires typiques des deux catégories. Les exemples tests considérés portent sur la propagation d'ondes non linéaires, la dispersion des radionucléides dans un milieu fluide, les oscillations non linéaires d'un pendule élastique bidimensionnel et sur les vibrations non linéaires d'une poutre 2D et d'une plaque élastiques.

## 2. Formes discrètes des équations d'évolution des problèmes instationnaires non linéaires

Les formes discrètes des équations qui gouvernent l'évolution temporelle des systèmes physiques instationnaires non linéaires s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F^{nl}(\{q\})\} &= \{F\} \\ \{q(t_0)\} &= \{q_0\} \end{aligned} \quad [1]$$

pour les problèmes de la première catégorie et sous la forme :

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F^{nl}(\{q\})\} &= \{G\} \\ \{q(t_0)\} = \{q_0\}; \quad \{\dot{q}(t_0)\} &= \{\dot{q}_0\} \end{aligned} \quad [2]$$

pour les problèmes de la deuxième catégorie. Elles sont obtenues en appliquant, les procédures classiques de discrétisation spatiale par différences finies ou par éléments finis, aux équations aux dérivées partielles ou différentielles du premier (resp. du second) ordre par rapport à la variable temporelle. On désigne, dans [1] et [2], par  $(\dot{\cdot})$  et  $(\ddot{\cdot})$  respectivement la dérivée première et seconde par rapport au temps.  $\{q\}$  est le vecteur nodal inconnu du problème,  $[C]$ ,  $[M]$  et  $[K]$  sont des matrices indépendantes de  $\{q\}$ ,  $\{F^{nl}(\{q\})\}$  est un vecteur représentant la partie non linéaire,  $\{F\}$  et  $\{G\}$  sont des forces excitatrices extérieures et  $\{q_0\}$ ,  $\{\dot{q}_0\}$  sont les conditions initiales. Signalons que la partie non linéaire  $\{F^{nl}\}$  peut être écrite à l'aide des formes quadratiques soit par rapport à l'inconnue  $\{q\}$  soit par rapport à des variables auxiliaires. En non linéaire géométrique, la partie non linéaire  $\{F^{nl}\}$  peut s'écrire sous la forme  $\{F^{nl}(\{q\})\} = \{Q_1(\{q\}, \{q\})\} + \{Q_2(\{q\}, \{S\})\}$  où  $\{S\}$  représente le vecteur des contraintes [BOU 03a] qui est relié au vecteur déplacement par la loi de comportement de Hooke.

Pour résoudre les deux catégories de problèmes instationnaires non linéaires [1] et [2], on propose deux classes d'algorithmes. Dans la première classe, on utilise les trois techniques suivantes : transformation homotopique, discrétisation en temps et méthode de perturbation par rapport au paramètre d'homotopie et dans la deuxième classe, on utilise des développements par rapport au temps.

### 3. Algorithmes proposés

#### 3.1. Algorithmes de linéarisation par rapport à l'instant initial

On propose, dans cette section, deux algorithmes implicites d'ordre élevé. Ils sont développés en appliquant successivement sur les problèmes [1] et [2] une transformation d'homotopie, une procédure de discrétisation en temps et une méthode de perturbation. Ces algorithmes s'appuient sur une linéarisation par rapport à l'instant initial  $t_0$ . Appellation qui signifie que la matrice tangente à inverser gardera la même valeur calculée à l'instant initial. Ces deux algorithmes se distinguent par le type de développements asymptotiques choisis. Pour alléger l'exposé, on appliquera ces techniques au problème [2].

**i- Transformation homotopique :** dans l'ordre d'avoir une solution au voisinage de celle de l'instant initial, on introduit le changement de variable suivant :

$$\{q\} = \{q_0\} + \{v\} \quad [3]$$

où  $\{v\}$  est la nouvelle inconnue. En injectant [3] dans [2], on obtient le problème vérifié par  $\{v\}$  :

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{v}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K_t]\{v\} + \{F_1^{nl}(\{v\})\} &= \{G_s\} \\ \{v(t_0)\} &= \{0\}; \quad \{\dot{v}(t_0)\} = \{\dot{q}_0\} \end{aligned} \quad [4]$$

où  $\{G_s\}$  est un nouveau second membre qui ne dépend pas de  $\{v\}$ ,  $\{F_1^{nl}\}$  est un nouveau vecteur représentant la partie non linéaire et  $[K_t]$  est une matrice qui dépend de la condition initiale  $\{q_0\}$ .

La technique d'homotopie consiste à modifier le problème [4] en introduisant artificiellement un paramètre réel  $\epsilon$  dans la partie non linéaire :

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{w}\} + [C]\{\dot{w}\} + [K_t]\{w\} + \epsilon\{F_1^{nl}(\{w\})\} &= \{G_s\} \\ \{w(t_0)\} &= \{0\}; \quad \{\dot{w}(t_0)\} = \{\dot{q}_0\} \end{aligned} \quad [5]$$

où la nouvelle inconnue  $\{w\}$  dépend à la fois du temps et du paramètre  $\epsilon$ . Par hypothèse, les solutions du problème [5] passent, de façon continue, de  $\{w(\epsilon = 0)\}$  à la solution  $\{w(\epsilon = 1)\}$  du problème [4]. La solution  $\{w(\epsilon = 0)\}$  est celle du problème linéarisé. La solution du problème initial est récupérée à partir de celle du problème [5] en écrivant :

$$\{q\} = \{q_0\} + \{w(\epsilon = 1)\} \quad [6]$$

**ii- Discrétisation en temps :** en utilisant le schéma implicite de Newmark [NEW 59], on obtient la forme discrétisée du problème [5] :

$$\begin{aligned} [K_T^0]\{w^{n+1}\} + \epsilon\{F_1^{nl}(\{w^{n+1}\})\} &= \{G_s^{n+1}\} + \{H^n\} \\ \{w^0\} &= \{0\}; \quad \{\dot{w}^0\} = \{\dot{q}_0\} \end{aligned} \quad [7]$$

où  $\{w^{n+1}\}$  est l'inconnue à l'instant  $(n+1)\Delta t$ ,  $\Delta t$  est le pas de temps,  $[K_T^0]$  et  $\{H^n\}$  sont respectivement la matrice tangente et le nouveau second membre dépendant des solutions à l'instant  $n\Delta t$  donnés par  $[K_T^0] = a_0[M] + \beta\Delta t a_0[C] + [K_t]$  et  $\{H^n\} = a_0[M]\{w^n\} + a_1[M]\{\dot{w}^n\} + a_2[M]\{\ddot{w}^n\} + \beta\Delta t a_0[C]\{w^n\} - \Delta t(1 - \beta(1 + a_2))[C]\{\ddot{w}^n\} - (1 - a_1\beta\Delta t)[C]\{\dot{w}^n\}$ , avec  $a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}$ ,  $a_1 = \frac{1}{\alpha\Delta t}$  et  $a_2 = \frac{1}{2\alpha} - 1$ , et  $\alpha, \beta$  sont les constantes de Newmark.

**iii- Méthode de perturbation** : pour résoudre le problème non linéaire discrétisé en espace et en temps [7], on applique la méthode de perturbation. Deux choix de développements asymptotiques sont proposés. Dans le premier choix, on cherche  $\{w^{n+1}\}$ ,  $\{H^n\}$  sous forme de développements en séries par rapport à  $\epsilon$ , tronqués à l'ordre  $p$  comme dans [COC 00]. Dans le second choix, seule  $\{w^{n+1}\}$  est cherchée en termes de série entière par rapport au paramètre d'homotopie  $\epsilon$  comme dans [JAM 02] et [BRA 02].

