

---

# Approche pseudo inverse pour estimation des contraintes dans les pièces embouties axisymétriques

W. Gati\* — Y. Q. Guo\*\* — H. Naceur\* — Jean-Louis Batoz\*\*\*

\* *Pôle Régional Modélisation de Picardie*  
*Lab. Roberval, Université de Technologie de Compiègne*  
*UMR 6066 du CNRS, BP 20529*  
*F-60205 Compiègne cedex*  
*valid.gati@utc.fr*

\*\* *Lab. de Mécanique, Matériaux et Structures (GMMS)*  
*Université de Reims, UFR Science EN*  
*Moulin de la Housse, BP 1039*  
*F-51687 Reims*

\*\*\* *Institut Supérieur d'Ingénierie de la Conception (InSIC)*  
*27, rue d'Hellieule*  
*F-88100 Saint-Dié des Vosges*

---

**RÉSUMÉ.** Cet article présente un nouvel algorithme mixte basé sur l'approche inverse appelé « approche pseudo inverse ». Il a été développé pour prendre en considération l'historique de déformation : des configurations intermédiaires réalistes sont introduites pour le calcul de l'incrément de déformations entre deux configurations successives. Ces configurations sont générées par une procédure ne tenant compte que de considérations géométriques. Les déformations totales entre la configuration initiale et une configuration intermédiaire peuvent être déterminées par approche inverse. L'incrément des déformations entre deux configurations successives est ensuite obtenu pour effectuer l'intégration plastique des contraintes basée sur la théorie d'écoulement plastique.

**ABSTRACT.** This paper deals with a new mixed algorithm based on the Inverse Approach named "Pseudo Inverse Approach". It has been developed to take into account the deformation history: some realistic configurations are introduced to calculate the strain increments between two successive configurations. These configurations are generated by a geometrical based procedure. The total strain between the initial configuration and an intermediate configuration can be determined by the Inverse Approach. Then the strain increment between two successive configurations is obtained in order to make the stress plastic integration based on the flow theory of plasticity.

**MOTS-CLÉS :** évaluation de contraintes, emboutissage, approche inverse, historique de chargement.

**KEYWORDS:** stress evaluation, sheet metal forming, inverse approach, loading history.

---

## 1. Introduction

Le procédé d'emboutissage de tôles minces est largement utilisé dans diverses industries. L'utilisation croissante de tôles à hautes limites élastiques crée de plus en plus de problèmes d'assemblage à cause de la distorsion des pièces après emboutissage (retour élastique). De nombreux groupes de recherche travaillent sur ce sujet pour prévoir la déformation géométrique des pièces embouties (Gardiner, 1957 ; Gelin *et al.*, 1999 ; Guo *et al.*, 2002). Cette prédiction dépend fortement des résultats de la simulation de l'emboutissage et surtout de l'état de contraintes dans la pièce finale emboutie. Des maillages éléments finis très fins doivent être utilisés et les temps de calcul deviennent de ce fait très importants.

Dans la phase de conception initiale, il s'avère intéressant d'utiliser une méthode simplifiée pour obtenir une bonne estimation des états de contraintes. L'approche inverse à un seul pas (AI) (Batoz *et al.*, 1998 ; Guo *et al.*, 2000 ; Naceur *et al.*, 2002) a montré qu'elle peut donner une assez bonne distribution des déformations en un temps de calcul très réduit, mais l'estimation des contraintes reste médiocre. Cela est dû au fait que la plasticité est basée sur l'hypothèse du chargement radial.

Dans nos travaux récents (Gati *et al.*, 2002a ; Gati, 2002b), une démarche a été développée pour prendre en considération l'historique des déformations. Comparé à l'AI, cet algorithme a pour principales particularités :

- introduction de configurations intermédiaires réalistes pour le calcul de l'incrément de déformation entre deux configurations successives. Ces configurations sont déterminées en amont du calcul inverse, sans traitement classique du contact ;
- calcul de contraintes tenant compte de l'historique du chargement par une méthode d'intégration implicite (algorithme du retour radial) ;
- passage d'information d'un pas à un autre par un transfert de champs dans le flan initial.

Dans cet article, nous rappellerons d'abord la cinématique, la loi de comportement ainsi que la formulation éléments finis dans l'AI classique en modèle axisymétrique. Dans cette partie, l'originalité concerne la prise en compte des effets de flexion. En effet, dans les travaux antérieurs (Batoz *et al.*, 1993 ; Narainen, 1993 ; Naceur, 1998), seuls les effets de membrane étaient pris en compte.

Nous présenterons ensuite en détail le nouvel algorithme dit mixte appelé « approche pseudo inverse » (API). Enfin nous mettrons en évidence l'amélioration de l'estimation de contraintes par le nouvel algorithme pour deux tests de validation axisymétrique. Nos résultats sont comparés à ceux obtenus par le logiciel ABAQUS (Abaqus, 2001).

## 2. Approche inverse en modèle axisymétrique

Dans cette partie nous présenterons la cinématique, la loi de comportement ainsi que la formulation éléments finis d'un modèle axisymétrique incluant les effets de flexion. Plusieurs auteurs (Stoughton, 1985 ; Wang *et al.*, 1988 ; Choudhry *et al.*, 1989 ; Peric *et al.*, 1991) ont estimé nécessaire la prise en compte de ces effets, notamment pour prédire certains phénomènes comme la striction (Hage *et al.*, 1990 ; Arrieux *et al.*, 1992 ; Brunet *et al.*, 1993).

Contrairement aux analyses incrémentales incluant les effets de flexion, la prise en compte de ceux-ci dans l'approche inverse à un seul pas ne permet d'en voir les effets que sur les régions courbes de la tôle (situées sur les rayons d'outils par exemple). En effet, dans l'AI à un pas, la nature indépendante du trajet de déformation suivi ne permet pas de restituer les effets de cambrage-décambrage subis par la tôle lors du passage sur les rayons d'entrée matrice.

### 2.1. Cinématique de grandes transformations

Dans l'AI, les déformations totales sont définies en comparant directement le flan initial  $C^0$  et la pièce finale 3D  $C$ , avec  $C$  pris comme référence. Les vecteurs positions initial et final d'un point matériel  $q$  peuvent s'exprimer comme suit (voir figure 1) :

$$\underset{\sim}{x}_q^0 = \underset{\sim}{x}_p^0 + z^0 \underset{\sim}{n}^0 = \underset{\sim}{x}_p - \underset{\sim}{u}_p + z^0 \underset{\sim}{n}^0 \quad [1]$$

$$\underset{\sim}{x}_q = \underset{\sim}{x}_p + z \underset{\sim}{n} \quad [2]$$

avec  $\underset{\sim}{u}_p$  le vecteur de déplacements du point  $p$  situé sur la surface moyenne de la tôle,  $\underset{\sim}{n}^0$  et  $\underset{\sim}{n}$  les normales à la surface moyenne en  $p^0$  et  $p$ .

