
Estimation des erreurs de discrétisation pour des problèmes de mécanique

Serge Prudhomme — J. Tinsley Oden

*Institute for Computational Engineering and Sciences
The University of Texas at Austin
1 University Station, C0200
Austin, Texas 78712 - U.S.A.
{serge,oden}@ices.utexas.edu*

RÉSUMÉ. Cette notice présente des estimateurs d'erreur dans des grandeurs spécifiées pour des calculs éléments finis de problèmes d'élasticité linéaire et de vibrations. Il est montré pour ces applications que l'erreur dans une grandeur spécifiée peut être exprimée en termes des erreurs, dans la norme en énergie, dans les approximations des problèmes primal et dual. Le calcul d'estimateurs et de bornes pour l'erreur dans une quantité d'intérêt peut alors se réaliser en faisant usage d'estimateurs globaux connus. Quelques expériences numériques prouvent de la bonne performance de cette approche.

ABSTRACT. This paper presents goal-oriented error estimators for finite element analysis of linear elasticity equations and eigenvalue problems. In these applications, it is shown that the error in the quantity of interest can be expressed in terms of the errors in the energy norm in the approximations of the primal and dual problems. Computable estimators and bounds for the error in the quantity of interest are then derived making use of known global estimators. Performance of this approach is demonstrated on several test problems.

MOTS-CLÉS : estimation d'erreur dans des grandeurs spécifiées, méthodes résiduelles, bornes inférieure et supérieure, élasticité linéaire, vibrations.

KEYWORDS: goal-oriented error estimation, residual method, lower and upper bounds, linear elasticity, vibrations.

1. Introduction

Toute approximation éléments finis d'un problème d'équations aux dérivées partielles contient inévitablement des erreurs de discrétisation. Il est donc souhaitable d'avoir à disposition des outils qui permettent de les estimer et, éventuellement, de les contrôler par adaptation de maillage. Mais l'idée d'évaluer l'erreur directement conduit généralement à un problème aussi coûteux que celui de calculer la solution du problème EDP. L'objectif dans l'estimation d'erreur consiste donc à estimer des grandeurs de l'erreur plutôt que l'erreur elle-même. Nombre de travaux se sont consacrés jusqu'à maintenant à l'étude d'estimateurs dans des normes du type énergie (voir par exemple les ouvrages [VER 96, AIN 00, BAB 01, LAD 01]). Cependant, après avoir réalisé que ces mesures ne répondaient pas aux besoins des utilisateurs, car trop abstraites, de nouvelles méthodes ont été développées récemment avec pour objectif d'estimer les erreurs dans des grandeurs ou quantités d'intérêt ayant un sens physique. De telles grandeurs peuvent être définies par exemple comme la moyenne du déplacement dans une sous-région du milieu solide, comme l'une des composantes du champ de contrainte en un point critique, ou bien encore, dans le cas de vibrations, comme l'une des fréquences propres.

Des résultats précurseurs sur ce sujet sont apparus dès 1984 dans [GAR 84], mais ce n'est qu'à partir des travaux de Johnson *et al.* [JOH 92, ERI 95] et de Becker et Rannacher [BEC 96] que de telles méthodes ont suscité un réel intérêt, voir par exemple [PAR 97, CIR 98, RAN 98, STR 00a, ODE 01, ODE 00, WAL 01, LAR 02, BON 02]. L'approche est maintenant bien comprise, dans le sens où il est nécessaire pour obtenir des estimateurs dans les quantités d'intérêt de résoudre un problème dual. Par contre, là où les différentes méthodes divergent, c'est dans la manière dont est approchée la solution de ce problème dual, et plus encore, dans la manière dont est traitée *a posteriori* cette approximation. En effet, la performance de ces estimateurs dépend essentiellement de la précision avec laquelle la solution duale est obtenue. Nous voulons montrer ici que dans certaines situations, il est intéressant d'approximer celle-ci dans le même espace éléments finis qui est utilisé pour approximer la solution du problème primal, et d'avoir recours à des estimateurs d'erreur dans la norme énergie pour les deux solutions éléments finis, le principal avantage de cette approche étant de pouvoir réutiliser des méthodes connues et éprouvées depuis longtemps. Dans cette notice, nous appliquons la méthodologie au problème d'élasticité linéaire et au problème de vibrations dans un milieu solide, notre motivation étant de synthétiser certains résultats présentés auparavant dans [PRU 03, ODE 03]. Dans le cas du problème de vibrations, nous nous intéresserons uniquement à l'estimation des erreurs dans les fréquences propres. Des théories similaires ont été également présentées dans [MAD 99, CHA 99, BEC 01]. Nous citons aussi les travaux de Ladevèze *et al.* sur ce sujet dont l'approche est basée sur le traitement *a posteriori* du quotient de Rayleigh (voir par exemple [LAD 01]).

