

---

# Modélisation des murs porteurs en béton armé par éléments finis multicouches

**Belmouden Youssef — Elharif Abderrahmane**

*Laboratoire de Mécanique et des Matériaux-L.M.M.  
Avenue des Nations unies  
BP 8147 – Rabat  
Maroc  
Byoussef2002@hotmail.com*

---

*RÉSUMÉ. Cet article présente un modèle élément fini unidimensionnel pour la modélisation des structures bidimensionnelles en béton armé, formulé sur la base de la méthode des flexibilités. Il est composé d'un élément fini poutre multicouche et d'éléments interfaces multicouche. Le modèle est ensuite utilisé pour simuler le comportement cyclique d'un mur porteur en béton armé dimensionné en capacité vis-à-vis des secousses sismiques. La corrélation essai-simulation numérique montre une bonne approche du comportement non linéaire global, des distorsions et de l'effet du glissement d'adhérence dans les zones critiques du mur porteur.*

*ABSTRACT. This paper presents a one-dimensional flexibility-based finite element model for two-dimensional reinforced concrete structures. It is decomposed into a fiber beam element and interface fiber connection hinges. The model is then used to simulate the static-cyclic behaviour of a reinforced concrete structural wall designed using the capacity design method for seismic actions. The correlation study of analytical results with experimental evidence show very good agreement in simulating global non-linear response, shear deformations, and the fixed end rotation due to bond slip effect in the critical regions in the structural wall.*

*MOTS-CLÉS: élément fini multicouche, méthode des flexibilités, mur porteur, béton armé, analyse cyclique non linéaire, glissement d'adhérence, distorsion, ductilité, modèle trilinéaire, dimensionnement en capacité.*

*KEYWORDS: fiber finite element, flexibility-based method, structural wall, reinforced concrete, cyclic non linear analysis, bond slip deformation, shear deformation, ductility, trilinear model, capacity design method.*

---

## 1. Introduction

Dans le dimensionnement des structures en béton armé vis-à-vis des secousses sismiques, les codes modernes du calcul parasismique confèrent à ces structures un comportement clairement non linéaire avec des déformations inélastiques importantes dans des zones critiques prédéfinies en cherchant un comportement d'ensemble qui est ductile et dissipatif de l'énergie injectée par les séismes.

Dans ce travail, on s'intéressera à un système de contreventement par voiles ou murs porteurs en béton armé qui assurent la transmission des forces verticales (rôle porteur vis-à-vis des charges verticales) et horizontales (résistance aux forces sismiques), ce système a prouvé ces dernières années son efficacité à la résistance aux séismes et par conséquent il est largement adopté dans plusieurs pays européens (France, Suisse...). Leur principal avantage sur les ossatures est qu'ils limitent les déformations relatives et protègent ainsi l'intégralité des éléments non structuraux en jouant le rôle de stabilisateur de l'édifice, et sont aussi moins sensibles à une exécution pas tout à fait conforme aux exigences du projet.

Leur conception se base sur l'idée de placer la base du mur dans un état de non-linéarité prononcée en gardant le reste dans un état de linéarité (Eurocode 8, 1997).

La complexité du comportement de ces murs, compte tenu de leur mode de fonctionnement qui met en évidence l'importance de l'effort tranchant par rapport à la flexion, nous a conduit à présenter un modèle élément fini semi-local. Le modèle est basé sur l'approche qui consiste à identifier puis à isoler les mécanismes de déformations principaux (D'ambrisi *et al.*, 1999) tels que les distorsions et l'effet du glissement d'adhérence puis à les modéliser individuellement, de sorte que le modèle global rende compte de leurs effets et de leur interaction dans le comportement hystérétique des structures.

## 2. Élément fini béton armé

Le modèle élément fini béton armé présenté dans cette étude est basé sur la formulation par la méthode des forces ou des flexibilités (Zeris, Mahin, 1991, Spacone *et al.*, 1996) et se décompose en :

– un élément fini poutre multicouche à distribution des non-linéarités de flexion et de cisaillement dans le sens longitudinal à travers des segments de poutres et dans le sens transversal par des couches superposées. Sa formulation basée sur la méthode de forces par une interpolation exacte des efforts internes, annule l'erreur de discrétisation généralement rencontrée dans les éléments finis basés sur la méthode des déplacements (Neuenhofer, Filippou 1997), ce qui résout les problèmes de localisation et d'instabilité dans les zones critiques fortement non linéaires et au voisinage de la rupture lorsque les sollicitations varient très peu alors que les déplacements et les déformations augmentent considérablement,

– deux éléments finis interface multicouche placés aux extrémités de l'élément fini poutre, capables de tenir compte de l'effet de l'interaction effort normal/moment fléchissant, ils servent à la modélisation des phénomènes localisés dans les jonctions poutre-poteaux, poteaux ou murs-fondations ainsi que les phénomènes du type glissement.

### 2.1. Élément fini poutre multicouche

L'élément poutre multicouche est un élément fini unidimensionnel à 2 nœuds et 6 degrés de libertés (3 degrés de liberté par nœud) tels que les déplacements nodaux sont exprimés dans le repère local (O,x,y) par le vecteur  $\{u^e\} = \{u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j\}^t$  et les efforts extérieurs nodaux auxquelles est soumise la poutre par  $\{F^e\} = \{N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j\}^t$ .

Le modèle adopte l'approche de type TIMOSHENKO, avec l'hypothèse des petites perturbations pour laquelle le produit de gradients de déplacement (terme du second ordre : non-linéarité géométrique) est négligé. Le champ des déplacements et des déformations résultantes est :

$$\bar{U}(M) = \begin{cases} U_x(x, y) = U_0(x) - y\theta_z(x) \\ U_y(x, y) = V_0(x) \end{cases}$$

Où :  $U_0(x)$  et  $V_0(x)$  sont respectivement le déplacement suivant l'axe de référence Ox et Oy d'un point situé au plan moyen de la poutre,  $y$  est la distance par rapport à ce plan et  $\theta_z(x)$  la rotation autour de Oz (figure 1).

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{NN}(x) + y\kappa_z(x), \quad \gamma_{xy} = -\theta_z(x) + \frac{\partial V_0(x)}{\partial x}$$

où :  $\varepsilon_{NN}(x) = \frac{\partial U_0(x)}{\partial x}$  la déformation d'effort normal,  $\kappa_z(x) = -\frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x}$  la courbure,  $\varepsilon_{xx}$  et  $\gamma_{xy}$  sont respectivement la déformation axiale et la distorsion dans le plan (x,y).

#### 2.1.1. Méthode des flexibilités

Dans la méthode des forces, on calcule la matrice de flexibilité élémentaire (6x6) mais pour des raisons d'inversion de matrices, on procède à une élimination des modes rigides de déplacement appliquée aux équations d'équilibres (Neuenhofer, Filippou 1997), en adoptant le changement de variable suivant :

$$N_i + N_j = 0, T_i + T_j = 0, M_i = -M_j - T_j L$$

$$N^* = -N_i, T^* = T_i, M_i^* = M_i, M_j^* = M_j$$

On obtient un nouveau système à 3 degrés de liberté défini par le champ de sollicitations  $\{Q\} = \{N^*, M_i^*, M_j^*\}$  et le champ de déplacement correspondant  $\{q\}$  par l'application du théorème de Castigliano pour une poutre soumise au système de forces  $\{Q\}$  :

$$\{F^e\} = [T]^t \{Q\} \text{ et } \{q\} = [T] \{u^e\}$$

### 2.1.2. Formulation élément fini poutre multicouche

Partant du principe des travaux virtuels  $W_{ext}^{ptr} = W_{int}^{ptr}$  exprimé en forces et du principe de l'énergie complémentaire de déformation de la poutre on a :

$$W_{ext}^{ptr} = \{q\}^t \{\delta Q\} = \{Q\}^t [F_{lex}^{ptr}] \{\delta Q\}$$

$$W_{int}^{ptr} = \int_{V^{ptr}} \{\varepsilon(x, y, z)\}^t \{\delta \sigma(x, y, z)\} dV = W_{int}^{ptr}(flexion) + W_{int}^{ptr}(cisaillement)$$