1<sup>er</sup> choix :

$$\{w^{n+1}\} = \{w_0^{n+1}\} + \epsilon\{w_1^{n+1}\} + \dots + \epsilon^p\{w_p^{n+1}\} \quad [8]$$

$$\{H^n\} = \{H_0^n\} + \epsilon\{H_1^n\} + \dots + \epsilon^p\{H_p^n\} \quad [9]$$

En insérant ces deux développements dans [7], on obtient la séquence de problèmes linéaires suivants :

Ordre 0

$$\begin{aligned} [K_T^0]\{w_0^{n+1}\} &= \{G_s^{n+1}\} + \{H_0^n\} \\ \{w_0^0\} &= \{0\}; \quad \{\dot{w}_0^0\} = \{\dot{q}_0\} \end{aligned} \quad [10]$$

Ordre  $k$  ( $1 \leq k \leq p$ ) :

$$\begin{aligned} [K_T^0]\{w_k^{n+1}\} &= \{FQ^{nl}\} + \{H_k^n\} \\ \{w_k^0\} &= \{0\}; \quad \{\dot{w}_k^0\} = \{0\} \end{aligned} \quad [11]$$

2<sup>eme</sup> choix : Seul le développement [8] est considéré. En substituant [8] dans [7], on obtient la séquence des problèmes linéaires suivants :

Ordre 0

$$\begin{aligned} [K_T^0]\{w_0^{n+1}\} &= \{G_s^{n+1}\} + \{H^n\} \\ \{w_0^0\} &= \{0\}; \quad \{\dot{w}_0^0\} = \{\dot{q}_0\} \end{aligned} \quad [12]$$

Ordre  $k$  ( $1 \leq k \leq p$ ) :

$$\begin{aligned} [K_T^0]\{w_k^{n+1}\} &= \{FQ^{nl}\} \\ \{w_k^0\} &= \{0\}; \quad \{\dot{w}_k^0\} = \{0\} \end{aligned} \quad [13]$$

où  $\{FQ^{nl}\}$  est un second membre qui provient du terme non linéaire du problème [7] et qui est fonction des solutions aux ordres précédents. La différence entre les deux choix de développements asymptotiques réside essentiellement dans les seconds membres des problèmes [10], [11], [12], [13]. Ainsi, si le développement [9] converge difficilement, le premier choix récupère cette convergence lente à l'instant suivant.

Pour obtenir toute la branche solution par les représentations séries, on applique une méthode de continuation pas à pas en définissant un nouveau point de départ pour

chaque nouveau pas. Le domaine de validité de cette représentation est défini par le critère  $\epsilon_{ms} = (\kappa \frac{\|\{w_1\}\|}{\|\{w_p\}\|})^{\frac{1}{p-1}}$  où  $\kappa$  est un paramètre que l'on suppose petit.

Les représentations polynomiales [8] ont un rayon de convergence fini. H. Padé [PAD 92] et G. A. Baker, P. Graves Morris [BAK 81] ont montré que les fractions rationnelles sont meilleures que les représentations polynomiales pour représenter une fonction. Cependant, l'apparition des pôles limite l'efficacité de ces représentations fractionnelles et devient gênante quand on veut construire la solution branche par branche moyennant une méthode de continuation. Pour surmonter cette difficulté, on impose que toutes les fractions rationnelles aient un même dénominateur [BRA 97], [NAJ 98], [DAM 03]. Dans ce travail, seules les fractions rationnelles ayant les mêmes dénominateurs seront considérées. Pour une telle représentation, la fin du pas de continuation est caractérisée par un critère de type  $\frac{\|\{P_p\} - \{P_{p-1}\}\|}{\|\{P_p\} - \{w_0\}\|} = \epsilon_{mp}$  où  $\epsilon_{mp}$  est un paramètre de précision supposé petit et  $\{P_p\}$  est la représentation fractionnelle tronquée à l'ordre  $p$  voir [ELH 00] pour plus d'informations.

### 3.2. Un algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent $t = n\Delta t$ basé sur une matrice arbitraire $[K^*]$

Dans l'ordre d'introduire une certaine souplesse sur le choix des matrices qui seront inversées à chaque grand pas, on propose, dans cette section, un autre algorithme qui s'appuie sur les mêmes techniques utilisées pour développer les algorithmes présentés dans la section 3.1. Ces techniques sont appliquées dans un ordre différent en introduisant une matrice arbitraire.

Premièrement, on discrétise en temps les équations [1] et [2], deuxièmement, on introduit une transformation homotopique basée sur l'introduction d'une matrice arbitraire  $[K^*]$  et troisièmement, on applique la méthode de perturbation. Comme dans la section 3.1, on se contente d'appliquer ces techniques au problème [2].

**i- Discrétisation en temps :** on pose  $\{\Delta q\} = \{q^{n+1}\} - \{q^n\}$  où  $\{\Delta q\}$  est la nouvelle inconnue. En utilisant le même schéma implicite en temps de Newmark adopté dans la section 3.1, on obtient la forme discrétisée en temps du problème [2] qui s'écrit :

$$[K_T^n]\{\Delta q\} + \{F_1^{nl}(\{\Delta q\})\} = \{G_s^{n+1}\} \quad [14]$$

où  $[K_T^n]$  est la même matrice que dans [7] mais évaluée à l'instant  $t = n\Delta t$ , le vecteur  $\{G_s^{n+1}\}$  est une sorte de résidu qui dépend de la solution à l'instant  $t = n\Delta t$ .

**ii- Technique d'homotopie basée sur une matrice arbitraire  $[K^*]$  :** pour éviter la triangulation de la matrice tangente  $[K_T^n]$  à chaque instant, on modifie le problème [14] par l'introduction d'un paramètre  $\epsilon$  et d'une matrice arbitraire  $[K^*]$  par l'application de la transformation homotopique définie par :

$$[K^*]\{\Delta w\} + \epsilon([K_T^n] - [K^*])\{\Delta w\} + \{F_1^{nl}(\{\Delta w\})\} = \epsilon\{G_s^{n+1}\} \quad [15]$$

où  $\{\Delta w\}$  est la nouvelle inconnue dépendant de  $\epsilon$ . La solution du problème [14] s'obtient en prenant  $\epsilon = 1$  :  $\{\Delta q\} = \{\Delta w\}(\epsilon = 1)$ .

iii- *Méthode de perturbation* : on cherche les solutions du problème [15] sous la forme d'un développement asymptotique par rapport au paramètre d'homotopie  $\epsilon$ , tronqué à l'ordre  $p$  :

$$\{\Delta w\} = \epsilon\{\Delta w_1\} + \dots + \epsilon^p\{\Delta w_p\} \quad [16]$$

D'après l'équation [15], le terme à l'ordre zéro en  $\epsilon$  est nul. L'injection de [16] dans [15] conduit à un ensemble de problèmes linéaires possédant la même matrice  $[K^*]$  :

Ordre 1 :

$$[K^*]\{\Delta w_1\} = \{G_s^{n+1}\} \quad [17]$$

Ordre  $k$  ( $1 \leq k \leq p$ ) :

$$[K^*]\{\Delta w_k\} = ([K^*] - [K_T^n])\{\Delta w_{k-1}\} + \{FQ^{nl}\} \quad [18]$$

où  $\{FQ^{nl}\}$  est un second membre qui provient du terme non linéaire du problème [15] et qui dépend des solutions aux ordres précédents.