La notice est organisée comme suit : dans la section 2, nous présentons les problèmes d'élasticité linéaire et de vibrations, leur formulation variationnelle, ainsi que leur discrétisation par la méthode des éléments finis. Dans la section 3, nous donnons

une brève description de la méthodologie pour l'estimation des erreurs dans des grandeurs spécifiées que nous appliquons aux deux problèmes considérés dans la présente notice. Nous formulons alors dans la section 4 les estimateurs d'erreur, et en particulier les bornes inférieure et supérieure sur l'erreur dans les quantités d'intérêt. Les résultats théoriques sont illustrés par quelques expériences numériques dans la section 5, lesquelles permettent de mettre en évidence l'efficacité des estimateurs présentés ici. Finalement, nous concluons dans la section 6 par quelques remarques et suggestions.

2. Préliminaires

Notre motivation à long terme sera d'étudier l'évolution dynamique d'un milieu solide élastique occupant la région bornée Ω de l'espace \mathbb{R}^3 et de frontière $\partial\Omega$. Dans le cas de petites déformations, les champs de déplacement $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ vérifient dans Ω l'équation d'équilibre et la relation de comportement linéaire suivantes :

$$\rho \partial_{tt} \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad (2)$$

où ρ désigne la masse volumique, \mathbf{f} la densité volumique d'effort sur le domaine Ω , \mathbf{E} l'opérateur de Hooke relative au matériau, et $\boldsymbol{\epsilon}$ le champ de déformation :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (3)$$

D'autre part, nous supposons que le milieu solide est soumis au champ surfacique de déplacement nul sur une partie Γ_d de la frontière $\partial\Omega$ et au champ surfacique d'effort \mathbf{g} sur la partie complémentaire Γ_t , c'est-à-dire $\Gamma_d \cap \Gamma_t = \emptyset$ et $\overline{\Gamma_d \cup \Gamma_t} = \partial\Omega$. Enfin, à l'instant initial t_0 , l'état du milieu solide est supposé donné par $\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0$ et $\partial_t \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0$.

Nous reportons l'étude de ce système à une date ultérieure et nous nous concentrons à présent à l'estimation des erreurs de discrétisation dans le cadre de deux sous-problèmes, à savoir le problème d'élasticité linéaire statique et le problème de vibrations.

2.1. Problème d'élasticité linéaire statique

Dans le cas statique, les champs de déplacement et de contrainte ne dépendent plus du temps, le précédent problème se réduit à chercher $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ tel que :

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f}, & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \text{on } \Gamma_d \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g}, & \text{on } \Gamma_t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

où $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ satisfait bien sûr la relation de comportement (2).

2.2. Problème de vibrations

Si l'on considère des perturbations de la forme $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ à la solution de (1), par exemple dues à des perturbations dans les conditions initiales, le calcul des vibrations revient à rechercher les valeurs propres λ et modes propres associés $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, \mathbf{u} non nuls, tels que :

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \lambda \rho \mathbf{u}, & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \text{on } \Gamma_d \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0}, & \text{on } \Gamma_t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

où les pulsations propres ω et fréquences propres f se déduisent de λ par $\omega = \sqrt{\lambda}$ et $f = \sqrt{\lambda}/2\pi$.