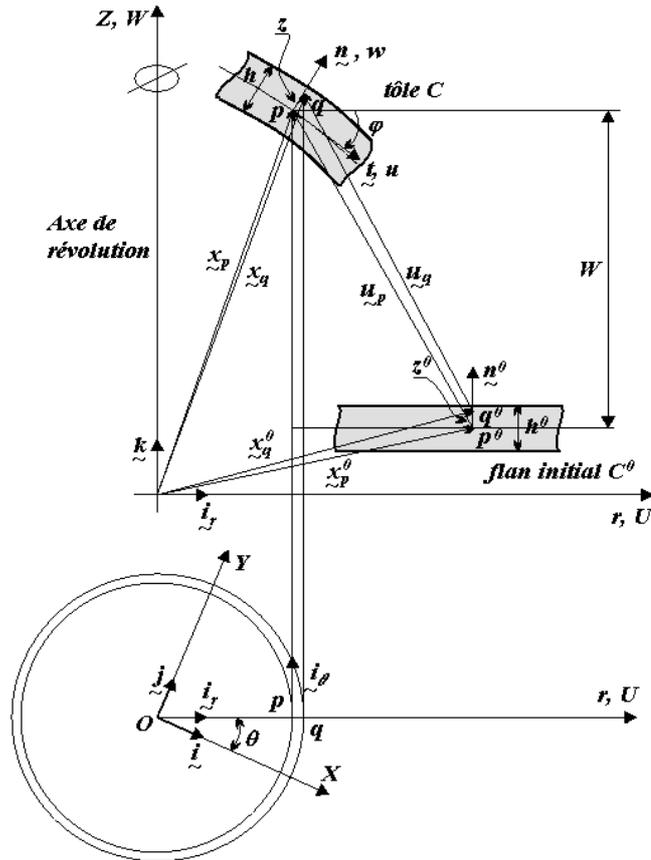
Les tenseurs gradient de déformation aux points  $q^0$  et  $q$  référencés par rapport à  $C$  sont définis par les équations [3] et [4]. On en déduit le tenseur gradient de déformation inverse décrivant le mouvement de  $q^0$  à  $q$  est obtenu :

$$\{dx_q^0\} = [F^0]^{-1} \{ds\} ; [F^0]^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{t} - \underset{\sim}{u}_{p,s} & \vdots & \underset{\sim}{i}_\theta - \frac{1}{r} \underset{\sim}{u}_{p,\theta} & \vdots & \frac{1}{\lambda_3} \underset{\sim}{n}^0 \end{bmatrix} \quad [3]$$

$$\{dx_q\} = [F_z] \{ds\} ; [F_z] = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{t} + z \underset{\sim}{n}_{,s} & \vdots & \underset{\sim}{i}_\theta + \frac{z}{r} \underset{\sim}{n}_{,\theta} & \vdots & \underset{\sim}{n} \end{bmatrix} \quad [4]$$

$$\{dx_q^0\} = [F_0]^{-1} [F_z]^{-1} \{dx_q\} = [F]^{-1} \{dx_q\} \quad [5]$$

avec :  $\langle ds \rangle = \langle ds \quad rd\theta \quad dz \rangle$



**Figure 1.** Cinématique d'une tôle mince axisymétrique

$\lambda_3 = z/z_0 = h/h_0$  est l'élongation d'épaisseur supposée constante à travers l'épaisseur.  $\tilde{t} = x_{p,s}$  et  $\tilde{i}_\theta = (1/r)x_{p,\theta}$  sont situés dans le plan tangent à la tôle,  $\tilde{n}$  est la normale à la tôle. Dans le modèle éléments finis utilisé (section 2.3) des approximations linéaires des normales sont utilisées à partir de normales uniques calculées en chaque nœud.

Si le tenseur gradient de déformation inverse  $[\mathbf{F}]^{-I}$  est défini dans le repère local, alors le tenseur Cauchy Green gauche prend la forme simple suivante :

$$[\mathbf{B}]^{-I} = [\mathbf{F}]^{-T} [\mathbf{F}]^{-I} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{bmatrix} \quad [6]$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les deux élongations principales dans le plan de la tôle. Finalement, les déformations logarithmiques sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ln \lambda_1 \\ \ln \lambda_2 \end{Bmatrix} \quad [7]$$

La variation d'épaisseur est obtenue comme dans le cas sans flexion en considérant une déformation isochore, soit :  $h = h^0 (\lambda_1(\theta) \cdot \lambda_2(\theta))^{-1}$ , où  $\lambda_1(\theta)$  et  $\lambda_2(\theta)$  sont les élongations principales sur la surface moyenne.

## 2.2. Loi de comportement intégrée

L'AI est une méthode totale conduisant à une estimation des déplacements et contraintes indépendante du chemin de déformation. L'hypothèse du chargement proportionnel (ou radial) permet l'intégration analytique de la loi de comportement de l'état initial à l'état final (Lemaître *et al.*, 1985 ; Batoz *et al.*, 1989 ; Guo *et al.*, 1990 ; Hu, 1997). Les hypothèses de contraintes planes et d'anisotropie transverse du matériau sont aussi adoptées. Le critère de Hill est donné par :

$$\Phi = \frac{1}{2} (\langle \sigma \rangle [\mathbf{P}] \{ \sigma \}) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 (\bar{\varepsilon}) \quad [8]$$

où  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$  est la courbe de traction uniaxiale (courbe de déformation équivalente – contrainte équivalente). La matrice  $[\mathbf{P}]$  dépend du coefficient d'anisotropie moyen :  $\mathbf{r} = (r_0 + 2r_{45} + r_{90})/4$ .

La loi de normalité et le critère de Hill permettent d'exprimer le taux de déformations en fonction des contraintes. L'hypothèse du chargement radial permet ensuite l'intégration analytique du taux de déformations de l'état initial à l'état final pour obtenir la loi de comportement totale suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \left( [H_e]^{-1} + \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\sigma} - \frac{1}{E} \right) [P] \right)^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad [9]$$

où  $[H_e]$  est la matrice de comportement élastique.

### 2.3. Formulation éléments finis

La surface de l'embouti final, supposée connue, est discrétisée en éléments de coque tronconiques à deux nœuds (figure 2). L'élément choisi adapté pour l'AI est un élément de type Kirchhoff basé sur des approximations linéaire du déplacement tangentiel et cubique pour le déplacement normal (élément CAXI\_K dans (Batoz *et al.*, 1992)). L'équilibre est traduit par le principe des travaux virtuels :

$$W = \sum_e (W_{int}^e - W_{ext}^e) = 0 \quad \forall u_q^* \text{ C.A.} \quad [10]$$

où  $W_{int}^e$  et  $W_{ext}^e$  sont les travaux virtuels interne et externe d'un élément.

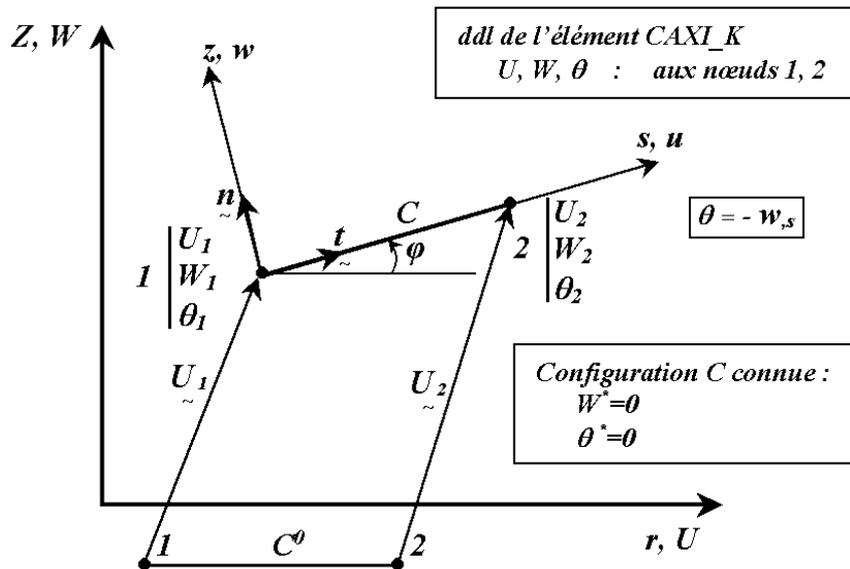


Figure 2. Elément de coque tronconique dans les configurations initiale et finale

## 2.3.1. Travail virtuel interne

Le travail virtuel interne s'exprime sous la forme :

$$W_{int}^e = \int_{V^e} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle \{ \boldsymbol{\sigma} \} dV \quad [11]$$

Les déformations virtuelles dans une coque mince sont composées d'une partie de membrane et d'une partie de flexion :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle = \langle \boldsymbol{e}^* \rangle + z \langle \boldsymbol{\chi}^* \rangle \quad [12]$$