Les efforts en tout points de l'élément poutre s'écrivent sous forme matricielle :

$$\{D(x)\} = [f(x)]^{-1} \{d(x)\} \text{ et } \{T(x)\} = [f_G(x)]^{-1} \{\gamma_{xy}(x)\}$$

avec :  $\{D(x)\} = \{N(x), M(x)\}^t$  et  $\{T(x)\}$  sont respectivement le vecteur de l'effort normal, du moment fléchissant et celui de l'effort tranchant appliqués à un segment,

$$\{d(x)\} = \{\varepsilon_{NN}(x), \kappa_z(x)\}^t \text{ le vecteur des déformations subies par un segment,}$$

$[f(x)]$  et  $[f_G(x)]$  sont respectivement la matrice de souplesse flexionnelle et de cisaillement d'un segment de poutre telle que :

$$[f(x)]^{-1} = \begin{bmatrix} \iint_{A(x)} E(x, y, z) dA(x) & \iint_{A(x)} E(x, y, z) y dA(x) \\ \iint_{A(x)} E(x, y, z) y dA(x) & \iint_{A(x)} E(x, y, z) y^2 dA(x) \end{bmatrix}$$

$$[f_G(x)]^{-1} = \left[ \iint_{S'(x)} G(x, y, z) dS'(x) \right]$$

Où :  $E(x, y, z)$  est le module de Young,  $G(x, y, z)$  le module d'élasticité transversale,  $A(x)$  l'aire d'une section et  $S'(x)$  la section réduite.

L'équilibre en tout point de la poutre en l'absence des charges réparties, est exprimé par les équations suivantes :

$$\{D(x)\} = [b(x)]\{Q\} \text{ et } \{T(x)\} = [C]\{Q\}$$

$$\text{Où : } [b(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{L} & -\frac{x}{L} \end{bmatrix} \text{ et } [C] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Finalement on peut écrire que :

$$W_{\text{int}}^{\text{ptr}}(\text{flexion}) = \{Q\}^t \left( \int_0^L [b(x)]^t [f(x)] [b(x)] dx \right) \{\delta Q\}$$

$$W_{\text{int}}^{\text{ptr}}(\text{cisaillement}) = \{Q\}^t \left( \int_0^L [C]^t [f_G(x)] [C] dx \right) \{\delta Q\}$$

La discrétisation longitudinale permet de découper la poutre en une série de tronçons de longueurs variables appelés segments au centre desquels sont définis les matrices de flexibilités  $f$  et  $f_G$ , par conséquent toutes les sections droites comprises dans un segment donné auront les mêmes propriétés géométriques, mécaniques et cinématiques (figure 1). Par contre, la discrétisation transversale permet de découper les sections en couches superposées en parallèle d'aire  $A_k$  et localisées par  $y_k$  indiquant la position de leurs centroïdes par rapport à la fibre moyenne (figure 1). Ainsi, chaque couche est constituée d'un même matériau et l'état de contraintes et déformations au milieu de chacune est pris comme représentatif de la couche entièrement. L'état d'une couche donnée  $k$  est défini par sa contrainte, sa déformation et son module en flexion  $(\sigma_k, \varepsilon_k, E_k)$  avec

$\sigma_k = \varepsilon_k E_k = (\varepsilon_{NN} + y_k \kappa_z) E_k$ , et par sa contrainte, sa déformation et son module de cisaillement  $(\tau_k, \gamma_k, G_k)$  avec  $\tau_k = G_k \gamma_k$ . On a :

$$[F_{lex}^{pir}(flexion)] = L \sum_{n=1}^{nsegments} \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} [b(\xi)]^t [f(\xi_m)] [b(\xi)] d\xi$$

$$[F_{lex}^{pir}(cisaillement)] = L \sum_{n=1}^{nsegments} \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} [C]^t [f_G(\xi_m)] [C] d\xi$$

avec :  $[f_G(\xi_m)]^{-1} = \left[ \sum_{k=1}^{nfibres} G_k(\xi_m) S'_k(\xi_m) \right]$  et  $S'_k(\xi_m) \leq A_k(\xi_m)$

$$[f(\xi_m)]^{-1} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{nfibres} E_k(\xi_m) A_k(\xi_m) & \sum_{k=1}^{nfibres} E_k(\xi_m) y_k(\xi_m) A_k(\xi_m) \\ \sum_{k=1}^{nfibres} E_k(\xi_m) y_k(\xi_m) A_k(\xi_m) & \sum_{k=1}^{nfibres} E_k(\xi_m) y_k^2(\xi_m) A_k(\xi_m) \end{bmatrix}$$

Où :  $\xi_m = \frac{x_n + x_{n-1}}{2L}$  la variable adimensionnelle du centre du segment délimité à gauche par  $x_{n-1} = \xi_{n-1}L$  et à droite par  $x_n = \xi_n L$ .

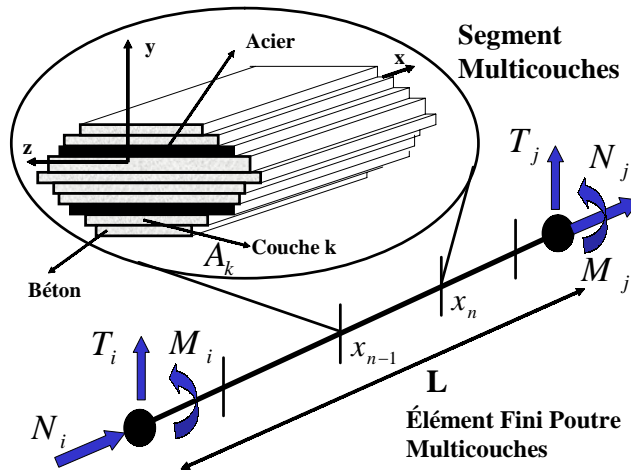


Figure 1. Discrétisation multicouche de l'élément fini poutre

## 2.2. Eléments interface multicouche

Ce sont des éléments finis à 2 degrés de liberté de longueurs nulles, placés aux extrémités de l'élément poutre aux nœuds I et J. Ils sont formulés comme précédemment sur la base de la méthode des forces permettant la prise en compte de l'interaction effort normal/moment de flexion avec distribution transversale des non-linéarités. Le principe des travaux virtuels  $W_{ext}^H = W_{int}^H$  exprimé en force appliqué aux éléments interface est tel que :

$$W_{ext}^H = \{q\}^t \{\delta Q\} = \{Q\}^t [F_{lex}^H] \{\delta Q\}$$

pour l'élément interface en I :  $W_{int}^{HI} = d(x^H = 0, y) \int_{A^{HI}} \{\delta \sigma(x = 0, y, z)\} dA^{HI}$

pour l'élément interface en J :  $W_{int}^{HJ} = d(x^H = L, y) \int_{A^{HJ}} \{\delta \sigma(x = L, y, z)\} dA^{HJ}$

Les sollicitations  $\{D^H\}$  et les déplacements  $\{d^H\}$  à l'interface sont :

$$\{D^H\} = [f^H]^{-1} \{d^H\} = [b(x^H)] \{Q\}, \quad \{d^H\} = \{(d_{NN})^H, (\theta_z)^H\}^t$$

Avec :  $d(x^H, y) = (d_{NN})^H + y(\theta_z)^H$  les déplacements en tous points à l'interface d'aire  $A^H$ ,  $(d_{NN})^H$  le déplacement unilatéral par rapport à l'axe de référence de l'élément de contact et  $(\theta_z)^H$  sa rotation où  $x^H = 0$  à l'interface au nœud I et  $x^H = L$  au nœud J.

Les matrices de flexibilités de l'élément interface gauche (HI) et droite (HJ) sont :

$$[F_{lex}^{HI}] = [b(x=0)]^t [f^{HI}(x=0)] [b(x=0)]$$

$$[F_{lex}^{HJ}] = [b(x=L)]^t [f^{HJ}(x=L)] [b(x=L)]$$

avec : (l'exposant H indique les éléments relatifs à la rotule gauche HI et droite HJ)

$$[f^H]^{-1} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{nfibresH} r_k^H A_k^H & \sum_{k=1}^{nfibresH} r_k^H y_k^H A_k^H \\ \sum_{k=1}^{nfibresH} r_k^H y_k^H A_k^H & \sum_{k=1}^{nfibresH} r_k^H (y_k^H)^2 A_k^H \end{bmatrix}$$

Où :  $r_k^H$  la raideur d'une couche à l'interface,  $A_k^H$  son aire et  $y_k^H$  sa position par rapport à l'axe moyen de la section. L'état d'une couche donnée  $k$  à l'interface est défini par sa contrainte, son déplacement unilatéral et sa raideur  $(\sigma_k^H, d_k^H, r_k^H)$  avec  $\sigma_k^H = d_k^H r_k^H = ((d_{NN}^H) + y_k (\theta_z)^H) r_k^H$ .