La solution  $\{q^{n+1}\}$  à l'instant  $(n+1)\Delta t$  du problème de départ s'obtient en écrivant :  $\{q^{n+1}\} = \{q^n\} + \{\Delta w\}(\epsilon = 1)$ . Le calcul des vecteurs  $\{\Delta w_k\}$  est effectué en inversant la seule matrice  $[K^*]$ . La solution complète est construite via une méthode de continuation comme dans la section 3.1.

### 3.3. Un algorithme basé sur la technique des développements en temps

On propose, dans cette section, un algorithme différent des précédents qui s'appuie sur des développements en temps. Son principe consiste à chercher directement la solution du problème [2] sous forme de séries entières par rapport à la variable temps  $t$  sans passer par la procédure de discrétisation temporelle et la transformation homotopique.

On présentera cet algorithme sur le problème [2]. L'application de cet algorithme à la résolution des problèmes de dynamique linéaires des structures est présentée dans [FAF 97], [FEL 03a], [FEL 02]. Son extension aux problèmes de dynamique non linéaires des structures est abordée dans la référence [FEL 03b].

*Développement en temps* : on cherche la solution du problème [2], supposée analytique en temps, sous la forme d'un développement en série par rapport au paramètre temporel  $t$ , tronqué à l'ordre  $p$  :

$$\{q\}(t) = \{q_0\} + \{q_1\}t + \{q_2\}t^2 + \dots + \{q_p\}t^p \quad [19]$$

de plus on suppose que le second membre est développable par rapport au temps :

$$\{G\}(t) = \{G_0\} + \{G_1\}t + \{G_2\}t^2 + \dots + \{G_{p-2}\}t^{p-2} \quad [20]$$

En injectant [19] et [20] dans [2], on obtient tous les termes de la série d'une manière explicite en inversant une seule fois la matrice masse  $[M]$  sous la forme :  
ordre  $k$  ( $k \geq 2$ )

$$\{q_k\} = \frac{[M]^{-1}}{k(k-1)} (\{G_{k-1}\} - (k-1)[C]\{q_{k-1}\} - [K]\{q_{k-2}\} - \{FQ^{nl}\}) \quad [21]$$

Les termes  $\{q_0\}$  et  $\{q_1\}$  sont égaux aux conditions initiales. De la même façon que précédemment, on construit la solution complète branche par branche par une méthode de continuation qui consiste à actualiser les conditions initiales et le second membre [FEL 03b].

#### 4. Applications numériques des algorithmes proposés

Dans ce paragraphe, on propose quelques applications numériques pour tester la performance des algorithmes proposés. Leurs efficacités et leurs précisions sont illustrées sur des exemples typiques de problèmes instationnaires non linéaires aussi bien de la première catégorie que de la seconde. Des comparaisons des algorithmes entre eux et à d'autres solveurs classiques de type itératifs ou de prédiction-correction sont présentées.

La performance des algorithmes est mesurée par la qualité de la solution, donnée par l'évolution du résidu, et par le nombre d'opérations nécessaires pour établir la solution sur un intervalle de temps donné, nombre de matrices à inverser et nombre de seconds membres à calculer.

##### 4.1. Problèmes de la première catégorie

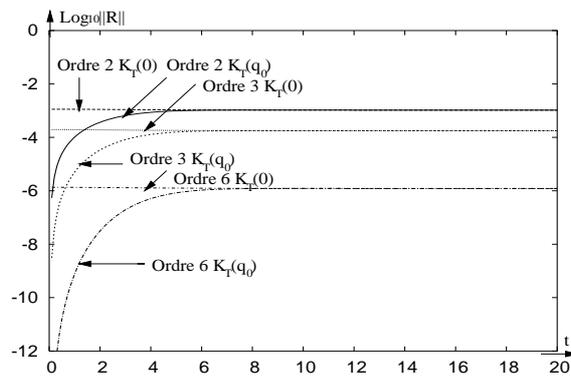
###### 4.1.1. Problème de diffusion non linéaire régi par l'équation de Fisher [BRA 02]

On se propose, dans cette application, de tester l'efficacité des algorithmes implicites d'ordre élevé proposés sur un problème simple de diffusion non linéaire modélisé par l'équation de Fisher dont la solution analytique est connue. La discrétisation en espace, par différences finies, conduit à un problème de la forme [1]. La solution numérique de ce problème est cherchée sur l'intervalle spatial  $[-150, 150]$ , discrétisé en 301 nœuds avec un pas d'espace  $\Delta x = 1$ . L'intervalle temporel considéré  $[0, 20]$  est discrétisé en 200 pas de temps  $\Delta t = 0.1$ . L'intégration temporelle est faite par le schéma en temps implicite d'Euler. Les valeurs optimales des pas  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sont obtenues par comparaison à la solution analytique en se basant sur des considérations de précision.

L'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant initial (ALII) avec le deuxième choix du développement asymptotique donné par [8] a permis d'obtenir la solution complète du problème sur l'intervalle temporel  $[0, 20]$  avec une seule inversion de matrice. Notons que pour ce test qu'au-delà de l'ordre 3, il n'est pas nécessaire d'utiliser le processus de continuation. D'autant plus, la qualité de la solution est acceptable

(résidu inférieur à  $10^{-2}$ ) sur tout l'intervalle considéré et que l'on obtient une précision aussi forte que l'on désire en augmentant l'ordre de troncature. Il est à souligner que cet algorithme peut nécessiter le calcul d'un grand nombre de seconds membres des problèmes linéaires [12] et [13]. Par exemple si l'on veut une précision de  $10^{-5}$ , il faut un ordre de troncature  $p = 10$ , soit à calculer  $200 \times 10 = 2000$  seconds membres. Il serait donc raisonnable de considérer des petits ordres ( $p = 3$  ou  $4$ ) et de construire la solution par tronçons moyennant la méthode de continuation. Ceci nécessitera quelques inversions de matrices mais le nombre de seconds membres est fortement diminué. Une variante de cet algorithme a été testée et validée dans [BRA 02].

Nous avons également résolu ce problème par l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP) basé sur l'introduction d'une matrice arbitraire  $[K^*]$ , exposé dans la section 3.2. Trois choix de matrices  $[K^*]$  sont considérés : la matrice tangente en  $\{q\} = \{0\}$  ( $[K^*] = [K_T^0(\{0\})]$ ), la matrice tangente à l'instant initial ( $[K^*] = [K_T^0(\{q_0\})]$ ) et la matrice diagonale de  $[K_T^0(\{0\})]$ . Les deux premiers choix conduisent à des algorithmes qui semblent comparables à l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant initial (ALII). Les résultats obtenus par les deux premiers choix montrent que l'algorithme converge avec une seule inversion de matrice  $[K_T^0(\{0\})]$  ou  $[K_T^0(\{q_0\})]$  et avec un ordre très petit (2 ou 3) pour une précision maximale de  $10^{-3}$  ou  $10^{-4}$  (figure 1). Notons qu'il n'y a pas de différence notable entre ces deux matrices  $[K^*]$  sauf au début du processus où la matrice tangente au point initial est plus performante, ce qui est bien compréhensible. Cet algorithme paraît plus efficace que celui basé sur la linéarisation par rapport à l'instant initial, mais la liberté dans la définition de la matrice arbitraire  $[K^*]$  introduit un choix plus flexible comme le montre la figure 1 qui donne la courbe résidu en fonction du temps pour différents ordres de troncature  $p = 2, 3$  et  $6$ . Le coût de calcul est réduit fortement si on choisit une matrice diagonale. Ce temps est comparable à celui d'un algorithme explicite.