2.3. Formulations variationnelles

Nous introduisons tout d'abord l'espace vectoriel V des champs de déplacement admissibles :

$$V = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3; \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Gamma_d\} \quad (6)$$

Nous dénotons les formes bilinéaires $B(\cdot, \cdot)$ et $M(\cdot, \cdot)$ définies sur $V \times V$:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \mathbf{E} \nabla \mathbf{u} \, dx \\ M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, dx \end{aligned}$$

et la forme linéaire continue sur V :

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_t} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds$$

Nous munissons l'espace V de la norme $\|\mathbf{v}\|_B = \sqrt{B(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$, communément appelée norme en énergie puisque la quantité $B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ vaut simplement le double de l'énergie de déformation.

La formulation variationnelle du problème statique se pose donc :

Trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad (7)$$

Similairement, la formulation variationnelle du problème aux valeurs propres revient à résoudre :

Trouver $\mathbf{u} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda M(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \text{et} \quad M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1 \quad (8)$$

La normalisation $M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ permet d'assurer l'unicité du vecteur propre \mathbf{u} associé à chaque λ . D'autre part, puisque les formes bilinéaires sont symétriques et définies positives, nous savons que le problème admet une suite dénombrable de valeurs propres λ_n , toutes strictement positives, et telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$. Enfin, le problème (8) peut être également obtenu en minimisant le quotient de Rayleigh défini pour tout $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ par $R(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})/M(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Chaque valeur propre λ et mode propre \mathbf{u} associé vérifient alors :

$$\lambda = R(\mathbf{u}) = \frac{B(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{M(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (9)$$

En introduisant la forme semi-linéaire $A(\cdot; \cdot)$ définie sur $(V \times \mathbb{R}) \times (V \times \mathbb{R})$:

$$A((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu)) = -B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu[M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - 1] \quad (10)$$

nous pouvons également écrire le problème (8) dans la forme compacte suivante :

Trouver $(\mathbf{u}, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (\mathbf{v}, \mu) \in V \times \mathbb{R}, \quad A((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu)) = 0 \quad (11)$$

Nous utilisons ici la convention usuelle selon laquelle le point virgule indique que A est linéaire en (\mathbf{v}, μ) mais éventuellement non linéaire par rapport à (\mathbf{u}, λ) .

2.4. Discrétisation par éléments finis

Soit Ω_h une partition de Ω en N_e éléments. Nous construisons un espace éléments finis $V^h \subset V$ à partir de fonctions continues, polynômiales par morceaux, et de degré p_K sur chaque élément K . La discrétisation par éléments finis du problème statique permet de :

Trouver $\mathbf{u}_h \in V^h$ tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in V^h, \quad B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad (12)$$

tandis que la recherche des valeurs et modes propres discrets revient à résoudre le problème de dimension finie :

Trouver $(\mathbf{u}_h, \lambda_h) \in V^h \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (\mathbf{v}, \mu) \in V^h \times \mathbb{R}, \quad A((\mathbf{u}_h, \lambda_h), (\mathbf{v}, \mu)) = 0 \quad (13)$$

cette dernière équation pouvant être réécrite, tout comme pour le problème continu :

$$\forall \mathbf{v} \in V^h, \quad -B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + \lambda_h M(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{et} \quad M(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = 1 \quad (14)$$

Supposons maintenant que λ_h soit une approximation de la valeur propre λ . Puisque $V^h \subset V$, et que λ est un minimum du quotient de Rayleigh sur V , nous en déduisons immédiatement que $\lambda \leq \lambda_h$. Il suit que λ_h est une borne supérieure à λ et que l'erreur $\lambda - \lambda_h$ est nécessairement négative.

3. Erreurs de discrétisation

3.1. Remarques préliminaires

Dans la suite de la notice, nous nous intéressons à l'estimation des erreurs numériques produites par la discrétisation éléments finis, c'est-à-dire aux erreurs $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ pour les problèmes d'élasticité linéaire statique, et $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \lambda - \lambda_h)$ pour les problèmes de vibrations. Les erreurs d'intégration, de résolution des systèmes linéaires, de représentation du domaine Ω par éléments (nous supposons en fait que $\Omega_h = \Omega$) seront ici négligées.