### 2.3. Matrice de rigidité et de flexibilité élémentaire

L'assemblage direct des éléments finis présentés ci-dessus permet d'obtenir l'élément fini béton armé de matrice de rigidité élémentaire exprimée par l'inversion de la sommation des différentes matrices de flexibilité relatives telle que :

$$[K^e] = [F_{lex}^e]^{-1} = ([F_{lex}^{plr}(flexion)] + [F_{lex}^{plr}(cisaillement)] + [F_{lex}^{HI}] + [F_{lex}^{HJ}])^{-1}$$

La matrice élémentaire globale est donc :

$$[IK^e] = [P]^t [T]^t [K^e] [T][P]$$

où :  $[P]$  est la matrice de passage géométrique du repère local au global.

### 2.4. Matériaux constitutifs et lois de comportement

Les structures en béton armé sont constituées d'un matériau composite acier + béton de comportements mécaniques différents modélisés par des modèles locaux intégrés aux couches sous forme de lois contraintes déformations de flexion  $(\sigma, \varepsilon)$  et de cisaillement  $(\tau, \gamma)$  pour l'élément poutre ou contraintes et déplacements  $(\sigma^H, d^H)$  pour les éléments interface. Ces lois sont linéarisées et définies en certains points. Le comportement de la couche est considéré linéaire entre deux points successifs. Cette approche permet de décomposer ces lois plus ou moins complexes en des modèles élémentaires simplifiés en parallèle, ce qui permet :



– une grande flexibilité dans l'utilisation des modèles en laissant la possibilité d'augmenter indéfiniment le nombre de points de définition des diagrammes en se basant soit sur un modèle analytique disponible (figure 13) ou de suivre directement les lois tirées des essais expérimentaux (figure 12),

– d'éviter le calcul itératif des contraintes et des déformations, très coûteux surtout dans les comportements à caractère adoucissant (procédé de calcul événement à événement), et l'utilisation des différents modèles dans une même structure, situation généralement rencontrée dans les structures en béton armé.

#### 2.4.1. Matériau béton pour l'élément poutre

Le comportement du béton adopté est le modèle élastique plastique à fissuration progressive (Plastic Fracturing Model) (Bazant *et al.* 79). Ce modèle associe les phénomènes de plasticité et de l'endommagement pour les sollicitations uniaxiales avec des déformations irréversibles dues essentiellement aux glissements, l'ouverture et la propagation d'un réseau de microfissures. Le modèle présente une dissymétrie de comportement entre traction et compression, à écrouissage non linéaire, couplé au modèle multicouche il permet le suivi de la fissuration : du matériau non dégradé (zone saine) passant par la microfissuration répartie (zone endommagée), de la fissuration en surface avec ponts de matière résistants dans la masse (zone endommagée-fissurée) jusqu'à atteindre la séparation totale de la matière avec annulation de la résistance (zone fissurée).

Les lois de décomposition du modèle non linéaire en  $nc$  modèles élémentaires en compression et  $nt$  modèles en traction sont :

$$\left(\varepsilon_y\right)_i = \varepsilon_i \text{ pour } 1 \leq i \leq nc \text{ (ou } i < nt),$$

$$\left(\varepsilon_u\right)_i = \varepsilon_{i+1} \text{ et } \left(\sigma_y\right)_i = \sigma_i - \sigma_{i+1} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1}} \text{ si } i < nc \text{ (ou } i < nt),$$

$$\text{avec : } \varepsilon_{nt+1} = \varepsilon_{nc+1} = \infty.$$

La définition d'un modèle élémentaire 'i' est la suivante : (figure 3)

$$\text{Si } \varepsilon < 0 \text{ ou } \varepsilon \geq \varepsilon_u \text{ alors } \sigma(\varepsilon) = 0,$$

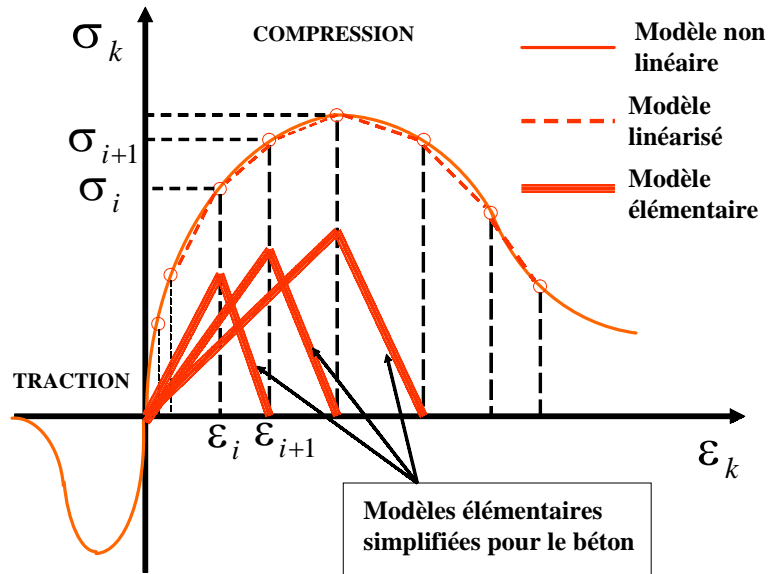
$$\text{Si } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_y \text{ alors } \sigma(\varepsilon) = \left( \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} \right) \varepsilon = E_y \varepsilon$$

$$\text{Si } \varepsilon_y \leq \varepsilon < \varepsilon_u \text{ alors } \sigma(\varepsilon) = \left( \frac{-\sigma_y}{\varepsilon_u - \varepsilon_y} \right) (\varepsilon - \varepsilon_u) = E_d (\varepsilon - \varepsilon_u)$$

$$\text{Si } \varepsilon_p \leq \varepsilon < \varepsilon_{\max} \text{ alors } \sigma(\varepsilon) = \left( \frac{\sigma'_y}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_p} \right) (\varepsilon - \varepsilon_p),$$

$$\text{Avec : } \sigma'_y = \sigma_y \left( \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_{\max}}{\varepsilon_u - \varepsilon_y} \right) \text{ et } \varepsilon_p = \varepsilon_{\max} - (E_y \sigma'_y + \alpha_d (\varepsilon_{\max} - E_y \sigma'_y))$$

$\alpha_d$  le facteur de dégradation du béton tel que :  $0 \leq \alpha_d \leq 1$ ,  $\sigma_y$  et  $\varepsilon_y$  sont respectivement la contrainte et la déformation limites élastiques,  $\varepsilon_u$  la déformation de fracture complète,  $\varepsilon_p$  la déformation plastique,  $\varepsilon_{\max}$  la déformation maximale atteinte en chargement.



**Figure 2.** Linéarisation et décomposition en modèles élémentaires parallèles

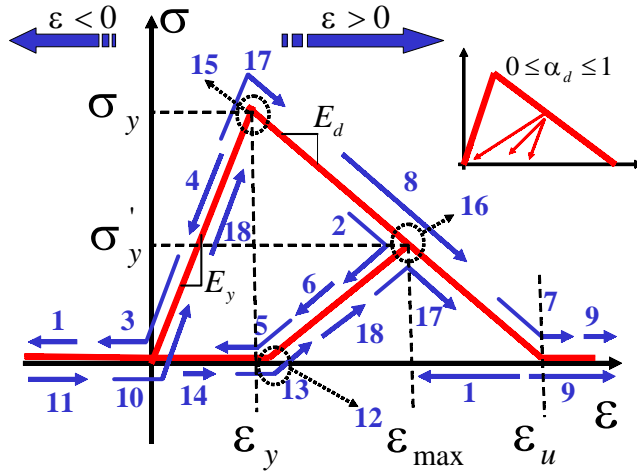


Figure 3. Comportement cyclique d'un modèle élémentaire 'i' en béton

L'état d'une sous-fibre donnée 'i' est défini par sa contrainte  $\sigma_c$ , sa déformation  $\epsilon_c$  et son module actuels  $E_c$ . L'algorithme d'implantation correspondant au comportement cyclique d'un modèle élémentaire sous un incrément de déformation  $\Delta\epsilon_c$  est donné dans les figures suivantes.