**Figure 1.** Qualités de la solution en fonction du temps aux ordres  $p = 2, 3$  et  $6$  et pour différents choix de  $[K^*]$

D'après le tableau 1, on constate qu'avec le choix de  $[K^*] = \text{DIAG}[K_T^0(\{0\})]$ , la

précision est meilleure que les deux premiers choix pour un ordre fixé. On remarquera que pour ce troisième choix le coût de calcul est celui des seconds membres.

Signalons que pour atteindre la même précision avec la méthode itérative (MI) il faut diminuer la tolérance  $\kappa$  et donc augmenter le nombre de seconds membres. Le nombre de seconds membres (NSM), dans la méthode itérative, devient supérieur, pour une même qualité de la solution, à celui de l'algorithme ALIP pour le choix de  $[K^*] = \text{DIAG}[K_T^0(\{0\})]$ .

$[K^*] = [K_T^0(0)]$			$[K^*] = \text{DIAG}[K_T^0(0)]$			MI		
Ordre	NSM	$\ R\ $	Ordre	NSM	$\ R\ $	$\kappa$	NSM	$\ R\ $
1	200	$10^{2.2}$	1	200	$10^{-2.5}$	$10^{-1}$	200	$10^{-2.5}$
2	400	$10^{-2.9}$	2	400	$10^{-3.5}$	$10^{-2}$	203	$10^{-3}$
3	600	$10^{-3.7}$	3	600	$10^{-5}$	$10^{-3}$	205	$10^{-3.7}$
4	800	$10^{-4.4}$	4	800	$10^{-6}$	$10^{-4}$	800	$10^{-5}$
5	1000	$10^{-5.2}$	5	1000	$10^{-7}$	$10^{-5}$	1000	$10^{-5.9}$
6	1200	$10^{-5.9}$	6	1200	$10^{-8}$	$10^{-6}$	1204	$10^{-6.6}$
7	1400	$10^{-6.6}$	7	1400	$10^{-9.17}$	$10^{-7}$	1600	$10^{-8}$
8	1600	$10^{-7.3}$	8	1600	$10^{-10.18}$	$10^{-8}$	1803	$10^{-8.7}$
9	1800	$10^{-7.9}$	9	1800	$10^{-11.16}$	$10^{-9}$	2150	$10^{-9.4}$
10	2000	$10^{-8.6}$	10	2000	$10^{-12}$	$10^{-10}$	2402	$10^{-10.7}$

**Tableau 1.** Comparaison entre l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP) pour  $[K^*] = [K_T^0(0)]$  et  $[K^*] = \text{DIAG}[K_T^0(0)]$  et la méthode itérative (MI) (NSM : nombre de seconds membres)

#### 4.1.2. Problème de propagation d'ondes non linéaires régi par l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) [JAM 02]

On teste, dans ce paragraphe, l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP) basé sur l'introduction d'une matrice arbitraire  $[K^*] = [K_T^0(\{q_0\})]$ , pour la résolution d'un problème aux valeurs initiales et aux limites de propagation d'ondes non linéaires avec à la fois des non linéarités quadratiques et phénomènes de dispersion. Ce problème est modélisé par l'équation unidimensionnelle de Korteweg-de Vries (KdV) qui possède une solution analytique. L'application de la méthode de discrétisation en espace, par différences finies, permet d'écrire ce problème dans le cadre [1]. L'intervalle spatial considéré est  $[-L/2, L/2]$  où la longueur  $L$  est supposée grande pour éviter le phénomène de réflexion sur les frontières. Ce domaine est subdivisé en  $N$  sous intervalles de pas  $\Delta x = 1$ . L'intégration temporelle est effectuée sur l'intervalle  $[0, T]$  par le schéma implicite de Crank-Nicolson. Les données numériques utilisées sont les mêmes que celles considérées dans [ISK 89] :  $L = 300$ ,  $T = 150$ . Pour le pas de temps  $\Delta t$ , la valeur optimale qui conduit à une bonne précision a été obtenue par comparaison à la solution analytique :  $\Delta t = 0.1$ . La solution du problème à l'aide de l'ALIP a été obtenue avec une seule inversion de matrice, et ceci

pour un grand intervalle de temps. Les résultats obtenus par cet algorithme pour différents ordres de troncature et ceux obtenus par la méthode itérative [TAH 84] contrôlée par le facteur de précision  $\kappa$ , sont reportés dans le tableau 2.

Ordre	ALIP		MI		
	NSM	$\ R\ $	$\kappa$	NSM	$\ R\ $
2	3000	$10^{-5}$	$10^{-4}$	3002	$10^{-4}$
3	4500	$10^{-6}$	$10^{-6}$	4503	$10^{-4}$
4	6000	$10^{-8}$	$10^{-7}$	6004	$10^{-4}$
5	7500	$10^{-8}$	$10^{-10}$	7505	$10^{-4}$

**Tableau 2.** Comparaison entre l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP) pour  $[K^*] = [K_T^0(\{q_0\})]$  et la méthode itérative (MI)

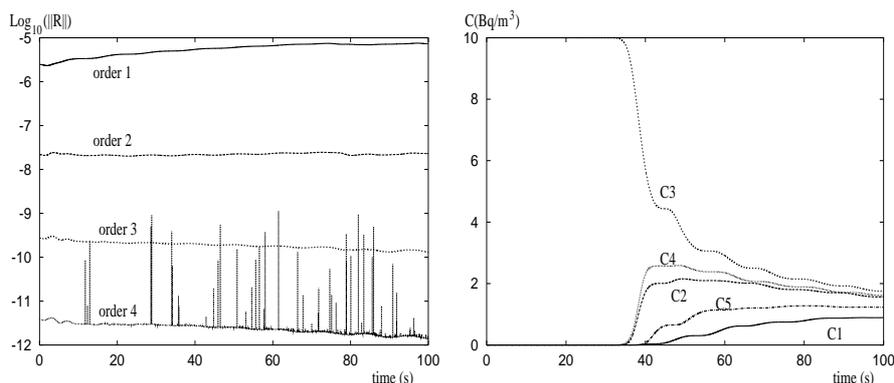
Comme on peut le constater sur ce tableau, pour cet exemple avec la méthode itérative (MI) on n'a pas pu obtenir un résidu inférieur à  $10^{-4}$  pour plusieurs choix du précision  $\kappa$ . Dans l'algorithme proposé ALIP, la qualité de la solution augmente avec l'ordre de troncature ainsi que le nombre de seconds membres. Néanmoins, l'ordre 2 demande un nombre de seconds membres et une qualité comparable que la méthode itérative. Une variante de cet algorithme a été proposée dans [JAM 02]. Cet algorithme a été également comparé à la méthode de Newton-Raphson dans [JAM 02]. Le calcul de la solution, sur le même intervalle temporel  $[0, 150]$ , par la méthode de Newton-Raphson a exigé plusieurs inversions de matrices.