Les déformations virtuelles de membrane s'expriment en fonction des déplacements virtuels  $u^*$  et  $w^*$  suivant les directions  $s$  et  $z$  (approximations linéaires pour  $u^*$  et cubiques pour  $w^*$  le long de  $s$ ) :

$$\langle \boldsymbol{e}^* \rangle = \left\langle \boldsymbol{u}_{,s}^* \quad \frac{1}{r} (u^* \cos \varphi - w^* \sin \varphi) \right\rangle ; \quad \{ \boldsymbol{e}^* \} = [B_m] \{ \boldsymbol{u}_n^* \} \quad [13]$$

avec :  $\langle \boldsymbol{u}_n^* \rangle = \langle u_1^* \quad w_1^* \quad u_2^* \quad w_2^* \rangle$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \vdots & \frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{r} N_1^L \cos \varphi & -\frac{1}{r} N_1^C \sin \varphi & \vdots & \frac{1}{r} N_2^L \cos \varphi & -\frac{1}{r} N_2^C \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$N_1^L = 1 - \frac{s}{L} \quad ; \quad N_2^L = \frac{s}{L}$$

$$N_1^C = \left( 1 - \frac{s}{L} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{s}{L} \right) \quad ; \quad N_2^C = \left( \frac{s}{L} \right)^2 \left( 3 - 2 \frac{s}{L} \right)$$

Les normales à la surface moyenne de l'embouti sont connues, ce qui permet de considérer un champ de déplacements virtuels d'un point quelconque où les rotations virtuelles (de la normale) notées  $\boldsymbol{\theta}^*$  sont nulles. Dans le modèle axisymétrique de Kirchhoff  $\boldsymbol{\theta}^* = -\boldsymbol{w}_{,s}^*$ . Nous pouvons alors exprimer les courbures virtuelles de flexion comme suit :

$$\langle \boldsymbol{\chi}^* \rangle = \langle -\boldsymbol{w}_{,ss}^* \quad 0 \rangle \quad ; \quad \{ \boldsymbol{\chi}^* \} = [B_f] \{ \boldsymbol{u}_n^* \} \quad [14]$$

avec :

$$[B_f] = \begin{bmatrix} 0 & -N_{1,ss}^C & \vdots & 0 & -N_{2,ss}^C \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant les équations [12], [13] et [14], on peut écrire :

$$\{\varepsilon^*\} = ([B_m] + z[B_f])\{u_n^*\} \quad [15]$$

Les déplacements virtuels globaux peuvent être transformés dans le repère local :

$$\{u_n^*\} = [T]\{U_n^*\} \quad [16]$$

avec :  $\langle U_n^* \rangle = \langle U_1^* \quad W_1^* \quad U_2^* \quad W_2^* \rangle$

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}; \quad C = \cos \varphi; \quad S = \sin \varphi$$

En utilisant les équations [11], [15] et [16] et en effectuant l'intégration à travers l'épaisseur, nous pouvons écrire :

$$W_{int}^e = \langle U_n^* \rangle \{f_{int}^e\} \quad [17]$$

avec :

$$\{f_{int}^e\} = \pi L [T]^T \int_{-1}^1 ([B_m]^T \{N\} + [B_f]^T \{M\}) r d\xi \quad [18]$$

$$\{N\} = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \{\sigma\} d\zeta; \quad \{M\} = \frac{h^2}{4} \int_{-1}^1 \{\sigma\} \zeta d\zeta$$

$$ds = \frac{L}{2} d\xi; \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

$$dz = \frac{h}{2} d\zeta; \quad -1 \leq \zeta \leq 1$$

où  $\{N\}$  est le vecteur des efforts normaux et  $\{M\}$  le vecteur des moments de flexion.

### 2.3.2. Travail virtuel externe

Le travail virtuel externe s'exprime en fonction des efforts appliqués par les outils sur la tôle dans la configuration finale. Ces efforts sont calculés, dans le cas de l'AI, sans traitement du contact. Ils sont composés d'une pression nodale normale à la tôle et d'une force de frottement tangentielle sous serre-flan, basée sur un modèle de Coulomb. La direction de la résultante de ces efforts est définie par la projection du glissement tôle/outil sur le cône du frottement (dont l'angle de sommet  $\alpha = 2 \operatorname{Arctan}(\mu)$  avec  $\mu$  le coefficient de frottement). L'intensité de la résultante peut être obtenue par l'équilibre des forces internes et externes suivant sa direction (Batoz *et al.*, 1998 ; Guo *et al.*, 2000 ; Naceur *et al.*, 2002).

## 3. Approche pseudo inverse

### 3.1. Génération de « vraies » configurations intermédiaires

Dans l'AI classique, seules les configurations initiales et finales sont considérées pour le calcul des grandes déformations totales. Les contraintes sont ensuite calculées avec une loi de comportement intégrée (théorie de déformation plastique). Des configurations intermédiaires sont utilisées dans le seul but de faciliter la convergence, mais elles ne correspondent pas aux vraies formes que prend la tôle pour des positions données du poinçon. En effet, ces maillages intermédiaires sont tous proportionnels en hauteur ; ils sont tout simplement obtenus en multipliant les coordonnées verticales des nœuds par le rapport « numéro de pas/nombre de pas ».

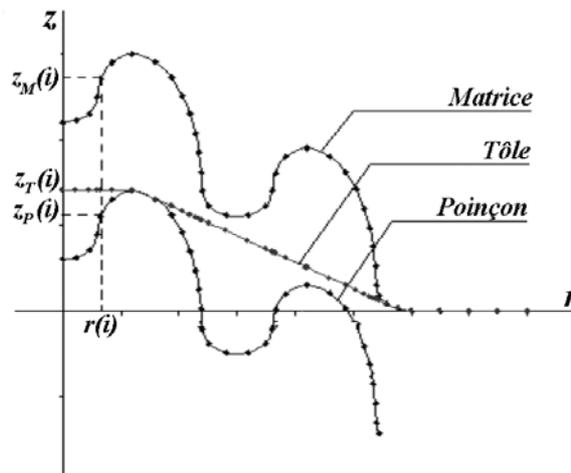


Figure 3. Minimisation de la longueur du profil de la tôle

Pour prendre en considération l'historique du chargement, nous introduisons des configurations intermédiaires géométriquement admissibles. Du fait du principe de base de l'AI, qui est la connaissance de la forme de l'embouti, ces configurations intermédiaires doivent être générées en amont du calcul inverse. Dans cet article, nous avons opté pour un calcul géométrique découplé du calcul mécanique.

Considérons une tôle mince située entre la matrice et le poinçon avant la fin de sa course. Nous supposons que la forme de la tôle est en accord géométrique avec la position des outils, se comportant ainsi comme une membrane tendue. Cette forme peut alors être déterminée par minimisation de l'aire de la tôle. Dans le cas axisymétrique, cela revient à minimiser la longueur du profil de la tôle, en prenant compte des limitations dues à la géométrie des outils (voir figure 3).

Soient  $C_M$ ,  $C_P$  et  $C_T$  les configurations de la matrice, du poinçon et de la tôle. Le maillage de la matrice ( $C_M$ ) est créé sur la pièce finale de forme connue, le maillage du poinçon ( $C_P$ ) est obtenu par une translation verticale de  $C_M$ , et le maillage de la tôle ( $C_T$ ) reste à déterminer. Les nœuds des trois maillages ont les mêmes coordonnées radiales  $r(i)$  et différentes coordonnées verticales ( $z_M(i)$ ,  $z_P(i)$  et  $z_T(i)$ ). En prenant les coordonnées verticales  $z_T(i)$  de la tôle comme les variables de conception et les profils des outils comme limitations, un problème d'optimisation peut être décrit comme suit :

$$\text{Min } \sum_{i=1}^{n-1} d(i)$$

$$\text{avec : } d(i) = \left[ (r(i+1) - r(i))^2 + (z_T(i+1) - z_T(i))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad [19]$$

$$\text{sous limitations : } z_P(i) \leq z_T(i) \leq z_M(i) \quad [20]$$

Un algorithme SQP (*Sequential Quadratic Programming*) est utilisé pour résoudre ce problème d'optimisation.