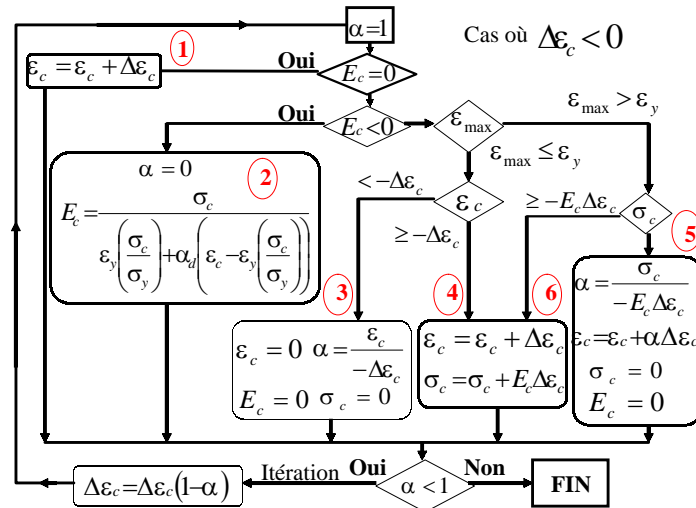


Figure 4. Comportement cyclique d'une sous-fibre 'i' en béton : cas où  $\Delta\epsilon_c < 0$

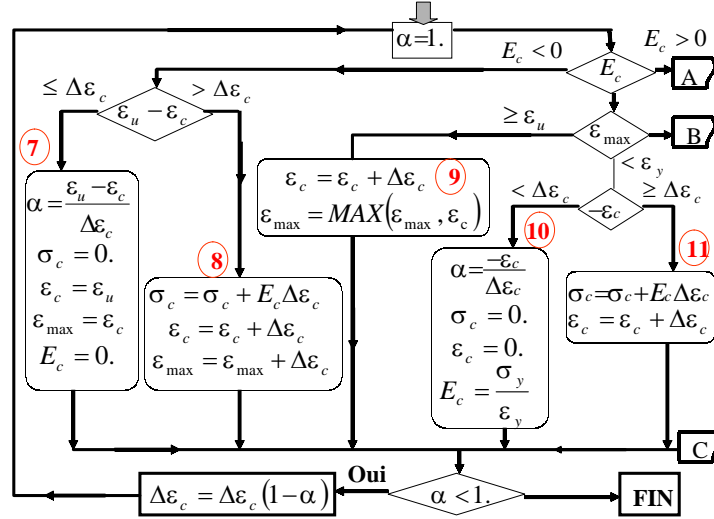


Figure 5. Comportement cyclique d'une sous-fibre 'i' en béton : cas où  $\Delta\varepsilon_c \geq 0$

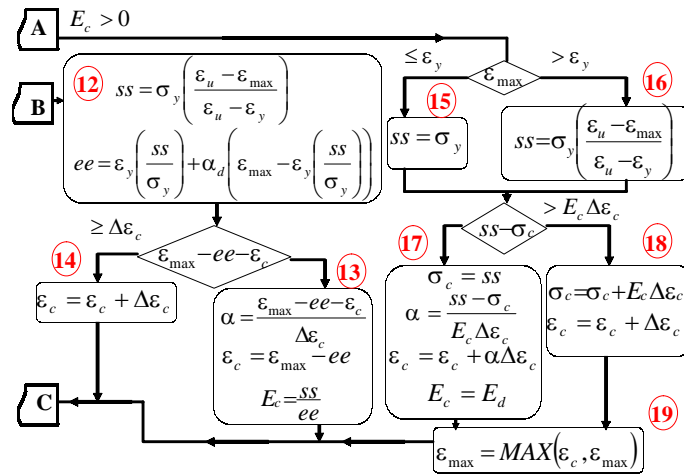


Figure 6. Comportement cyclique d'une sous-fibre 'i' en béton : cas où  $\Delta\varepsilon_c \geq 0$  (suite)

L'état d'une couche en béton sous l'incrément de déformation  $\Delta\varepsilon_k$  est obtenu par la superposition des états de chaque modèle élémentaire parallèles tel que :

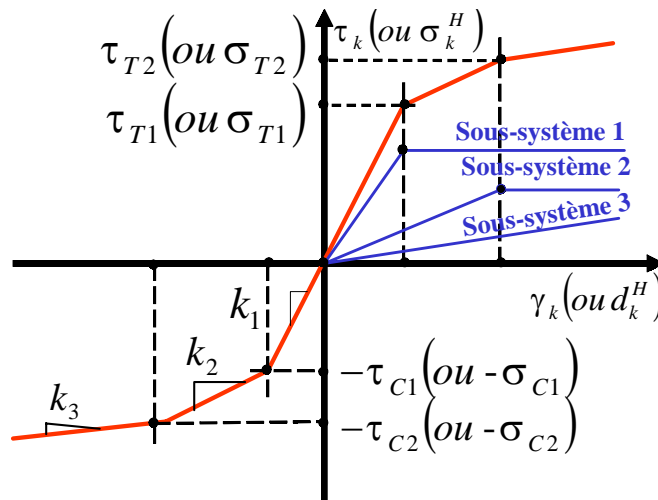
$$E_k = \sum_{i=1}^{nc} (E_c)_i + \sum_{i=1}^{nt} (E_c)_i, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k,$$

$$\sigma_k = -\sum_{i=1}^{nc} (\sigma_c (\Delta\varepsilon_c = -\Delta\varepsilon_k))_i + \sum_{i=1}^{nt} (\sigma_c (\Delta\varepsilon_c = \Delta\varepsilon_k))_i$$

#### 2.4.2. Matériau acier pour l'élément poutre

Le comportement de l'acier est modélisé par le modèle multicouche de Saint-Venant par un assemblage en parallèle de modèles élémentaires parfaitement élasto-plastiques de modules et de seuils différents, permettant de rendre compte d'un modèle à écrouissage cinématique non linéaire. Le contrôle de la superposition de ces modèles élémentaires définit implicitement l'évolution du critère de plasticité du modèle.

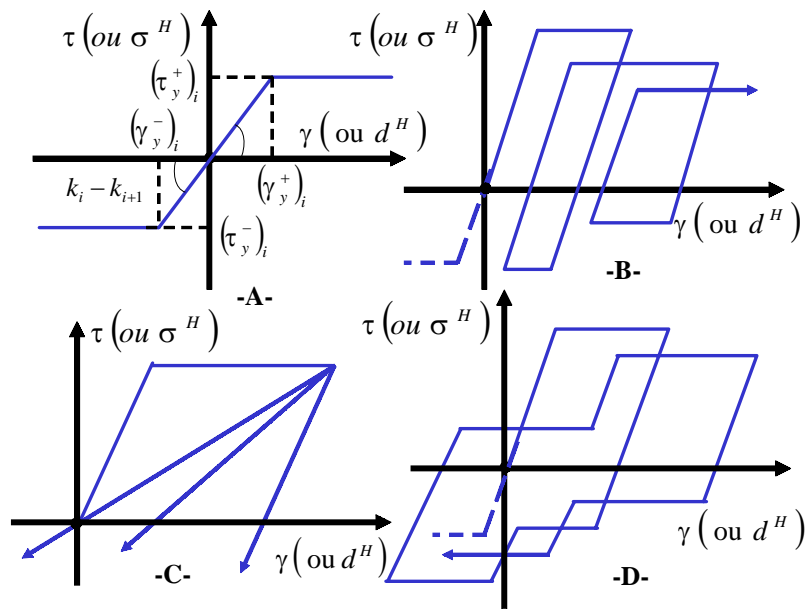
#### 2.4.3. Loi de comportement trilineaire



**Figure 7.** Modèle trilineaire et ses sous-systèmes élémentaires parallèles

Il s'agit d'un modèle de comportement trilineaire utilisé pour les éléments interface en terme de contraintes et déplacements  $(\sigma^H, d^H)$  et pour la modélisation de l'effet non linéaire de l'effort tranchant dans la poutre en termes de

contraintes et déformations de cisaillement  $(\tau, \gamma)$  (D'ambrisi *et al.*, 1999 ; Ramdan *et al.*, 1995). Le modèle est obtenu par la superposition de deux composants élasto-plastiques et d'un composant élastique linéaire pour la simulation de l'écroutissage positif ou négatif avec dégradation de la rigidité, détérioration de la résistance, du cumul de déformations irréversibles, et du comportement du type glissement capable de modéliser le processus d'ouverture et de refermeture des fissures de flexion (Flexural Cracks) ou de cisaillement (Shear Cracks). La superposition de toutes ces options permet d'obtenir des lois de comportements plus ou moins complexes.