#### 4.1.3. Problème de dispersion des déchets radioactifs dans un milieu fluide à faible profondeur [NAB 02b]

Dans cette application, on présente un autre test de l'efficacité de l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP) basé sur l'introduction d'une matrice arbitraire  $[K^*] = DIAG[K_T^0(\{0\})]$ . L'exemple traité concerne le phénomène de dispersion des radionucléides dans un canal à eau à faible profondeur, de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et de profondeur  $D$ . Le radionucléide soluble considéré est le radon  $^{226}Ra$ , d'activité spécifique  $10Bq/m^3$ , de période 1600 ans. L'onde incidente dans le canal est modélisée par une onde sinusoïdale de période  $T_0$  et d'amplitude  $A$ . Le phénomène est régi par les équations hydrodynamiques bidimensionnelles non linéaires complétées par l'équation de transport advective-diffusive vérifiée par la concentration [PER 94], [NAB 02c]. Ces équations sont complétées par des conditions initiales et aux limites. L'introduction des variables auxiliaires et l'application de la méthode de discrétisation en espace à ce système d'équations, par différences finies, ont permis d'écrire ce problème dans le cadre [1] [NAB 02a].

Le domaine spatial est discrétisé à l'aide d'une grille bidimensionnelle de pas en espace  $\Delta x$  et  $\Delta y$ . L'intégration temporelle, sur l'intervalle  $[0, T]$  subdivisé en sous-intervalles de pas en temps  $\Delta t$ , est effectuée par le schéma en temps implicite d'Euler. Les données numériques utilisées dans cet exemple sont celles de [NAB 02c],

[NAB 02b] :  $L = 213.01m$ ,  $l = 15m$ ,  $D = 1m$ ,  $\Delta x = 1.875m$ ,  $\Delta y = 1.79m$ ,  $T = 100s$ ,  $T_0 = 22.4s$ ,  $A = 0.01m$ ,  $\Delta t = 0.01s$ . On suppose à l'instant initial qu'une décharge instantanée du radionucléide  $^{226}Ra$  est effectuée dans le compartiment limité par les quatre nœuds de coordonnées  $(0, 59\Delta y)$ ,  $(\Delta x, 59\Delta y)$ ,  $(0, 60\Delta y)$  et  $(\Delta x, 60\Delta y)$  et dont les coefficients,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , de diffusion sont pris égaux à 1000s [PER 94].



**Figure 2.** Qualité de la solution des équations hydrodynamiques et concentrations en fonction du temps aux nœuds C1, C2, C3, C4 et C5

Les résultats obtenus sont donnés dans la figure 2. Le premier graphique illustre la qualité de la solution des équations hydrodynamiques en fonction du temps pour les ordres 1, 2, 3 et 4. On remarque que la précision de l'algorithme (ALIP) augmente avec l'ordre de troncature. Quant au second, il montre la variation de la concentration, en fonction du temps, pour diverses positions  $C_1(x = \Delta x, y = 54\Delta y)$ ,  $C_2(x = \Delta x, y = 57\Delta y)$ ,  $C_3(x = \Delta x, y = 59\Delta y)$ ,  $C_4(x = \Delta x, y = 61\Delta y)$  et  $C_5(x = \Delta x, y = 63\Delta y)$  obtenus par l'algorithme proposé.

## 4.2. Problème de la deuxième catégorie

### 4.2.1. Problème d'oscillations non linéaires d'un pendule élastique 2D [JAM 02]

On s'intéresse dans ce paragraphe à la résolution d'un problème instationnaire non linéaire simple qui ne fait pas appel à la procédure de discrétisation en espace. Il s'agit d'un système d'équations d'évolution non linéaires couplées gouvernant les oscillations, sans amortissement ( $[C] = [0]$ ), d'un pendule élastique bidimensionnel dans le plan  $xoy$ . Le pendule est composé d'une masse attachée à un ressort de rigidité  $k$ . Cet exemple est extrait de la référence [GER 93]. L'algorithme de résolution utilisé est celui basé sur la linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP) avec l'introduction d'une matrice arbitraire  $[K^*] = [K_T^0(\{q_0\})]$ . L'intégration temporelle, sur l'intervalle  $[0, 20s]$ , est effectuée par le schéma en temps implicite de Newmark avec les paramètres  $\alpha = 0.5$  et  $\beta = 0.25$ . Les données utilisées sont les

mêmes que celles de la référence [GER 93] :  $m = 1Kg$ ,  $k = 30N/m$ ,  $g = 10m/s^2$ ,  $\Delta t = 0.03s$ . Les conditions initiales considérées sont :  $x(t = 0) = 0$ ,  $y(t = 0) = 1.5$ ,  $\dot{x}(t = 0) = \dot{y}(t = 0) = 0$ . La solution du problème a été obtenue, sur tout l'intervalle  $[0, 20s]$ , par l'algorithme proposé en inversant une seule matrice. Une comparaison des résultats obtenus par cet algorithme, pour différents ordres 2, 3, 4, 5, 6 et ceux calculés par une méthode itérative (MI) et par la méthode de Newton-Raphson (MNR), contrôlée par la tolérance  $\delta$ , est donnée dans le tableau 3.

Ordre	ALIP		MI			MNR		
	NSM	$\ R\ $	$\kappa$	NSM	$\ R\ $	$\delta$	NI	$\ R\ $
2	1334	$10^{-2}$	$10^{-2}$	1355	$10^{-2}$	$10^{-2}$	1334	$10^{-4}$
3	2001	$10^{-3}$	$10^{-3}$	1644	$10^{-2}$	$10^{-3}$	1348	$10^{-4}$
4	2668	$10^{-4}$	$10^{-4}$	2019	$10^{-4}$	$10^{-4}$	1496	$10^{-4}$
5	3335	$10^{-5}$	$10^{-5}$	2200	$10^{-5}$	$10^{-5}$	1903	$10^{-5}$
6	4002	$10^{-6}$	$10^{-6}$	2602	$10^{-6}$	$10^{-6}$	1991	$10^{-6}$

**Tableau 3.** Comparaison entre l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP) pour  $[K^*] = [K_T^0(\{q_0\})]$ , la méthode itérative (MI) et la méthode de Newton-Raphson (MNR), NI est le nombre d'inversions de matrices

Les résultats obtenus montrent que la méthode de Newton-Raphson exige un grand nombre de triangulations de matrices (NI) pour accéder à la solution du problème sur l'intervalle  $[0, 20s]$  alors que l'algorithme proposé et la méthode itérative ne demandent qu'une seule triangulation. Notons aussi qu'on peut obtenir avec cet algorithme la précision que l'on veut en augmentant l'ordre de troncature. Pour cet exemple, le résidu de la méthode (MI) diminue avec le paramètre de précision  $\kappa$ .

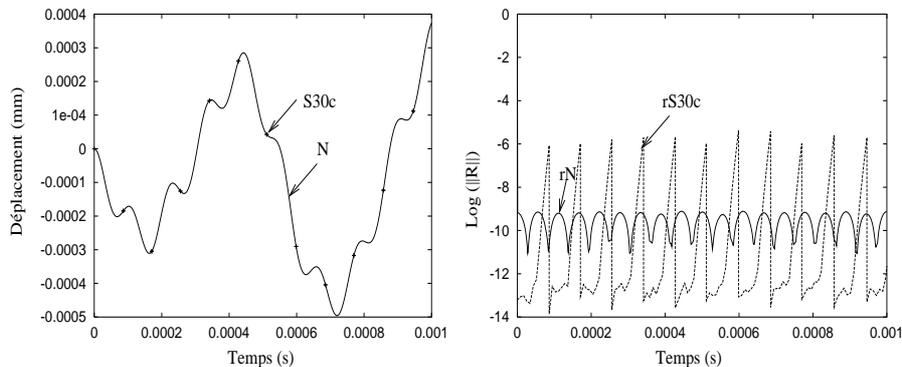
#### 4.2.2. Problème de vibration non linéaire forcée d'une poutre élastique 2D [BOU 03a], [FEL 03b]