Notons que la méthode présentée donne des configurations intermédiaires indépendantes l'une de l'autre, *i.e.* les nœuds ayant le même numéro ne représentent pas le même point matériel. La méthode du transfert du champ de contraintes entre deux configurations successives sera présentée dans la section 3.3.

### 3.2. Intégration des états de contraintes

Pour garder les avantages de l'AI, les déformations totales sont calculées à chaque itération entre les configurations initiale et actuelle, ainsi l'incrément de déformations est obtenu. La loi de comportement totale, ne pouvant pas prendre en considération l'historique du chargement, est quant à elle remplacée, dans le cas de l'API, par un algorithme implicite basé sur la théorie d'écoulement de plasticité, appelé « algorithme du retour radial » (Simo *et al.*, 1986).

Pour calculer les contraintes plastiquement admissibles vérifiant le critère de plasticité, nous exprimons le critère en fonction du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  et effectuons une recherche unidimensionnelle de  $\dot{\lambda}$  telle que le critère de plasticité soit nul. Le critère de Hill peut s'écrire comme suit :

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbf{P}] \{\boldsymbol{\sigma}\} - \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{-2} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{eq}^2 - \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{-2} = 0 \quad [21]$$

avec :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \rangle^T : \text{vecteur de contraintes de Cauchy}$$

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-r}{1+r} & 0 \\ \frac{-r}{1+r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+2r)}{1+r} \end{bmatrix} : \text{matrice d'anisotropie}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_{eq}$  est la contrainte équivalente et  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)$  est la contrainte seuil actualisée issue de la courbe de l'essai uniaxial. La loi de normalité permet de définir la vitesse de la déformation plastique équivalente  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  en fonction de  $\dot{\lambda}$  :

$$\left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right\} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{px} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{py} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{pxy} \end{bmatrix} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} = \dot{\lambda} [\mathbf{P}] \{\boldsymbol{\sigma}\} \quad [22]$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \left( \left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right\}^T [\mathbf{P}]^{-1} \left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right\} \right)^{\frac{1}{2}} = \dot{\lambda} \left( \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbf{P}] \{\boldsymbol{\sigma}\} \right)^{\frac{1}{2}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{\sigma}_{eq} \quad [23]$$

La décomposition additive des déformations et l'équation [22] permettent d'exprimer la vitesse des contraintes  $\left\{ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right\}$  en fonction de  $\dot{\lambda}$  :

$$\left\{ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right\} = [\mathbf{H}_e] \left( \left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} - \left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right\} \right) = [\mathbf{H}_e] \left( \left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} - \dot{\lambda} [\mathbf{P}] \{\boldsymbol{\sigma}\} \right) \quad [24]$$

L'algorithme implicite est formulé sous une forme incrémentale. Soit  $\{\sigma^0\}$  et  $\overline{\varepsilon_p^0}$  les contraintes et la déformation plastique équivalente connues au début d'un pas : ces quantités correspondent aux contraintes et déformations estimées (obtenues) pour la configuration intermédiaire précédente.  $\{\Delta\varepsilon\}$  l'accroissement des déformations du pas, avec  $\{\Delta\varepsilon\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^0\}$ ,  $\{\varepsilon^0\}$  estimé/obtenu à la configuration précédente,  $\{\varepsilon\}$  estimé/obtenu à la configuration actuelle. Ces déformations sont calculées en utilisant l'AI classique pour les configurations en question.  $0 < \alpha \leq 1$  est le paramètre de l'algorithme semi-implicite. Les contraintes recherchées à l'itération  $i$   $\{\sigma^i(\Delta\lambda)\}$  peuvent être alors obtenues à partir de l'équation [24] :

$$\{\sigma^i\} = \{\sigma^0\} + [H_e] (\{\Delta\varepsilon\} - \Delta\lambda [P] \{\sigma^\alpha\}) \quad [25]$$

$$\{\sigma^\alpha\} = (1 - \alpha) \{\sigma^0\} + \alpha \{\sigma^i\} \quad [26]$$

ou encore :

$$\{\sigma^i\} = ([I] + \alpha \Delta\lambda [H_e] [P])^{-1} \left( ([I] - (1 - \alpha) \Delta\lambda [H_e] [P]) \{\sigma^0\} + [H_e] \{\Delta\varepsilon\} \right) \quad [27]$$

La déformation plastique équivalente peut s'exprimer aussi en fonction de  $\Delta\lambda$  selon l'équation [23] :

$$\overline{\varepsilon_p^i} = \overline{\varepsilon_p^0} + \Delta\lambda \left( \{\sigma^\alpha\}^T [P] \{\sigma^\alpha\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [28]$$

Ainsi, le critère de plasticité  $\Phi$  (équation [21]) devient une fonction de  $\Delta\lambda$ . La méthode de Newton-Raphson permet de trouver  $\Delta\lambda$  vérifiant le critère de plasticité. L'organigramme de l'algorithme implicite est présenté sur la figure 4.

A la convergence,  $\Delta\lambda$ ,  $\{\sigma^i\}$  et  $\overline{\varepsilon_p^i}$  sont obtenus. Notons que l'intégration de la plasticité s'effectue sur un pas (déformations cumulées depuis le début du pas), et non pas sur une itération afin d'éviter le problème de fausses décharges élastiques causées par les itérations d'équilibre.

L'algorithme d'intégration plastique ci-après permet de tenir compte de l'historique du chargement, tout particulièrement les effets de cambrage-décambrage subis par la tôle, du fait de son glissement sur le rayon d'entrée matrice. La prise en compte de ces effets est essentielle pour l'estimation des contraintes et la simulation du retour élastique.