Nous souhaitons ici estimer les erreurs dans des grandeurs qui peuvent s'exprimer sous forme de fonctionnelles $Q(\cdot)$, linéaires ou non linéaires, des solutions \mathbf{u} ou (\mathbf{u}, λ) des problèmes continus. En bref, des estimateurs de l'erreur $\mathcal{E} = Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h)$ ou $\mathcal{E} = Q((\mathbf{u}, \lambda)) - Q((\mathbf{u}_h, \lambda_h))$ nous permettraient alors d'évaluer la précision de $Q(\mathbf{u}_h)$ ou de $Q((\mathbf{u}_h, \lambda_h))$ et de contrôler éventuellement ces erreurs par adaptation de maillage.

Nous allons montrer dans cette section que l'erreur \mathcal{E} peut en fait être représentée en fonction de résiduels, ce qui nous paraît logique puisque le résiduel s'interprète comme la source des erreurs numériques. Pour le problème statique et le problème de vibrations, le résiduel s'écrit respectivement :

$$\mathcal{R}_h(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \quad (15)$$

$$\mathcal{R}_h((\mathbf{v}, \mu)) = -A((\mathbf{u}_h, \lambda_h); (\mathbf{v}, \mu)) \quad (16)$$

Nous citons dès maintenant une propriété fondamentale que vérifie le résiduel, souvent dénommée la propriété d'orthogonalité ou de Galerkin. Si \mathbf{u}_h et $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$ sont les solutions de (12) et de (14), alors respectivement :

$$\mathcal{R}_h(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V^h \quad (17)$$

$$\mathcal{R}_h((\mathbf{v}, \mu)) = 0, \quad \forall (\mathbf{v}, \mu) \in V^h \times \mathbb{R} \quad (18)$$

Nous montrerons également dans cette section que pour les problèmes d'élasticité linéaire et de vibrations, les erreurs \mathcal{E} peuvent aussi être données en fonction de l'erreur $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ dans la norme en énergie.

3.2. Approche générale

Nous rappelons brièvement la méthodologie qui nous permettra de calculer les erreurs dans des grandeurs Q . Dans ce but, nous introduisons le problème abstrait :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que : } \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \mathcal{B}(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}) \quad (19)$$

où $\mathcal{B}(\mathbf{u}; \mathbf{v})$ est une forme semi-linéaire et $\mathcal{F}(\mathbf{v})$ une forme linéaire continue sur V . Dans un premier temps, nous considérons une approximation quelconque $\mathbf{u}_h \in V^h$

de \mathbf{u} . Par quelconque, nous entendons que \mathbf{u}_h n'est pas nécessairement une solution éléments finis par la méthode de Galerkin du problème (19). L'objectif est maintenant de mesurer l'erreur $\mathcal{E} = Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h)$. Notons que dans le cas particulier où Q est linéaire, nous avons $\mathcal{E} = Q(\mathbf{e})$ avec $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$.

Le point de départ consiste ici, en suivant l'approche de Becker et Rannacher [BEC 01] (généralisée au cas de l'estimation des erreurs de modèle dans [ODE 02]), à considérer le problème de minimisation :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que} \\ Q(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{z} \in S} Q(\mathbf{z}) \\ \text{où} \\ S = \{\mathbf{z} \in V; \mathcal{B}(\mathbf{z}; \mathbf{v}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V\} \end{array}} \quad (20)$$

Nous remarquons que si le problème (19) admet une solution unique, l'ensemble S se réduit à un singleton et le problème de minimisation est alors trivial. Les équations d'Euler-Lagrange associées à (20) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{u}; \mathbf{v}) &= \mathcal{F}(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in V \\ \mathcal{B}'(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= Q'(\mathbf{u}; \mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in V \end{aligned} \quad (21)$$

où $\mathcal{B}'(\cdot; \cdot, \cdot)$ et $Q'(\cdot; \cdot)$ dénotent les dérivées de Fréchet :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \{\mathcal{B}(\mathbf{u} + \theta \mathbf{v}; \mathbf{w}) - \mathcal{B}(\mathbf{u}; \mathbf{w})\} \\ Q'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \{Q(\mathbf{u} + \theta \mathbf{v}) - Q(\mathbf{u})\} \end{aligned} \quad (22)$$

La première équation dans (21) représente le problème primal (19). La deuxième équation définit le problème dual ou adjoint avec $\mathbf{w} \in V$ comme inconnue. Nous avons pris coutume d'appeler \mathbf{w} la fonction d'influence car elle indique l'influence du résiduel associé au problème primal $\mathcal{R}_p(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - B(\mathbf{u}_h; \mathbf{v})$ sur l'erreur \mathcal{E} (voir résultat ci-dessous). Certains auteurs préfèrent simplement l'appeler la solution duale.