**Figure 8.** Comportements d'un sous-système élastique plastique élémentaire. A- Définition d'un sous-système élastique plastique B- Détérioration de la résistance, C- Dégradation de la rigidité, D- Glissement et détérioration de la résistance

Les lois de décomposition en deux sous-systèmes élastiques plastiques sont :

$$(\tau_y^+)_i = \tau_{T_i} - (\tau_y^+)_{i-1} - (k_i - k_{i+1})(\gamma_y^+)_i \text{ et } (\gamma_y^+)_i = (\gamma_y^+)_{i-1} - \left( \frac{\tau_{T_i} - \tau_{T_{i-1}}}{k_i - k_{i+1}} \right),$$

$$\left(\tau_y^-\right)_i = -\left(\tau_{C_i} + \left(\tau_y^-\right)_{i-1} - (k_i - k_{i+1})\left(\gamma_y^-\right)_i\right) \text{ et } \left(\gamma_y^-\right)_i = \left(\gamma_y^-\right)_{i-1} - \left(\frac{\tau_{C_i} - \tau_{C_{i-1}}}{k_i - k_{i+1}}\right),$$

$$\text{Avec : } (i \leq 2), \tau_{C_2} > \tau_{C_1} > 0, \tau_{T_2} > \tau_{T_1} > 0, \left(\tau_y^\pm\right)_{i=0} = 0, \left(\gamma_y^\pm\right)_{i=0} = 0.$$

### 2.5. Analyse non linéaire de structures

L'élément fini béton armé est implanté dans le logiciel de calcul des structures bidimensionnelles DRAIN-2DX (Allahabadi, 1987 ; Allahabadi *et al.*, 1988 ; Prakash *et al.*, 1993). L'analyse non linéaire de structure est conduite par la méthode incrémentale de Newton Raphson avec le procédé de calcul itératif par « pas » de charges ou de déplacements imposés selon la technique d'ajustement événement à événement (Simons *et al.*, 1982 ; Taucer *et al.*, 1991 ; Filippou, 1992). La méthode définit des « sous-pas » dimensionnés de façon à pouvoir assimiler le comportement de la structure à une succession de comportements linéaires par morceaux.

Cette technique améliore considérablement le calcul des réponses anélastiques des structures comportant des non-linéarités de nature différente et surtout pour les problèmes fortement non linéaires en minimisant le risque de divergence ou de convergence vers des solutions inacceptables. Elle rend l'analyse indépendante de la solution initiale de chaque 'pas' et par conséquent de la taille des « pas » imposée.

L'adaptation de cette technique aux éléments finis multicouche passe par la linéarisation des lois de comportement associées aux couches en définissant des événements à l'échelle locale (matériau) jusqu'à l'échelle globale (structure). Le calcul itératif suppose une réactualisation des raideurs au niveau local et par suite celle des rigidités élémentaire et globale.

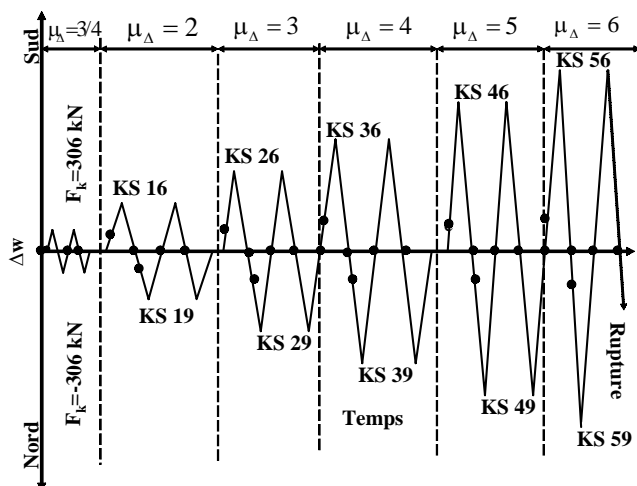
## 3. Calcul des murs porteurs en béton armé

La structure étudiée est un mur porteur en béton armé stabilisant un bâtiment de 20,40 m de hauteur et de 6 étages. Le mur est dimensionné en capacité (Capacity design method) conformément normes néo-zélandaises NZS3101 (Bachman *et al.*, 1998 ; Dazio *et al.*, 1999a) de telle façon que la structure soit décomposée en deux zones. Une zone plastique disposée et conçue constructivement pour former un mécanisme plastique approprié et suffisamment ductile. Une zone élastique pour le reste de la structure pourvu de résistance supplémentaire (capacité) pour rester élastique lorsque les zones plastiques développent leurs surrésistance pour une ductilité en déplacement de  $\mu_\Delta = 5$  (Paulay, Priestley, 1992), un coefficient de comportement  $q = 4$  (Eurocode 8, 1997), et une accélération du sol de 0,20 g dans un sol lâche.

Le spécimen expérimental de la structure étudiée est désigné par **WSH3** modélisant à l'échelle 1:2 la moitié inférieure du mur (figure 10). Il est testé sous chargement statique cyclique alterné aux laboratoires de l'institut de statique et structures (**IBK**) de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich (**EPFZ**) (Dazio *et al.*, 1999b).

#### 4. Prototype expérimental

Le prototype expérimental **WSH3** est un mur encastré dans un socle en béton armé, de 4,56 m de hauteur de section rectangulaire (2 m x 0,15 m), il est soumis à une charge normale du poids propre maintenue constante à  $P \cong 630$  kN, sous contrôle de charge durant la première séquence ( $\mu_{\Delta} = 0,75$ ) suivi d'un contrôle de déplacement jusqu'à la rupture (figure 9) (Dazio *et al.*, 1999a).



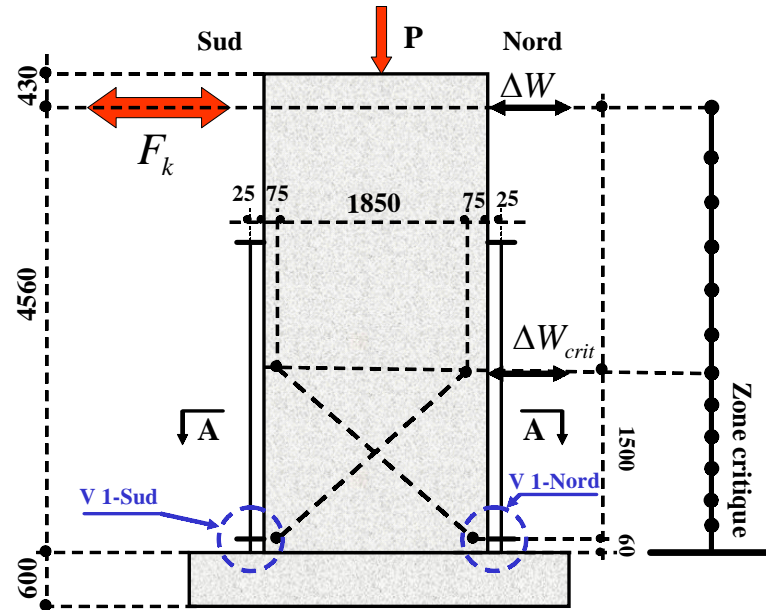
**Figure 9.** Programme du chargement cyclique alterné

Chaque séquence comprend 2 cycles complets, le second cycle fait partie des programmes usuels des essais cycliques car il permet de tenir compte de l'endommagement des éléments en béton armé qui est très important pour s'approcher d'une situation réelle. L'interprétation des essais est basée sur ce deuxième cycle car, un niveau de ductilité est accordé à un mur si et seulement si il supporte les deux cycles, sinon on admet qu'un tel mur ne pourra pas subir des séismes réels avec cette ductilité.