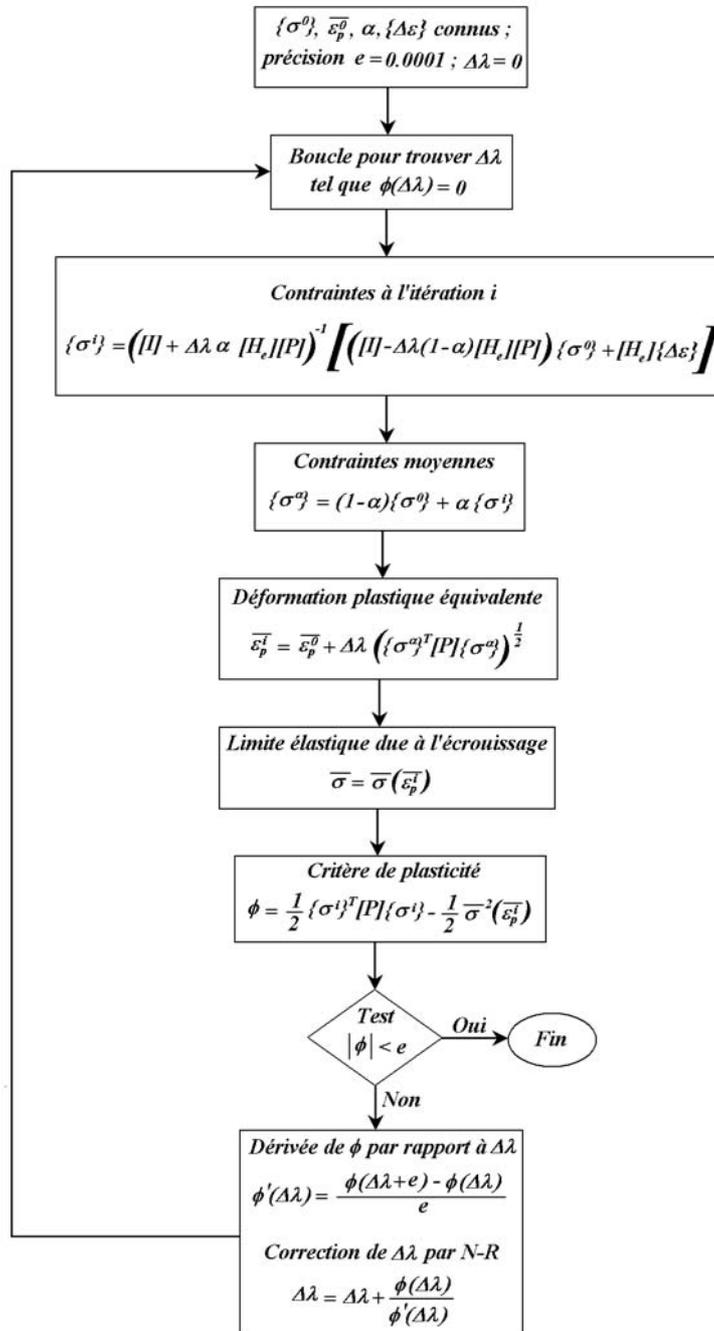


Figure 4. Algorithme du retour radial

### 3.3. Transfert du champ de contraintes entre deux configurations

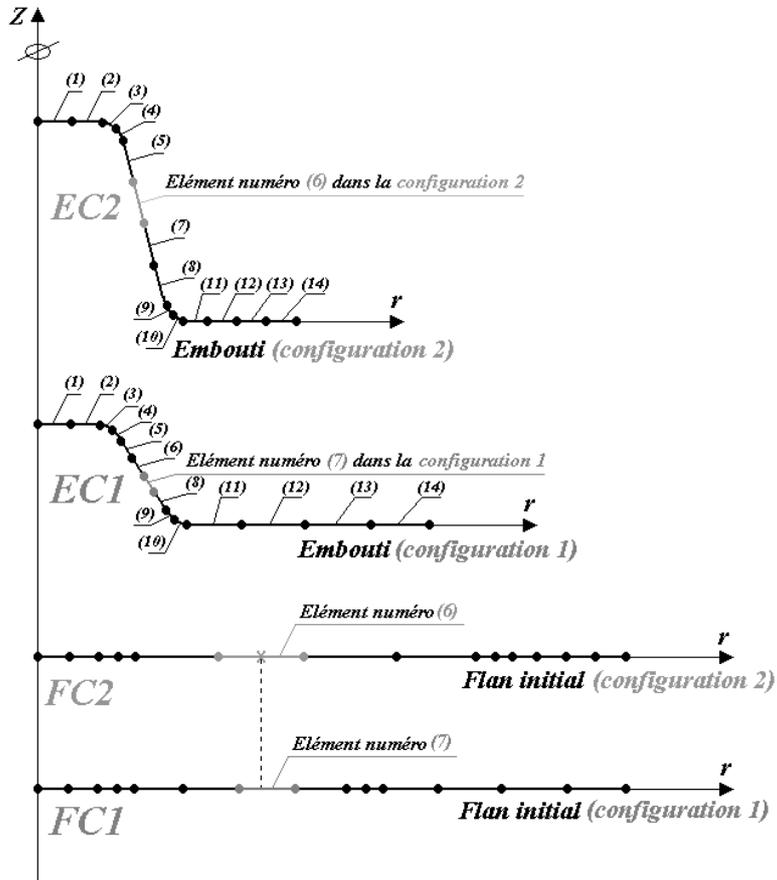
Dans la section 3.1, nous avons présenté une méthode géométrique pour générer des maillages intermédiaires, représentant les formes de la tôle à différentes positions du poinçon. Ces maillages sont complètement indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'un nœud  $i$ , appartenant à deux maillages intermédiaires, ne représente pas le même point matériel. Il est donc nécessaire d'effectuer un transfert de champs, permettant de dresser un tableau de correspondance entre les éléments appartenant à deux configurations intermédiaires successives. A partir d'un de ces maillages, le calcul inverse donne la position initiale de chaque nœud dans le flan. C'est cette position qui représente un vrai point matériel et permet de trouver l'historique de déformations et de contraintes.

Prenons par exemple deux configurations successives d'un godet axisymétrique maillé par éléments tronconiques (figure 5). Les maillages sont générés par minimisation de la longueur de la tôle sous limitations géométriques des outils. Les positions des nœuds sur la partie utile de la pièce (éléments n° : **1**, **2**, ..., **10**) resteront inchangées au cours des itérations d'équilibre du calcul inverse. La partie sous serre-flan (éléments **11**, **12**, **13**, **14**) supposée connue au début du calcul est modifiée au cours des itérations pour respecter les dimensions données du flan. Ceci est assuré par la technique de relocalisation des nœuds appliquée aux nœuds sous serre-flan (Duroux, 1992). Les seuls nœuds de l'embouti qui changent de position au cours du calcul, sont ceux appartenant aux éléments **11**, **12**, **13** et **14** (voir figure 5).

Considérons un calcul inverse à deux pas (figure 5). Au premier pas, le maillage de l'embouti **ECI** permet d'obtenir le maillage du flan **FCI** ainsi que les déformations et contraintes dans **ECI**. A une itération du deuxième pas, le maillage **EC2** permet d'obtenir le maillage **FC2**. Si on veut connaître l'historique de l'élément **6** (dans **EC2**), on cherche sa position initiale dans **FC2** et on trouve que cette position correspond à l'élément **7** dans **FCI**. Ainsi, on peut utiliser les informations de l'élément **7** au premier pas (**ECI**) pour calculer les déformations et contraintes de l'élément **6** au deuxième pas (équations 25 à 27). Notons qu'une discrétisation grossière peut introduire des erreurs dans ce transfert d'informations.

## 4. Résultats numériques

Les deux tests suivants permettent d'évaluer notre API et étudier l'influence du nombre de pas de calcul sur les états de contraintes. Ils concernent les godets axisymétriques dits de Brunet et Demeri par simplification.



**Figure 5.** Transfert de champs d'une configuration à une autre

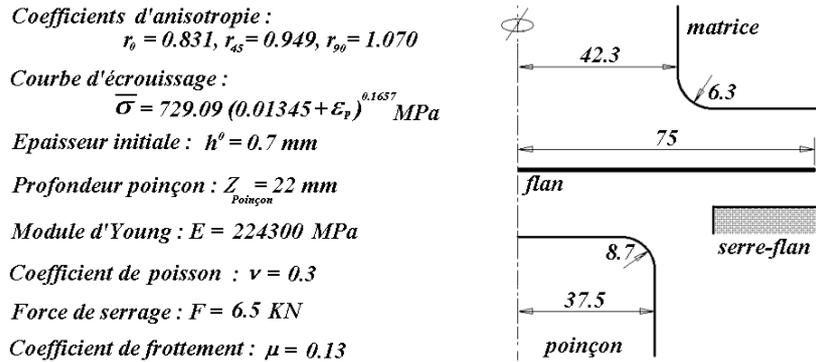
#### 4.1. Godet axisymétrique (Brunet)

Ce test a été proposé et étudié par Arrieux, Boivin, Brunet, Hage, Chehade et Sabourin (Hage *et al.*, 1990 ; Arrieux *et al.*, 1992 ; Brunet *et al.*, 1993 ; Brunet *et al.*, 1996). Les caractéristiques du matériau (acier anisotrope XD340) et géométriques sont présentées sur la figure 6.

La discrétisation du problème a été effectuée pour une profondeur de poinçon de 22 mm. Le profil méridien du godet a été discrétisé en 60 éléments tronconiques de coque.