Les algorithmes implicites d'ordre élevé proposés sont testés, dans ce paragraphe, sur un problème de vibration forcée d'une poutre élastique 2D, faite d'un matériau homogène et isotrope, encadrée sur un côté et soumise à une force dynamique  $\lambda(t)F$  sur l'autre, où  $\lambda(t)$  est un facteur de chargement dépendant du temps et  $F$  une force donnée. La discrétisation en espace des équations dynamiques du système, en l'absence d'amortissement ( $[C] = [0]$ ), par la méthode des éléments finis [ZIE 87], [CRI 91], [BAT 96] conduit à des équations qui s'écrivent dans le cadre [2]. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre utilisées dans le calcul numérique sont : longueur  $L = 200mm$ , largeur  $l = 10mm$ , masse volumique  $\rho = 10^{-4}Kg/mm^3$ , module d'Young  $E = 10^5MPa$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , force  $F = 200N$ . La structure est discrétisée en 12 éléments de type Q8. La force  $F$  est appliquée au nœud  $(100, 0)$ . L'intégration temporelle sur l'intervalle  $[0, 4s]$  est effectuée par le schéma de Newmark [NEW 59] avec les constantes  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.5$ . Le pas de temps optimal considéré est  $\Delta t = 2.10^{-4}s$ . Le facteur de chargement  $\lambda(t)$  considéré est défini par  $\lambda(t) = 10t$  pour  $0 \leq t \leq 0.1s$  et  $\lambda(t) = 1$  pour  $t \geq 0.1s$ .

Les résultats numériques obtenus par les trois algorithmes proposés d'ordre élevé sont reportés dans le tableau 4 pour différents ordres  $p = 6, 10, 12$  et  $15$ . Pour les trois algorithmes le nombre d'inversions (NI), pour obtenir la solution sur  $[0, 4s]$ , diminue en augmentant l'ordre  $p$ . Pour cet exemple,  $NI = 1$  dès que  $p = 10$  pour l'algorithme ALIP;  $NI=1$  dès que  $p = 12$  pour l'algorithme ALII (deuxième choix) et  $NI = 6$  pour  $p = 15$  pour ALII (premier choix). La qualité de la solution en fin de pas de continuation dépend du paramètre de précision. Les choix qui ont été fait donnent des résidus de l'ordre de  $10^{-2}$  en fin de pas pour les trois algorithmes si on utilise une continuation série et des résidus meilleurs en fin de pas si on utilise une continuation Padé. Ces résultats montrent que l'algorithme ALIP est plus efficace que l'algorithme ALII.

ALII								ALIP				
Premier choix				Deuxième choix								
Série		Padé		Série		Padé		Série		Padé		
p	NI	$\ R\ $	NI	$\ R\ $	NI	$\ R\ $	NI	$\ R\ $	NI	$\ R\ $	NI	$\ R\ $
6	21	$10^{-2}$	21	$10^{-1}$	31	$10^{-2.5}$	31	$10^{-2.5}$	11	$10^{-1.6}$	11	$10^{-1.6}$
10	11	$10^{-1.5}$	11	$10^{-2}$	11	$10^{-1.5}$	11	$10^{-2}$	1	$10^{-2.7}$	1	$10^{-4.5}$
12	11	$10^{-1.5}$	11	$10^{-2}$	1	$10^{-2}$	1	$10^{-3.2}$	1	$10^{-3.7}$	1	$10^{-6.2}$
15	6	$10^{-1.5}$	6	$10^{-2}$	1	$10^{-3.5}$	1	$10^{-5.7}$	1	$10^{-5.4}$	1	$10^{-7}$

**Tableau 4.** Comparaison du nombre d'inversions (NI) et la qualité ( $\|R\|$ ) pour l'obtention de la solution sur  $[0, 4s]$  par les algorithmes proposés (ALII) et (ALIP) pour  $[K^*] = [K_T^0(\{q_0\})]$  aux ordres 6, 10, 12 et 15 pour  $\Delta t = 2.10^{-4}s$



**Figure 3.** Comparaison de la solution obtenue par la technique des développements en temps S30c et par la méthode de Newton-Raphson N pour  $\Delta t = 10^{-6}$ ,  $\delta = 10^{-10}$  ainsi que leurs résidus respectifs rS30c et rN

Signalons que pour ces trois algorithmes, il est nécessaire de calculer  $p \frac{T}{\Delta t}$  seconds membres où  $p$  est l'ordre de troncature,  $\Delta t$  est le pas de temps et  $T$  est l'amplitude de

l'intervalle sur lequel la solution est cherchée. Par exemple sur  $[0, 4s]$  et pour le choix  $\Delta t = 2.10^{-2}$ , il faut calculer 200000 seconds membres pour l'ordre 10 et 300000 seconds membres pour l'ordre 15. Dans les algorithmes où l'on couple le schéma de Newmark avec une méthode itérative (appelée méthode itérative par la suite) ou avec la méthode de Newton-Raphson (appelée méthode de Newton-Raphson par la suite), le nombre d'inversions de matrices obtenu par ces algorithmes est supérieur à celui obtenu par les algorithmes proposés à partir de l'ordre 10. Le nombre de seconds membres, dans la méthode itérative, est très inférieur au nombre des seconds membres obtenu par les algorithmes proposés au-delà de l'ordre 10. Les avantages en termes de temps CPU entre la méthode itérative et les algorithmes proposés pour des ordres assez élevés dépendent du nombre de degrés de liberté du problème.

Pour analyser les performances de l'algorithme basé sur les développements en temps ADT, nous allons choisir l'exemple d'une poutre  $2D$  soumise à une excitation sinusoïdale de la forme  $\lambda F$  avec  $\lambda(t) = \cos(10000t)$  et  $F = 100N$ . Les données géométriques et physiques sont les mêmes que précédemment. L'intervalle de temps considéré est  $[0, 0.001s]$ . Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 3. La solution série en temps tronquée à l'ordre 30, notée  $S30c$ , obtenue par la méthode de continuation sur cet intervalle en 12 pas en calculant 336 seconds membres, par la technique de développement en temps avec une seule inversion de la matrice masse. Alors que la méthode de Newton-Raphson a nécessité 2000 inversions de matrices pour obtenir la même solution, notée  $N$ , avec un critère  $\delta = 10^{-6}$ . Une comparaison des qualités des solutions obtenues, notées  $rN$  pour la méthode de Newton-Raphson et  $rS30c$  pour l'algorithme (ADT), est également donnée dans la figure 3. L'algorithme ADT a permis d'obtenir la solution du problème sur l'intervalle  $[0, 0.001s]$  en 12 pas de continuation. Rappelons que lors d'un pas de continuation avec cet algorithme seuls les seconds membres changent, la matrice à inverser (matrice masse) est la même pour tous les pas.