Le résultat ci-dessous (nous suggérons les références [BEC 01, ODE 02] pour une démonstration détaillée de ce résultat) nous donne alors une nouvelle représentation de l'erreur dans la grandeur spécifiée Q :

$$\boxed{\mathcal{E} = Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h) = \mathcal{R}_p(\mathbf{w}) + \Delta_{\mathcal{B}} + \Delta_Q} \quad (23)$$

où les termes $\Delta_{\mathcal{B}}$ et Δ_Q seront négligés par la suite, puisqu'ils font intervenir les dérivées secondes et troisièmes de \mathcal{B} et Q respectivement, et sont donc des quantités du deuxième et troisième ordre de l'erreur \mathbf{e} (à condition bien sûr que l'erreur soit petite).

Nous observons que (23) exprime \mathcal{E} en fonction de la solution exacte \boldsymbol{w} du problème dual. Cette expression peut être simplifiée si l'on dispose des solutions éléments finis \boldsymbol{u}_h et \boldsymbol{w}_h des problèmes primal et dual, respectivement :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}) &= \mathcal{F}(\boldsymbol{v}), & \forall \boldsymbol{v} \in V^h \\ \mathcal{B}'(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_h) &= Q'(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}), & \forall \boldsymbol{v} \in V^h\end{aligned}\quad (24)$$

Dans ce cas, puisque le résiduel est une forme linéaire et satisfait la condition d'orthogonalité, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_p(\boldsymbol{w}) &= \mathcal{R}_p(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_h + \boldsymbol{w}_h) \\ &= \mathcal{R}_p(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_h) + \mathcal{R}_p(\boldsymbol{w}_h) \\ &= \mathcal{R}_p(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_h)\end{aligned}$$

de telle sorte que (23) devient, en introduisant l'erreur $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_h$:

$$\boxed{\mathcal{E} = Q(\boldsymbol{u}) - Q(\boldsymbol{u}_h) = \mathcal{R}_p(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Delta_B + \Delta_Q} \quad (25)$$

REMARQUE. — De cette dernière équation, nous prouvons en quelque sorte que :

$$\mathcal{E} = Q(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{e}) - Q(\boldsymbol{u}_h) \approx \mathcal{R}_p(\boldsymbol{\varepsilon})$$

De fait, nous substituons au problème d'évaluer l'erreur \boldsymbol{e} pour estimer \mathcal{E} celui de calculer $\boldsymbol{\varepsilon}$, qui à première vue semble de difficulté comparable. Néanmoins, à la différence du problème primal, le problème dual est toujours linéaire, ce qui peut simplifier l'estimation de $\boldsymbol{\varepsilon}$. D'autre part, l'avantage de la représentation $\mathcal{R}_p(\boldsymbol{\varepsilon})$ vient du fait que le résiduel est une forme intégrale définie sur tout le domaine Ω . Cette intégrale peut donc être décomposée en intégrales définies sur chaque élément K du maillage. Nous sommes alors en mesure de calculer des contributions par élément à l'erreur \mathcal{E} , lesquelles peuvent servir d'indicateurs de raffinement dans une stratégie d'adaptation de maillage.