L'échelle 1:2 adoptée aux essais a permis l'utilisation des barres d'armatures verticales de construction normale de 6 et 12 mm de diamètre avec un taux de ferrailage total de 0,82 % (Bachman *et al.*, 1998). Les résistances du béton fournies



sont des résistances sur cylindre et sur cube, mais notre choix a porté sur les premières ( $\phi 150$  mm,  $H = 300$  mm) sur lesquelles se basent les normes néo-zélandaises outre le fait qu'elles représentent un paramètre bien meilleur que la résistance sur cube (Dazio *et al.*, 1999a).



**Figure 10.** Dimensions (mm) et positions des points de mesures utilisées (Dazio *et al.*, 1999b)

## 5. Modélisation et simulation

Le modèle élément fini adopté fonctionne en console parfaitement encastree à la base. La structure est discrétisée en 12 éléments poutre multicouche et un élément interface à la jonction mur-fondation pour la modélisation du décollement sous forme de rotation en bloc (Fixed End Rotation) due au glissement des armatures à la base.

Dans la zone critique prédéfinie (1,56 m de hauteur), on augmente le nombre de segments par élément fini dont les sections sont discrétisées en 150 couches environ pour le béton. Ceci pour mieux modéliser les redistributions progressives des non-linéarités et des changements de la position de l'axe neutre au cours du chargement cyclique, pour mieux traduire les rigidités actuelles et aussi pour atténuer les chutes brusques dans les raideurs et par suite dans les rigidités dues à l'écroutissage négatif et pour éviter les phénomènes de localisation sources d'instabilités numériques (Coleman *et al.*, 2001).

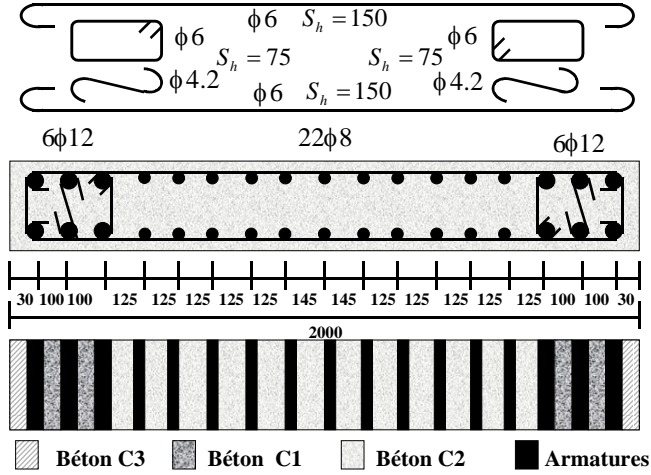


Figure 11. Section A-A et modélisation multicouches (mm)

Les modèles de comportements associés aux 17 couches, relatifs aux armatures verticales sont basés sur les données expérimentales suivantes (Dazio *et al.*, 1999b):

Barre	9	4c
$\phi_{nom}$ [mm]	8	12
$A_{gt}$ [%]	7,85	6,06
$R_{p0.2}$ [MPa]	519,0	612,7
$R_m$ [MPa]	680,8	728,9
$R_m / R_{p0.2}$ [-]	1,31	1,19
$E_s$ [GPa]	192,3	197,8

Tableau 1. Modélisation des barres d'armatures

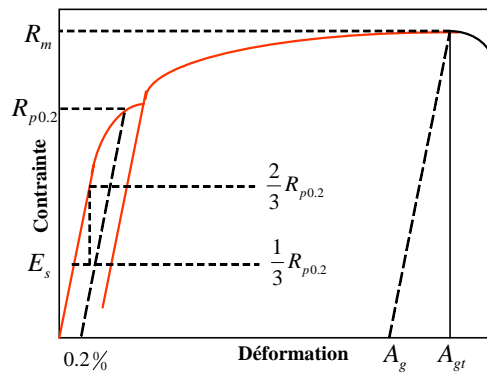


Figure 12. Définition des paramètres

Le comportement du béton comprimé est modélisé en tenant compte implicitement de l'effet du frettage transversal par les aciers transversaux à travers le modèle analytique de Saatcioglu et Razvi (Saatcioglu *et al.*, 1995). Il permet de déterminer les valeurs définissant le gain de résistance et de ductilité du volume du noyau de béton confiné en assimilant les régions d'extrémités de la section du mur à des poteaux rectangulaires sous chargement excentré. Le modèle adopte un adoucissement linéaire en compression.

Béton	$f_{c0}$	$\varepsilon_{01}$	$\varepsilon_{02}$
C2	[MPa]	[‰]	[‰]
Non Fretté	39,6	2,0	10,0
Béton C3	$f_{c0}$	$\varepsilon_{01}$	$\varepsilon_{0u}$
Enrobage	39,6	2,0	12,0
Béton C1	$f_{cc}$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
Fretté	42,6	2,756	28,14

Tableau 2. Modélisation

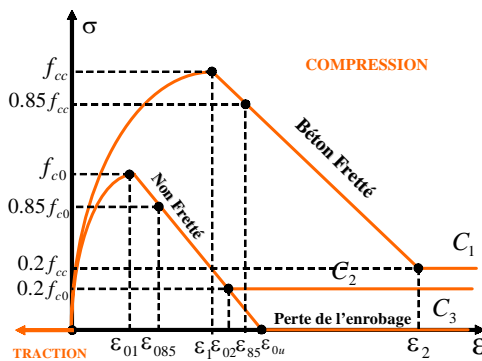


Figure 13. Modèle analytique du béton comprimé

Le béton tendu est négligé dans la simulation faute d'indications sur son comportement surtout du point de vue déformabilité outre le fait que sa contribution est négligeable au-delà des premiers cycles de chargement.

Les distorsions que subit le mur dans la zone critique, sur une hauteur de 1,56 m, aux cours du chargement cyclique alterné sont obtenues par deux jauges de traction-compression. Ces jauges sont croisées, de longueurs initiales  $L$ , et placées à la surface du mur (figure 10). Ces jauges mesurent des extensions et des allongements  $\Delta L_1$  et  $\Delta L_2$ . Ce procédé mesure l'effet global du comportement vis-à-vis du cisaillement par la mesure des distorsions globales dans la structure. L'essai ne fournit donc pas une mesure locale du cisaillement dans les matériaux acier et béton. Le modèle permettant l'isolation du comportement global vis-à-vis du cisaillement est schématisé dans la figure 14. Il est donc possible d'obtenir dans la zone critique le comportement isolé des distorsions développées dans le mur. Ceci par la donnée d'une courbe enveloppe linéarisée donnant l'effort tranchant  $T = F_k$  en fonction du déplacement latéral  $\Delta V$  dû aux distorsions de la structure (figure 14).

Le calibrage de la loi de comportement des couches des éléments poutre vis-à-vis du cisaillement  $(\tau_k, \gamma_k)$  (figure 7) est obtenu par l'application de la formule de

$$\text{la résistance des matériaux } \delta(x) = \int_{h_1}^{h_2} \frac{T(x) dx}{G(x)S(x)} = F_k \left( \frac{h_2 - h_1}{GS} \right) \text{ (Filippou } et al.,$$

1992) pour les 4 états déterminants du comportement global trilineaire  $(T_1^\pm, \Delta V_1^\pm)$  et  $(T_2^\pm, \Delta V_2^\pm)$  (tableau 3). Dans le reste de la structure le comportement est élastique linéaire tel que  $K_1 = 300kN/mm$  (figure 16).

Le glissement d'adhérence des armatures verticales à la jonction mur-fondation est obtenu par la mesure du déplacement relatif entre le béton et les armatures à l'aide de jauges mesurant le déplacement vertical du mur placées en surface et aux extrémités nord et sud du mur (figure 10). Ce procédé mesure l'effet global du glissement d'adhérence sur le comportement de la structure par une flexibilité additionnelle due à la perte d'adhérence des armatures à la base sous forme d'un décollement. L'essai ne fournit donc pas une mesure du glissement relatif des armatures localement. Par conséquent, on est amené à modéliser le glissement d'adhérence par un élément fini de contact multicouche à la base dont le comportement des couches ne reflète pas le glissement relatif effectif des armatures à la base mais auront un comportement déduit des mesures globales. Le modèle permettant l'isolation du décollement  $w$  à partir des mesures expérimentales est schématisé dans la figure 15.