#### 4.2.3. Problème de vibration non linéaire forcée d'une plaque élastique [BOU 03b]

La performance des algorithmes implicites d'ordre élevé proposés est testée également sur la résolution d'un problème de vibration non linéaire forcée d'une plaque, mince carrée de côté  $L = 100mm$ , encadrée sur un côté et chargée sur le côté opposé par une force dynamique  $\lambda(t)F$ , où  $\lambda(t)$  est le facteur chargement qui dépend du temps et  $F$  une force donnée égale à  $200N$ . Le facteur de chargement  $\lambda(t)$  adopté est donné par  $\lambda(t) = 10t$  pour  $0 \leq t \leq 0.1s$  et  $\lambda(t) = 1$  pour  $t \geq 0.1$ . La plaque est faite d'un matériau élastique homogène et isotrope de densité volumique  $\rho = 2.10^{-3}Kg/mm^3$ , de module d'Young  $E = 2.0810^6MPa$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

La plaque est discrétisée spatialement en 102 éléments de type  $DKT18$ . La force  $F$  est appliquée au nœud  $(100, 0, 0)$ . Les équations, discrétisées en espace, gouvernant les vibrations de la plaque, en l'absence d'amortissement, ont été obtenues sous la forme donnée par [2] par l'application de la méthode des éléments finis [CRI 91], [BAT 96], [ZIE 87]. L'intégration temporelle, dans l'intervalle  $[0, 4s]$ , a été effectuée

par le schéma en temps implicite de Newmark [NEW 59] avec les constantes  $\alpha = 0.25$  et  $\beta = 0.5$ . Le pas en temps optimal considéré est  $\Delta t = 2.10^{-4}s$ .

Le tableau 5 illustre une comparaison des performances des algorithmes implicites d'ordre élevé proposés pour obtenir les solutions séries et leurs améliorations par les approximants de Padé sur l'intervalle  $[0, 4s]$ . Pour cet exemple, on obtient les mêmes conclusions que celles données dans le cas de la poutre  $2D$ .

ALII								ALIP										
Premier choix				Deuxième choix														
Série				Padé				Série				Padé						
$p$	NI	$\ R\ $		NI	$\ R\ $			NI	$\ R\ $		NI	$\ R\ $		NI	$\ R\ $			
7	40	$10^{-2.5}$		40	$10^{-2}$			2	$10^{-1.5}$		2	$10^{-1.3}$		1	$10^{-2.6}$		11	$10^{-2.8}$
9	23	$10^{-2.2}$		23	$10^{-2}$			1	$10^{-2.2}$		1	$10^{-2.8}$		1	$10^{-4}$		1	$10^{-5.2}$
11	17	$10^{-2}$		17	$10^{-2}$			1	$10^{-3.6}$		1	$10^{-4.8}$		1	$10^{-5.6}$		1	$10^{-7}$
15	12	$10^{-2}$		12	$10^{-2}$			1	$10^{-6.3}$		1	$10^{-6.6}$		1	$10^{-7}$		1	$10^{-7}$

**Tableau 5.** Comparaison du nombre d'inversions (NI) et de la qualité ( $\|R\|$ ) pour l'obtention de la solution sur  $[0, 4s]$  par les algorithmes proposés (ALII) et (ALIP) pour  $[K^*] = [K_T^0(\{q_0\})]$  aux ordres 7, 9, 11 et 15 pour  $\Delta t = 2.10^{-4}s$

ALIP				MI				MNR		
Ordre	NSM	NI	$\ R\ $	$\kappa$	NSM	NI	$\ R\ $	$\delta$	NI	$\ R\ $
7	140000	1	$10^{-2.8}$	$10^{-7}$	62260	26	$10^{-4}$	$10^{-4}$	40000	$10^{-6.5}$
9	180000	1	$10^{-5.2}$	$10^{-9}$	84469	19	$10^{-5}$	$10^{-5}$	40000	$10^{-6.5}$
11	220000	1	$10^{-7}$	$10^{-10}$	113472	5	$10^{-5}$	$10^{-6}$	42690	$10^{-6.5}$
15	300000	1	$10^{-7}$	$10^{-11}$	130088	3	$10^{-5.5}$	$10^{-7}$	42690	$10^{-7}$

**Tableau 6.** Comparaison entre l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP) pour  $[K^*] = [K_T^0(\{q_0\})]$ , la méthode itérative (MI) et la méthode de Newton-Raphson (MNR) pour  $\Delta t = 2.10^{-4}s$

Nous avons également comparé l'algorithme ALIP à une méthode itérative (MI) et à celle de Newton-Raphson (MNR) (cf. tableau 6). Ces résultats montrent que l'algorithme ALIP nécessite une seule inversion de matrice pour l'obtention de la solution sur l'intervalle  $[0, 4s]$ , avec une qualité qui augmente avec l'ordre. Quant aux méthodes itérative et de Newton-Raphson, on constate que le nombre d'inversions de matrices est supérieur à un et que leurs précisions augmentent lorsque les paramètres de tolérance ( $\kappa$  et  $\delta$ ) diminuent.

## 5. Conclusion

Nous avons présenté une famille d'algorithmes pour la résolution des problèmes instationnaires non linéaires. Ces algorithmes sont obtenus en faisant appel aux techniques d'homotopie, de discrétisation temporelle et de perturbation utilisées dans la méthode asymptotique numérique. Les trois premiers algorithmes sont des solveurs implicites d'ordre élevé qui se distinguent par le type d'homotopie considérée et par le type de développements asymptotiques choisis. Pour les problèmes de la première catégorie, l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant initial (ALII) avec le choix du second développement asymptotique donné par [8] a permis d'accéder, à partir de l'ordre 3, à la solution totale du problème test considéré sans avoir recours à la méthode de continuation. D'autant plus, la précision augmente avec l'ordre. Par contre, avec le premier choix de développement, cet algorithme nécessite, même en augmentant l'ordre, un processus de continuation pour construire toute la solution sur l'intervalle temporel considéré.

Concernant la résolution des problèmes de cette catégorie par l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP), la convergence dépend à la fois de l'ordre de troncature et du choix de la matrice d'itération. Le choix de la matrice diagonale a fourni une meilleure qualité de la solution sans inversions d'aucune matrice et avec un temps CPU inférieur aux autres choix. Cet algorithme semble être plus efficace que l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant initial (ALII). Une comparaison de cet algorithme avec la méthode itérative (MI) a montré que, pour avoir la même précision, il faut diminuer la tolérance  $\kappa$  ce qui fait augmenter le nombre de seconds membres.

Quant à l'application de ces algorithmes à la résolution des problèmes de la seconde catégorie, leurs efficacités restent les mêmes que dans le cas des problèmes de la première catégorie à condition d'aller aux ordres de troncature supérieurs (à partir de 7). L'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant initial (ALII), avec le premier choix du développement, demande la procédure de continuation pour obtenir la solution entière. Tandis qu'avec le deuxième choix du développement, la solution est obtenue sans continuation à partir de l'ordre 9. Pour l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant précédent (ALIP), la même solution a été obtenue également sans continuation, mais avec un ordre de troncature inférieur. L'introduction des approximations de Padé a permis d'améliorer la précision des ces algorithmes.

La comparaison des résultats obtenus par ces algorithmes et ceux calculés par une méthode itérative et par l'algorithme de Newton-Raphson montre que ces derniers exigent un nombre d'inversions de matrices supérieur à un et que leurs précisions augmentent avec la diminution des paramètres de tolérance ( $\kappa$  et  $\delta$ ).

Le dernier algorithme basé sur le développement en temps proposé est utilisé pour les problèmes ayant des solutions analytiques en temps. Cette approche a été testée sur un problème de la seconde catégorie portant sur la vibration non linéaire forcée d'une poutre élastique  $2D$ . La réponse dynamique a été obtenue sans passer par la procédure de discrétisation en temps et en inversant une seule fois la matrice masse.

La comparaison des résultats calculés par cette approche en temps avec la méthode de Newton-Raphson montre que cet algorithme est plus efficace relativement au nombre de matrices inversées. Cet algorithme est efficace pour les problèmes à petit nombre de degrés de liberté. Son extension aux problèmes de grande taille sera abordée ultérieurement en le couplant à une technique de bases réduites.