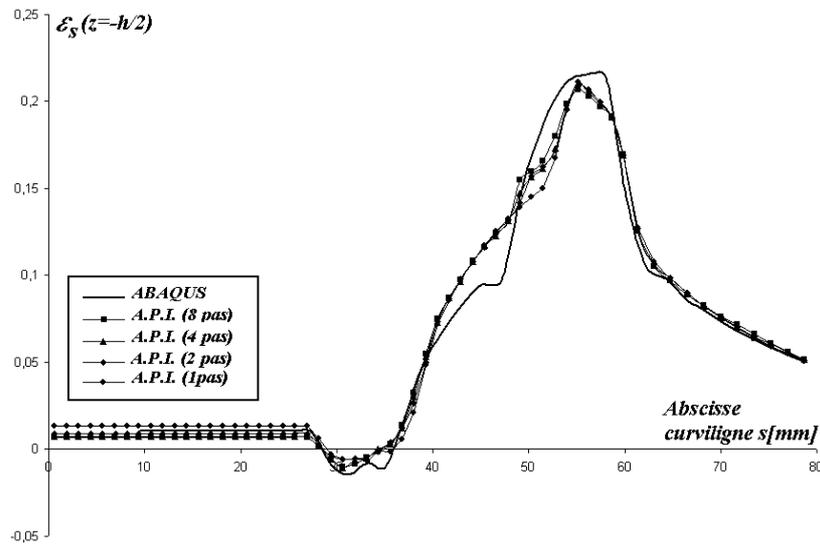
Pour montrer les performances de notre nouvelle approche inverse à plusieurs pas, nous avons lancé des calculs à un, deux, quatre et huit pas et nous avons

confronté les résultats avec ceux obtenus avec le même type d'élément (SAXI) du logiciel ABAQUS standard (approche incrémentale utilisant un algorithme statique implicite). Notons que l'API en un pas est identique à l'AI classique.



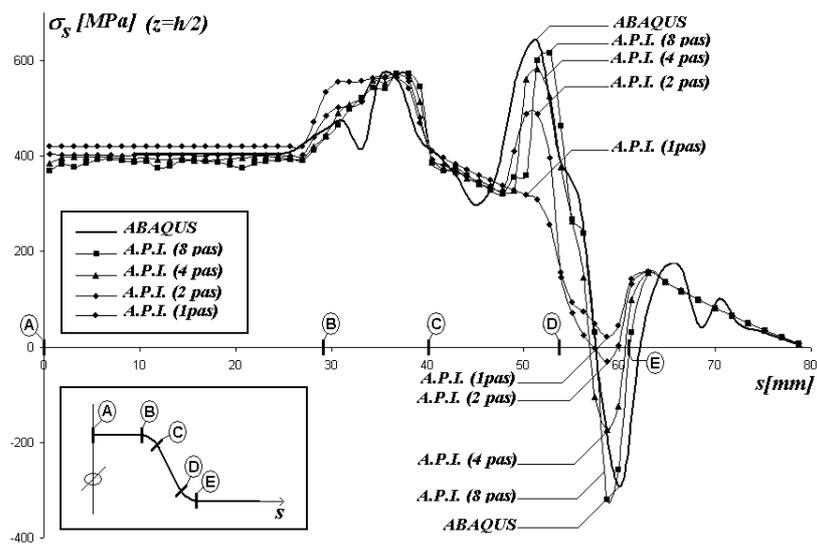
**Figure 6.** Description géométrique et mécanique du godet axisymétrique de Brunet

Si l'on s'intéresse d'abord aux distributions des déformations (figure 7), nous remarquons que les courbes de notre API sont très proches de la courbe obtenue par ABAQUS standard (quel que soit le nombre de pas) : l'AI classique (ou l'API à un pas) est suffisamment précise en déformations.



**Figure 7.** Distribution des déformations radiales sur la fibre inférieure

Les courbes de contraintes sont représentées sur la figure 8. Nous remarquons que le pic de contrainte sur le rayon de poinçon ( $30\text{ mm} < s < 40\text{ mm}$ ) est détecté par l'API quel que soit le nombre de pas utilisés car la tôle dans cette zone n'a subi qu'une flexion sans effet de décambrage. Par contre, le pic sur le brin libre à la sortie du rayon matrice ( $s \approx 50\text{ mm}$ ) a nécessité huit pas pour être détecté. Ceci s'explique par le fait que les contraintes résiduelles formées dans cette dernière région sont dues aux effets de cambrage-décambrage subis par la tôle lors de son passage sur le rayon d'entrée matrice. Ces pics de contraintes ne peuvent donc être détectés que par la prise en compte de l'historique de déformations.



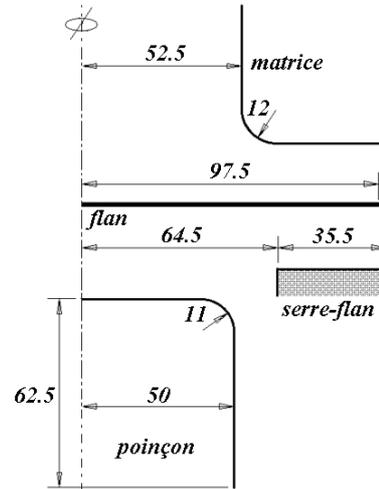
**Figure 8.** Distribution des contraintes radiales sur la fibre supérieure

#### 4.2. Godet axisymétrique (Demeri)

Cet exemple a été proposé et étudié expérimentalement et numériquement par M. Demeri du laboratoire de la compagnie Ford (Demeri *et al.*, 2000). Il consiste en un test très complet comprenant une opération de mise en forme, suivie d'une opération de découpage. Nous ne nous intéresserons dans ce qui suit qu'à la partie emboutissage du test.

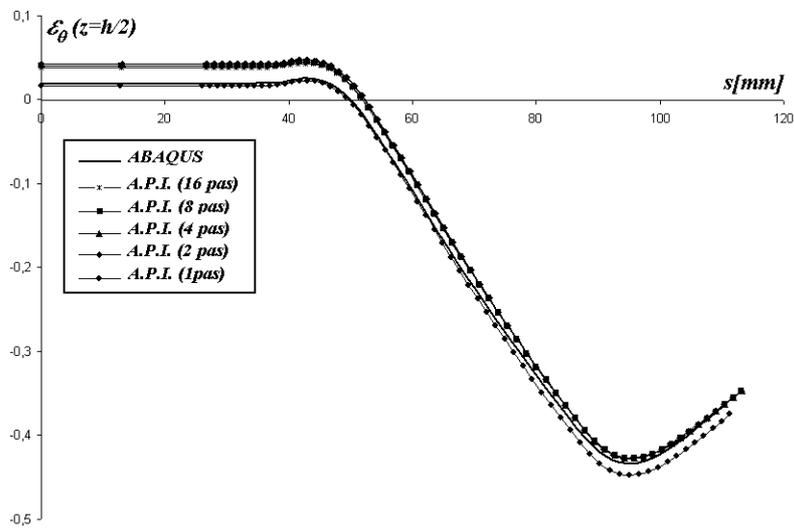
Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données sur la figure 9. La tôle est maillée en 60 éléments axisymétriques de coque.

Coefficients d'anisotropie :  $r_\theta = r_{45} = r_{90} = 0.64$   
 Courbe d'écroutissage :  $\bar{\sigma} = 488.01 \varepsilon^{0.232} \text{ MPa}$   
 Epaisseur initiale :  $h^0 = 1.6 \text{ mm}$   
 Profondeur poinçon :  $Z_{\text{Poinçon}} = 56 \text{ mm}$   
 Module d'Young :  $E = 69000 \text{ MPa}$   
 Coefficient de poisson :  $\nu = 0.33$   
 Densité :  $\rho = 2.65 \cdot 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$   
 Force de serrage :  $F = 30 \text{ KN}$   
 Vitesse poinçon :  $V_{\text{Poinçon}} = 5 \text{ m/s}$   
 Limites élastiques :  $Re_\theta = Re_{45} = Re_{90} = 109.3 \text{ MPa}$   
 Coefficient de frottement :  $\mu = 0.12$



**Figure 9.** Description géométrique et mécanique du godet de Demeri

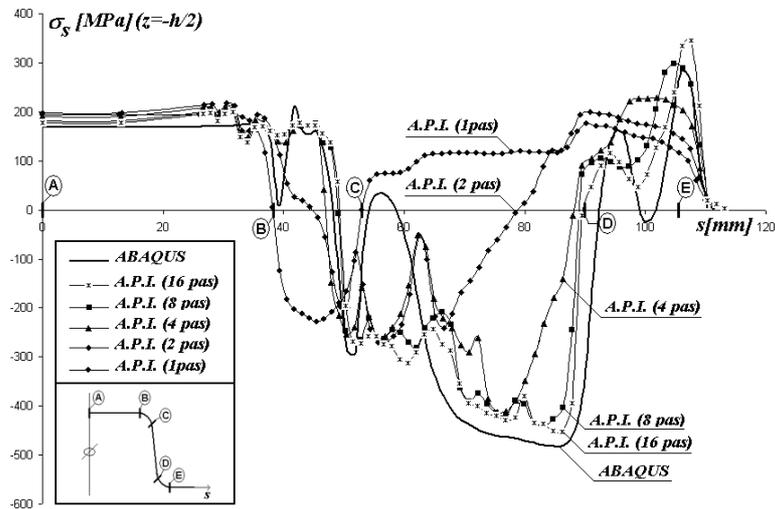
Concernant les distributions de déformations (figure 10), nous remarquons que les résultats de l'API sont assez proches de ceux obtenus avec ABAQUS standard. De plus, nous remarquons qu'en passant de un à seize pas de calcul, les allures des courbes restent très proches entre elles.