Le calcul de  $w$  en fonction du chargement cyclique  $F_k$  au sommet du mur permet d'obtenir le comportement global du glissement d'adhérence isolé sous forme d'une courbe linéarisée donnant la force du vérin au sommet du mur  $F_k$  en fonction du déplacement latéral  $\Delta f_e$  au niveau de 1,56 m dû à la rotation en bloc à la base.

Le calibrage de la loi de comportement des couches de l'élément de contact  $(\sigma_k^H, d_k^H)$  vis-à-vis du décollement (figure 7) est obtenu en exprimant à chaque état, l'équilibre des résultantes et la condition de compatibilité des déformations de l'élément de contact sous l'action des 4 états déterminants du comportement trinéaire global  $((F_k)_1^\pm, (\Delta f_e)_1^\pm)$  et  $((F_k)_2^\pm, (\Delta f_e)_2^\pm)$  (tableau 3).

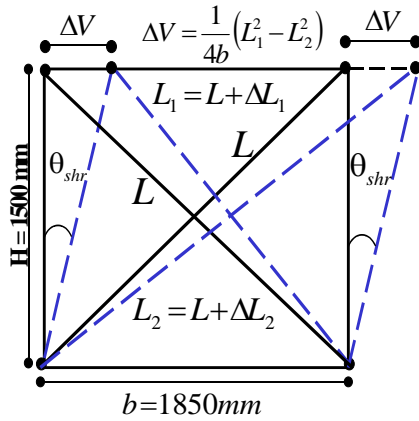


Figure 14. Isolation des distorsions

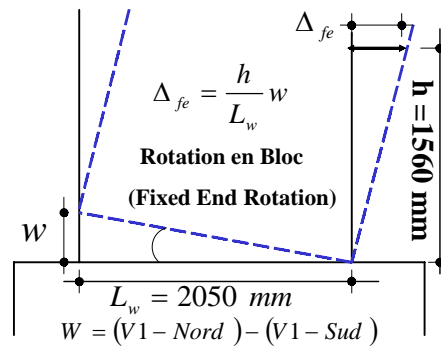


Figure 15. Isolation de l'effet du glissement à la base ou décollement

Les données relatives à la linéarisation trinéaire des courbes globales apparaissent dans le tableau suivant :

Courbe	$K_1$	$K_2 / K_1$	$K_3 / K_2$	$F_1^+$	$F_2^+$
				$F_1^-$	$F_2^-$
$(F_k - \Delta V)$	463.636	0.02588	0.050	408.0	451.8
				397.0	444.0
$(F_k - \Delta f_e)$	680.000	0.04170	0.096	408.0	452.9
				408.0	443.8

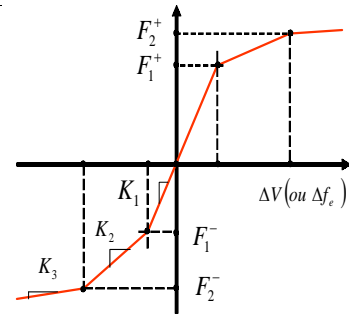


Figure 16

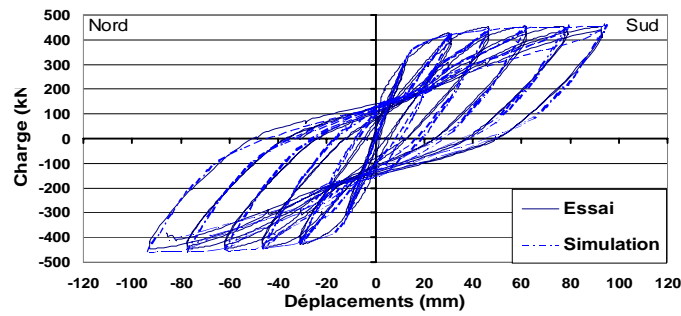
Tableau 3. Paramètres de définition des modèles trinéaires de distorsion et du décollement ( $F$  en [kN],  $K_1$  en [kN/mm])

### 6. Résultats et interprétation

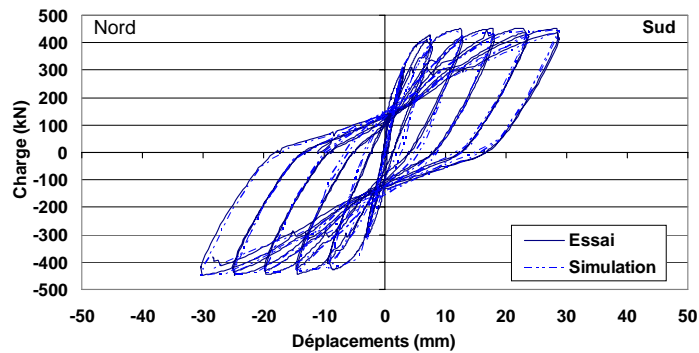
La corrélation essai-simulation numérique d'un mur en béton armé sous chargement cyclique alterné est en général très satisfaisante.

Le comportement global traduit par la courbe charge en fonction du déplacement latéral du sommet du mur ( $F_k, \Delta W$ ) (figure 17) et au niveau de la zone critique ( $F_k, \Delta W_{crit}$ ) (figure 18), montrent une bonne aptitude de l'élément fini et du modèle adopté à modéliser une structure présentant différents types de non-linéarités combinées.

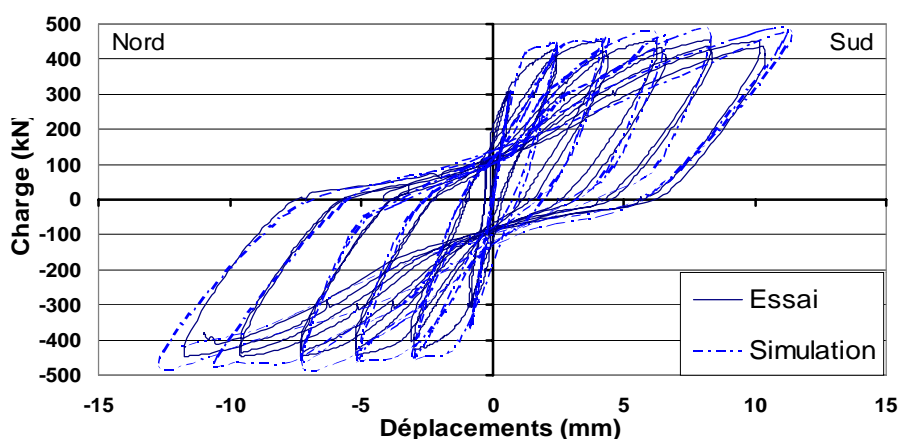
La simulation du comportement non linéaire vis-à-vis des distorsions traduit par la courbe effort tranchant en fonction du déplacement latéral du mur dû aux distorsions développées en zone critique ( $T, \Delta V$ ) (figure 19) montre une bonne concordance avec les résultats expérimentaux en adoptant un modèle trilineaire.



**Figure 17.** Courbe charge  $F_k$  en fonction du déplacement au sommet du mur  $\Delta W$



**Figure 18.** Courbe charge  $F_k$  en fonction du déplacement latéral  $\Delta W_{crit}$



**Figure 19.** Courbe charge  $F_k$  en fonction du déplacement latéral  $\Delta V$  au niveau de la zone critique prédéfinie à 1,56 m de hauteur

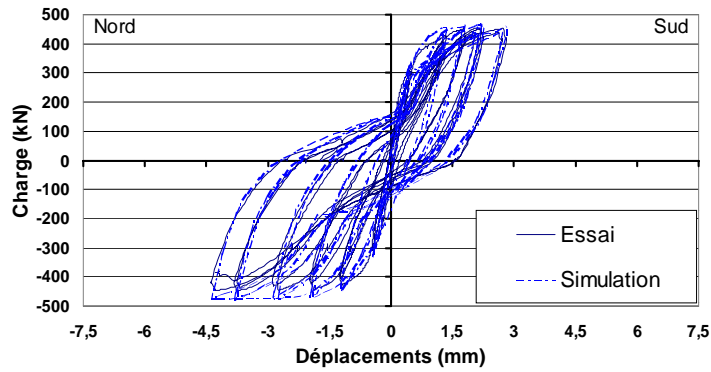
La modélisation de l'effet du glissement d'adhérence à l'aide d'éléments interface muni du modèle trilineaire est validée par confrontation des résultats expérimentaux donnant le déplacement latéral dû à la rotation en bloc aux résultats numériques en fonction de la charge appliquée au mur ( $F_k - \Delta f_e$ ) (figure 20). Ceci montre une bonne approche globale et suffisante de ce mécanisme de déformation par élément fini d'interface. Sa contribution est relativement faible comparée au déplacement  $\Delta V$  au même niveau.