## 6. Bibliographie

- [ARG 91] ARGYRIS J., MLEJENEK H. P., *Texts on computational mechanics. Dynamics of structures*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [BAK 81] BAKER G. A., GRAVES MORRIS P., *Padé approximants, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley Publishing Company, New York*, VOL. 13, N° 1, 1981.
- [BAT 96] BATHE K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Engewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [BOU 03A] BOUTMIR S., BRAIKAT B., JAMAL M., DAMIL N., COCHELIN B., POTIER-FERRY M., *Implicit integration high order algorithms family for the finite element implementation of non-linear structural dynamic problems*, Preprint, 2003.
- [BOU 03B] BOUTMIR S., BRAIKAT B., JAMAL M., DAMIL N., COCHELIN B., POTIER-FERRY M., *Une famille d'algorithmes implicites d'ordre supérieur pour la résolution des problèmes de dynamique non-linéaire des structures*, 6<sup>me</sup> Colloque Nationale en Calcul des Structures 20 – 23 Mai, Giens, France, 2003.
- [BRA 97] BRAIKAT B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., *Méthode asymptotique numérique pour la plasticité*, *Revue Européenne des Eléments Finis*, VOL. 6, N° 3, P. 337–357, 1997.
- [BRA 00] BRAIKAT B., *Quelques contributions dans l'application de la méthode asymptotique numérique en mécanique*, Thèse d'Etat, Université Hassan II - Mohammedia, Casablanca, Maroc, 2000.
- [BRA 02] BRAIKAT B., JAMAL M., DAMIL N., POTIER-FERRY M., *Algorithmes d'intégration temporelle implicites couplés avec des résolveurs d'ordre élevé*, *Revue Européenne des Eléments Finis*, VOL. 11, P. 749–772, 2002.
- [COC 94] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., *The asymptotic numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics*, *Revue Européenne des Eléments Finis*, VOL. 3, P. 281–297, 1994.
- [COC 00] COCHELIN B., COMPAIN C., *An asymptotic numerical method for nonlinear transient dynamics*, *Revue Européenne des Eléments Finis*, VOL. 9, P. 113–128, 2000.
- [CRI 91] CRISFIELD M. A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley and Sons, VOL. 1, 1991.
- [CRI 97] CRISFIELD M. A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley, Chichester, VOL. 2, 1997.
- [DAM 90] DAMIL N., POTIER-FERRY., *A new method to compute perturbed bifurcation, Application to the buckling of imperfect elastic structures*, *International Journal of Engineering Sciences*, VOL. 28, P. 943–957, 1990.

- [DAM 03] DAMIL N., JAMAI R., LAHMAM H., *Padé Approximants and the asymptotic numerical method*, *Soumis à la Revue Européenne des Eléments Finis*, 2003.
- [ELH 00] ELHAGE H. A., POTIER-FERRY M., DAMIL N., *A numerical continuation method on Padé approximants*, *International Journal of Solids and Structures*, VOL. 37, P. 6981–7001, 2000.
- [FAF 97] FAFARD M., HENCHI K., GENDRON G., AMMAR S., *Application of an asymptotic method to transient dynamic problems*, *Journal of Sound and Vibration*, VOL. 208, P. 73–99, 1997.
- [FEL 02] FELLAH S., BRAIKAT B., JAMAL M., DAMIL N., POTIER-FERRY M., *A time-asymptotic numerical method for structural dynamic problems*, *submitted to Engineering and Design (NED)*, 2002.
- [FEL 03A] FELLAH S., BRAIKAT B., JAMAL M., DAMIL N., *An approach based on time expansion, Padé approximants and Shanks transformation for linear structural dynamic problems*, *Journal Maghrébin de Physique*, VOL. 2, N° 1, 2002.
- [FEL 03B] FELLAH S., BRAIKAT B., JAMAL M., DAMIL N., POTIER-FERRY M., *Analyse non linéaire des problèmes de dynamique des structures par la méthode des développements en temps*, *Preprint*, 2003.
- [FLE 91] FLETCHER C. A. I., *Computational techniques for fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [FOR 78] FORNBERG B., WHITHAM G. B., *A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser A*, VOL. 289, P. 373–404, 1978.
- [GER 93] GÉRADIN M., RIXEN D., *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*, Masson, Paris, 1993.
- [ISK 89] ISKANDAR L., *New numerical solution of Korteweg-de Vries equation*, *Applied Numerical Mathematics*, VOL. 5, P. 215–221, 1989.
- [JAM 98] JAMAL M., *Contribution à la résolution de quelques problèmes de la physique non-linéaire*, *Thèse d'Etat, Université Hassan II - Mohammedia, Casablanca, Maroc*, 1998.
- [JAM 02] JAMAL M., BRAIKAT B., BOUTMIR S., DAMIL N., POTIER-FERRY M., *A high order implicit algorithm for solving instationary non-linear problems*, *Computational Mechanics*, VOL. 28, N° 5, P. 375–380, 2002.
- [NAB 02A] NABAWI I. R., FAHLI A., DAMIL N., BRAIKAT B., CHAGDALI M., FAKHI S., *Simulation numérique du transport des radionucléides dans un canal à eau*, *Journal Maghrebin de Physique*, VOL. 2, N° 1, 2002.
- [NAB 02B] NABAWI I. R., FAHLI A., DAMIL N., BRAIKAT B., CHAGDALI M., FAKHI S., *A high order implicit algorithm to model radionuclide dispersion*, *Submitted to Nuclear Engineering and Design, (NED)*, 2002.
- [NAB 02C] NABAWI I. R., *Simulation de la dispersion des radionucléides dans un milieu fluide à faible profondeur à l'aide d'un algorithme implicite d'ordre élevé*, *Doctorat, Université Hassan II - Mohammedia, Casablanca, Maroc*, 2002.
- [NAJ 98] NAJAH A., COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., *A critical review of asymptotic numerical methods*, *Archives of Computational Methods in Engineering*, VOL. 5, P. 31–50, 1998.
- [NAY 73] NAYFEH A. H., *Perturbation methods*, John Wiley, New York, 1973.

- [NAY 79] NAYFEH A. H., MOOK D. T., *Nonlinear oscillations*, John Wiley, New York, 1979.
- [NAY 81] NAYFEH A. H., *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley, New York, 1981.
- [NEW 59] NEWMARK N. M., *A method of computation for structural dynamics*, *Journal of Engineering in Mechanics, Division ASCE, EM3*, VOL. 85, P. 67–94, 1959.
- [PAD 92] PADÉ H., *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles*, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1892.
- [PER 94] PERIANEZ R., ABRIL J., GARCIA LEÓN M., *A modelling study of  $^{226}\text{Ra}$  dispersion in an estuarine system in South-West Spain*, *Journal Environment Radioactivity*, VOL. 24, P. 159–179, 1994.
- [SMI 97] SMITH A., SILVESTER D., *Implicit algorithms and their linearization for transient incompressible Navier-Stokes equations*, *IMA Journal of Numerical Analysis*, VOL. 17, P. 527–545, 1997.
- [TAH 84] TAHA R. T., ABLOWITZ M. J., *Analytical and numerical aspects of certain non-linear evolution equations II. Numerical, Non-linear Schrodinger equation*, *Journal of Computational Physics*, VOL. 55, P. 203–230, 1984.
- [ZIE 87] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L. , *The finite element method. Solid and fluid mechanics and non-linearity*, *Fourth Edition McGraw-Hill, Book Company*, VOL. 2, 1987.