**Figure 10.** Distribution des déformations circonférencielles sur la fibre supérieure

Si nous ne nous intéressons qu'à ces résultats, il nous paraîtrait presque inutile de rajouter des pas intermédiaires à une approche inverse qui est assez performante en un seul pas de calcul.

La situation est complètement différente pour les distributions de contraintes (figure 11). En effet, comme pour le test précédent (Brunet), l'approche inverse à un seul pas donne dans certaines régions de la tôle des résultats très éloignés de ceux obtenus par ABAQUS standard. La région où cette différence est la plus flagrante est celle comprise entre les deux rayons (poinçon et matrice). Puisque le godet de Demeri est assez profond, ce n'est plus un pic de contrainte non détecté, mais une région de 40 mm de hauteur environ. Chaque élément de cette région a subi un effet de cambrage-décambrage, cumulant ainsi des déformations plastiques qui affectent directement les états de contraintes.



**Figure 11.** Distribution des contraintes radiales sur la fibre inférieure

Pour essayer de mieux comprendre la raison d'une telle différence de contraintes dans cette région, nous proposons d'étudier l'historique d'un élément de la bande en question, qui se trouve à la position  $s \approx 87$  mm. Sur la figure 12 sont représentées les positions qu'emprunte cet élément pour cinq profondeurs de poinçon différentes.

Si l'on s'intéresse d'abord aux évolutions des déformations en fonction de la profondeur de poinçon (figure 13), nous remarquons que plus on augmente le nombre de pas de calcul dans notre approche pseudo inverse, plus on s'approche de la courbe obtenue avec ABAQUS standard, avec une stabilisation des résultats à partir d'environ 16 pas. Bien que ces courbes présentent des allures assez différentes, nous remarquons qu'elles aboutissent toutes, en fin de course du poinçon

( $Z_{\text{poinçon}} = 56 \text{ mm}$ ), à une valeur de déformation très proche de celle obtenue par ABAQUS standard. Cela est dû au fait que les déformations finales dépendent essentiellement des positions finales des points matériels et qu'elles ne sont que peu influencées par l'historique du chargement.

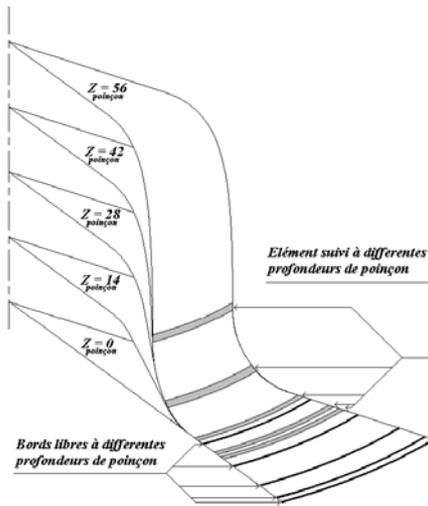


Figure 12. Suivi de l'historique d'un élément à différentes profondeurs

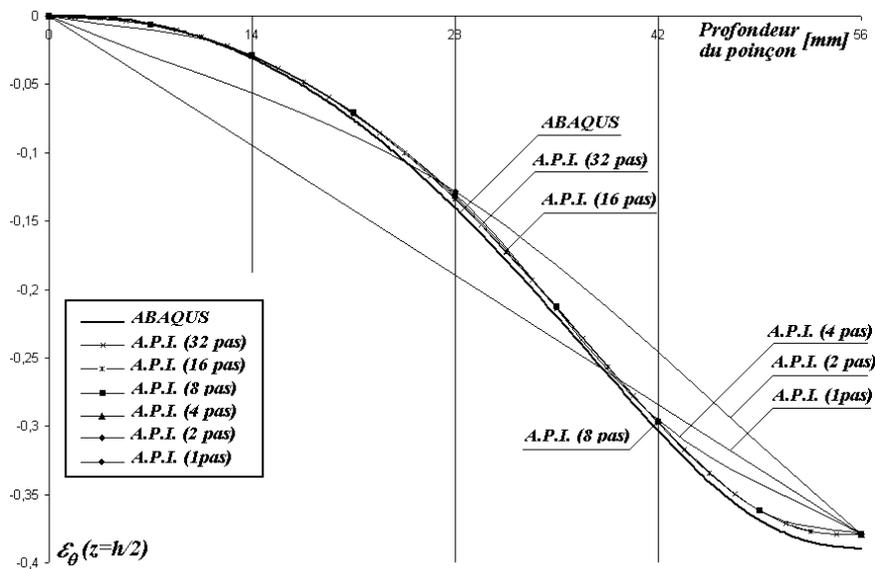
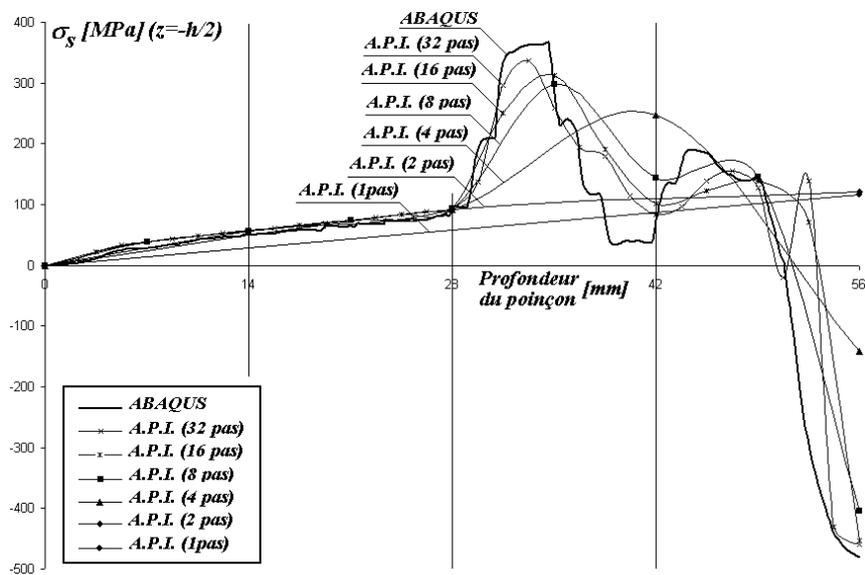


Figure 13. Historiques des déformations circonférentielles sur la fibre supérieure

En analysant les courbes de contraintes (figure 14), nous nous apercevons que les valeurs en fin de course sont très dépendantes du nombre de pas. Pour mieux comprendre la raison de cela, focalisons-nous d'abord sur la partie allant de  $Z_{\text{poinçon}} = 0$  mm à 28 mm (première moitié de la course du poinçon) ; si le calcul devait s'arrêter là, nous aurions pu nous contenter d'un seul pas, car toutes les courbes sont confondues, à peu de chose près, jusqu'à  $Z_{\text{poinçon}} = 28$  mm. Cela est dû au fait qu'à cette position du poinçon, l'élément considéré n'est pas encore entré dans le rayon d'entrée matrice (voir figure 12) ; il n'a fait jusque-là que glisser sous serre-flan, subissant des effets « proportionnels » dans le temps.