L'examen des valeurs maximales des déplacements latéraux globaux  $\Delta W_{crit}$ , de distorsion  $\Delta V$  et du glissement à la base  $\Delta f_e$  en fonction de la ductilité en déplacement obtenues dans la zone critique (figure 21), montre que :

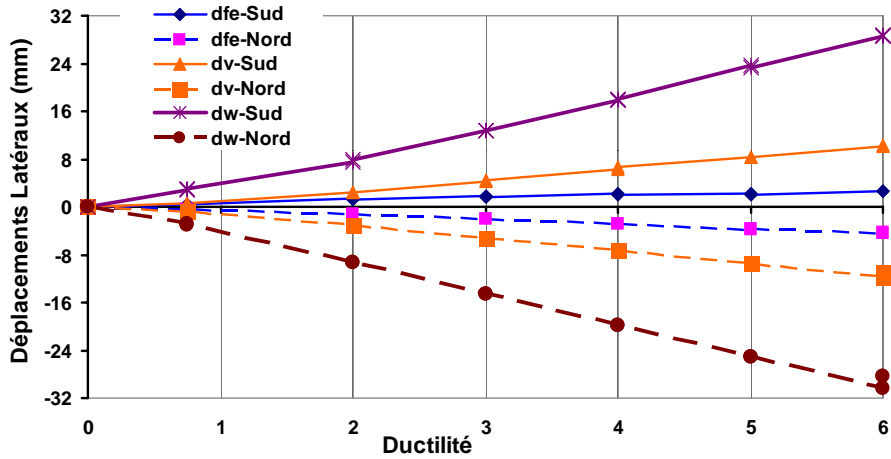
1. les déformations d'effort tranchant représentent, par rapport à  $\Delta W_{crit}$ , une contribution de l'ordre de 20 % pour les valeurs positives et 27 % pour les valeurs négatives durant les deux premiers cycles jusqu'à atteindre 35 % pour les valeurs positives et 38 % en valeurs négatives durant les derniers cycles ;

2. la contribution du glissement ne dépasse pas 15 %. Par conséquent la rupture survient suivant le mode de rupture en flexion par plastification en traction des armatures verticales avec une contribution effective de l'effort tranchant. Ceci étant

dû essentiellement au fait que le mur étudié n'est pas très élancé ( $H/L_w > 1.5$ ) et soumis à une charge normale  $P$  modérée.



**Figure 20.** Courbe charge  $F_k$  en fonction du déplacement latéral  $\Delta f_e$  au niveau de la zone critique prédéfinie à 1,56 m de hauteur



**Figure 21.** Valeurs maximales de déplacements latéraux en fonction de la ductilité  $\mu_\Delta$  dans la zone critique à 1,56 m de la base du mur porteur



## 7. Conclusion

Un modèle élément fini béton armé formulé sur la base de la méthode des flexibilités est présenté et confronté à une étude expérimentale d'un mur porteur sous chargement cyclique alterné selon l'approche de l'isolation des principaux mécanismes de déformations qui peuvent se développer dans les régions critiques pour le calcul prévisionnel du comportement hystérétique des structures.

Les résultats obtenus de la corrélation essai-simulation numérique montrent une très bonne approche du comportement réel de la structure à travers le modèle élément fini poutre et interface multicouche. Ceci nous encourage à pousser les limites du modèle par une étude intensive sous différentes conditions en faisant varier les principaux paramètres ayant une influence sur le comportement des murs tels que l'intensité de l'effort normal, les dispositions constructives et l'élanement sur la réponse anélastique du comportement global et sur les différents mécanismes de déformations.

Le modèle représente une plate-forme flexible pour le développement de modèles plus complexes. Il est en cours d'enrichissement par les degrés de liberté de torsion, de lois de comportement locales pour le cisaillement et par l'adoption de couches interfaces pour la modélisation directe de la détérioration de l'adhérence acier béton.

## 8. Bibliographie

- Allahabadi R., DRAIN-2DX, Seismic response and damage assessment for 2D structures, PhD Thesis, University of California, Berkeley, California, 1987.
- Allahabadi R., Powell G.H., DRAIN-2DX user guide, Report n° UCB/EERC-88/06, Earthquake Engineering Res. Ctr., University of California, Berkeley, California, 1988.
- Bachman H., Dazio A., Lestuzzi P., "Developments in the seismic design of buildings with RC structural walls", *Proceedings of the 11<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering*, September 6-11, CNIT, Paris La Défense, France 1998.
- Bazant Z.P., Kim S.S., "Plastic-Fracturing Theory of Concrete", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, June 1979, p. 407-428.
- Coleman and Enrico Spacone "Localization Issues in Force-Based Elements", *Journal of Structural Engineering*, vol. 127, n° 11, november 2001, p. 1257-1265.
- D'ambrisi A., Filippou F.C., "Modeling of Cyclic Shear Behavior in RC Members", *Journal of Structural Engineering*, vol. 125, n° 10, October 1999, p. 1143-1150.
- Dazio A., Wenk T., Bachman H., *Versuche an Stahlbetontragwänden unter zyklisch-statischer Einwirkung*, Institut für Baustatik und Konstruktion (IBK), ETH Zürich, Bericht Nr. 239, Birkhäuser Verlag Basel, März 1999a.

- Dazio A., Wenk T., Bachman H., Tests on RC Structural walls under Cyclic-Static Action - Data Collection, Appendix to: IBK Report n° 239, March 1999b.
- Eurocode 8, Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben, Sammelband Gebäude, SIA V 160.801 (Europäische Vornorm ENV 1998-1-1 to 3). Schweiz, Ingenieur-und Architekten-Verein, Zürich, 1997.
- Filippou F.F., D'ambrisi A., Issa A., Non linear static and dynamic analysis of RC subassemblages, Report N°UCB/EERC-92/08, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, Univ. of California, Berkeley, August 1992.
- Mestat P., Humbert P., Référentiel de tests pour la vérification de la programmation des lois de comportement dans les logiciels d'éléments finis, Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées 230, LCPC, Réf. 4349, Janvier-Février 2001, p. 23-38.
- Monti G., Spacone E., "Reinforced Concrete Fiber Beam Column Element with Bond Slip", *Journal of Structural Engineering*, vol. 126 n° 6, June 2000, p. 654-661.
- Neuenhofer A., Filippou F.C., "Evaluation of Nonlinear Frame Finite-Element Models", *Journal of Structural Engineering*, vol. 123, n° 7, July 1997, p. 958-966.
- Paulay T., Priestley M.J.N., *Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings*, John Wiley & Sons, New York 1992.
- Prakash V., Powell G.H., DRAIN-2DX, DRAIN-3DX, DRAIN-BUILDING: base program design documentation, Report n° UCB/SEMM-93/17, University of California, Berkeley, California, 1993.
- Ramdan and Ghobarah A., "Analytical Model for Shear-Link Behavior", *Journal of Structural Engineering*, vol. 121, n° 11, November 1995, p. 1574-1597.
- Saatcioglu M., Salamat A.H., Razvi S.R., "Confined columns under eccentric loading", *Journal of Structural Engineering*, vol. 121, n° 11, November 1995, p. 1547-1555.
- Salari M., Spacone E., "Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip", *Engineering Structures* 23, ed. Elsevier, August 2000, p. 815-826.
- Simons J.W., Powell G.H., "Solution strategies for statically loaded non linear structures", *Earthquake engineering research center*, Report N° EERC 82-22, University of California Berkeley.
- Spacone E., Filippou F.C., Taucer F.F., "Fiber beam column model for nonlinear analysis of RC frames: Formulation", *Earthquake Engrg. Struct., Dyn.*, 25, 1996, p. 711-725.
- Taucer F.F., Spacone E., Filippou F.C., A fiber beam-column element for seismic response analysis of RC structures, Report N°UCB/EERC-91/17, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, Univ. of California, Berkeley, December 1991.
- Zeris C.A., Mahin S.A., "Behavior of reinforced concrete structures subjected to biaxial excitation", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 117 (ST9), p. 2657-2673.