**Figure 14.** Historiques des contraintes radiales sur la fibre inférieure

Dans la partie allant de  $Z_{\text{poinçon}} = 28$  mm à 56 mm (deuxième moitié de la course du poinçon), l'élément parcourt le rayon d'entrée matrice puis en sort, subissant des effets de cambrage-décambrage qui altèrent l'hypothèse de proportionnalité du chargement. C'est pour cette raison que dans cet intervalle les courbes de contraintes sont très dépendantes du nombre de pas, créant sur la configuration finale des différences de résultats qui peuvent aller de 124 % d'erreur pour le calcul à 1 pas à 4 % d'erreur pour le calcul à 32 pas par rapport à ABAQUS.

## 5. Conclusion

Des améliorations concernant l'évaluation des états de contraintes ont été introduites dans l'approche inverse. Des configurations intermédiaires « réalistes »

ont été déterminées par une procédure de minimisation et ont été introduites pour prendre en considération un comportement dépendant du chemin parcouru. La théorie d'écoulement de plasticité a été adoptée pour l'intégration plastique. Un algorithme d'intégration appelé « algorithme du retour radial » a permis d'obtenir une bonne estimation des états de contraintes. Les résultats numériques ont montré une bonne concordance avec ceux obtenus avec le logiciel industriel ABAQUS en utilisant un temps de calcul nettement réduit. Les opérations de transfert de champs sont nécessaires entre deux configurations en perturbant quelque peu le processus itératif. La génération d'une bonne solution initiale garantit une convergence quasi systématique.

#### Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le Pôle régional de modélisation de Picardie pour son soutien financier, ainsi que M. Demeri et M. Lou de Ford Laboratory Dearborn, Michigan, Etats-Unis, pour les informations communiquées concernant le test dit de Demeri.

#### 6. Bibliographie

- Abaqus, *ABAQUS user's manual - version 6.2*, Etats-Unis, Edition HKS, 2001.
- Arrieux R., Boivin M., « Détermination théorique du diagramme des contraintes limites de formage : Application aux matériaux anisotropes », *European Journal Mech. Eng.* vol. 37, 1992, p. 89-96.
- Batoz J.L., Guo Y.Q., Duroux P., Detraux J.M., "An efficient algorithm to estimate the large strain in deep drawing", *NUMIFORM'89*, Fort Collins, Colorado, 26-30 June 1989, Balkema Editeur, p. 383-388.
- Batoz J.L., Dhatt G., « Modélisation des structures par éléments finis », *Coques*, Vol. 3, Paris, Hermès, 1992.
- Batoz J.L., Narainen R., Duroux P., Guo Y.Q., "Comparison of the implicit, explicit and inverse approaches for the estimation of the strain distribution in axisymmetrical thin sheet", *4<sup>th</sup> Int. Conf. on The Technology of Plasticity*, Beijing, 5-12 sept., 1993, p. 1695-1699.
- Batoz J.L., Guo Y.Q., Mercier F., "The inverse approach with simple triangular shell elements for large strain predictions of sheet metal forming parts", *Engineering Computations*, vol. 15, n° 7, 1997, p. 864-892.
- Brunet M., Sabourin F., "A simplified triangular shell element with necking criterion for 3D sheet forming analysis", *Proceedings of NUMISHEET'93*, 1993, p. 229-238.
- Brunet M., Sabourin F., "Simulation of necking using damage mechanics in 3-D sheet forming analysis", *NUMISHEET'96 3<sup>rd</sup> International Conf. on Numerical Simulation of*

*3-D Sheet Forming Processes*, Dearborn, Michigan, Etats-Unis, 29 September-3 October 1996.

- Choudhry S., Lee J.K., "Numerical simulation of sheet metal forming processes including bending effects", in *D. R. Duraham and A. Saigal (Eds.), Microstructural Development and Control in Material Processing*, MD-vol. 14, ASME, 1989, p. 11.
- Demeri M.Y., Lou M., Saran, M.J., "A benchmark test for springback in sheet metal forming", *International Body Engineering Conference & Exhibition (IBEC)*, Cobo Center, Detroit, Michigan, Etats-Unis, October 3-5, 2000.
- Duroux P., Evaluation numérique des déformations dans les tôles embouties, Thèse de doctorat, UTC, 1992.
- Gardiner F., "The springback of metals", *Trans. of ASME, J. of Eng. Ind.*, 1957, p. 1-9.
- Gati W., Guo Y.Q., Naceur H., Batoz J.L., "An efficient Pseudo Inverse Approach for stress evaluation in sheet forming modeling", *NUMISHEET 2002, 5<sup>th</sup> Int. Conf. and Workshop on Num. Simulation of 3D Sheet Forming Processes*, Jeju(Cheju) Island, Korea, October 2002, p. 21-25.
- Gati W., Approche Pseudo Inverse pour simulations rapides du procédé d'emboutissage et de retour élastique des pièces en tôles minces, Thèse de doctorat, UTC, 2002.
- Gelin J.C., Picart P., Eds. *Proceedings of Numisheet'99, 4<sup>th</sup> Int. Conf. and Workshop on Num. Simulation of 3D Sheet Forming Process*, Besançon, sept. 1999.
- Guo Y.Q., Batoz J.L., Detraux J.M., Duroux P., "Finite element procedures for strain estimations of sheet metal forming parts", *Proc. I.J.N.M.E.*, vol. 30, 1990, p. 1385-1401.
- Guo Y.Q., Batoz, J.L., Bouabdallah S., Naceur. H., "Recent developments on the Analysis and Optimum Design of Sheet Metal Forming Parts using a Simplified Inverse Approach", *Int. J. for Computers and Structures*, vol. 78, 2000, p. 133-148.
- Guo Y.Q., Gati W., Naceur H., Batoz J.L., "An efficient DKT rotation free shell element for springback simulation in sheet metal forming", *To appear in International Journal for Computers and Structures*, 2002.
- Hage Chehade I., Boivin M., "Tôles pour emboutissage, caractérisation par les courbes limites en contraintes", *Matériaux et techniques*, juin 1990.
- Hu X.B., Algorithmes de résolutions pour la simulation de l'emboutissage par l'approche inverse, Thèse de doctorat, UTC, mai 1997.
- Lemaitre J., Chaboche J. L., *Mécanique des matériaux solides*, Paris, Ed. Dunod, 1985.
- Naceur H., Contribution à l'optimisation de structures minces en présence de non linéarités géométriques et matérielles, Thèse de doctorat, UTC, 1998.
- Naceur H., Guo Y.Q., Gati W., "New enhancement in the Inverse Approach for the fast modeling autobody stamping process", *International Journal of Computational Engineering Science*, IJCES 020709, 2002.
- Narainen R., Comparaison de trois méthodes de calcul pour la simulation de l'emboutissage des tôles axisymétriques, Thèse de doctorat, UTC, 1993.

Peric D., Owen R.J., Honnor M.E., "Simulation of thin sheet metal forming processes employing a thin shell element", *F. E. Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes in Automotive Industry*, Zurich, May 1991, p. 569-600.

Simo J.C., Fox D.D., Rifai M.S., "Formulation and computation aspects of a stress resultant geometrically exact shell model", *Computational Mechanics 88 - Theory and applications. Proc. Int. Conf. on Comput. Eng. Science*, Atlanta, April 1988.

Stoughton T.B., "Finite element modeling of 1008 AK sheet steel stretched over a rectangular punch with bending effects", in *Computer Modeling of Sheet Metal Forming Process*, Edited by Wang and Tang, The Metallurgical society, 1985, p. 143-159.

Wang N.M., Tang S.C., "Analysis of bending effects in sheet forming operations", *Int. J. Num. Meth. Eng.* 25, 1, 1988, p. 253-267.