REMARQUE. — Certains auteurs, plutôt que de considérer \boldsymbol{w}_h , préfèrent introduire la fonction $\pi_h \boldsymbol{w} \in V^h$, π_h définissant un opérateur d'interpolation ou de projection de V dans V^h , de sorte que :

$$\mathcal{R}_p(\boldsymbol{w}) = \mathcal{R}_p(\boldsymbol{w} - \pi_h \boldsymbol{w}) \quad (26)$$

Nous remarquons que ce résultat ne fait pas intervenir directement la solution éléments finis \boldsymbol{w}_h . Cependant, puisque \boldsymbol{w} n'est connue explicitement que dans de rares occasions, la différence $\boldsymbol{w} - \pi_h \boldsymbol{w}$ est calculée en approximant \boldsymbol{w} dans un espace éléments finis plus riche que V^h , en utilisant la méthode p par exemple, ou bien en se servant de l'information fournie par \boldsymbol{w}_h , par exemple en utilisant des méthodes d'interpolation de \boldsymbol{w}_h par des fonctions polynômiales de degré plus élevé. Diverses méthodes sont proposées dans [LAR 02, BEC 01].

3.3. Application au problème d'élasticité linéaire statique

Dans ce cas nous avons $\mathcal{B}(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, et puisque $B(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire, nous avons également, $\mathcal{B}'(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ et $\Delta_{\mathcal{B}} = 0$. Si, en outre, Q est une forme linéaire, alors $Q'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = Q(\mathbf{v})$ et $\Delta_Q = 0$. Les problèmes primal et dual s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= F(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in V \\ B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= Q(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in V \end{aligned} \quad (27)$$

et l'erreur \mathcal{E} est donnée par :

$$\mathcal{E} = Q(\mathbf{e}) = \mathcal{R}_h(\mathbf{w}) \quad (28)$$

Si d'autre part, nous considérons les solutions éléments finis \mathbf{u}_h et \mathbf{w}_h comme les approximations de \mathbf{u} et \mathbf{w} par la méthode de Galerkin, alors nous avons :

$$\mathcal{E} = \mathcal{R}_h(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) = \mathcal{R}_h(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (29)$$

Finalement, puisque l'équation qui gouverne l'erreur d'approximation \mathbf{e} dans \mathbf{u}_h est donnée par :

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \mathcal{R}_h(\mathbf{v}) \quad (30)$$

nous obtenons la nouvelle représentation de l'erreur :

$$\mathcal{E} = B(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (31)$$

Dans ce cas particulier, à savoir que $B(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur V , puisque symétrique et définie positive, nous pouvons réécrire $B(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon})$ comme :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} \|s\mathbf{e} + s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\|_B^2 - \frac{1}{4} \|s\mathbf{e} + s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\|_B^2 \quad (32)$$

où s est un nombre réel quelconque. Par la suite, s sera défini par une approximation de $\sqrt{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_B / \|\mathbf{e}\|_B}$, cette dernière quantité minimisant les termes $\|s\mathbf{e} + s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\|_B$ et $\|s\mathbf{e} + s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\|_B$.

3.4. Application au problème de vibrations

Dans ce cas, \mathbf{u} est remplacé par (\mathbf{u}, λ) , \mathbf{v} par (\mathbf{v}, μ) , et la forme semi-linéaire $\mathcal{B}(\mathbf{u}; \mathbf{v})$ par $A((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu))$. Les problèmes primal et dual s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} A((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu)) &= 0, & \forall (\mathbf{v}, \mu) \in V \times \mathbb{R} \\ A'((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu), (\mathbf{w}, \psi)) &= Q'((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu)), & \forall (\mathbf{v}, \mu) \in V \times \mathbb{R} \end{aligned} \quad (33)$$

où la fonction d'influence est maintenant la paire $(\mathbf{w}, \psi) \in V \times \mathbb{R}$, et où :

$$\begin{aligned} A'((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu), (\mathbf{w}, \psi)) = \\ - B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \lambda M(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + 2\psi M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu M(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (34)$$

Nous nous intéressons ici au cas où la quantité d'intérêt est une valeur propre λ . Ceci signifie que $Q((\mathbf{u}, \lambda)) = \lambda$, et puisque Q est une forme linéaire, nous avons immédiatement $Q'((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu)) = Q((\mathbf{v}, \mu)) = \mu$ et $\Delta_Q = 0$.

Tout d'abord nous remarquons que la paire $(\mathbf{w}, \psi) = (\mathbf{u}, 0)$ est solution du problème dual. En effet :

$$\begin{aligned} A'((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu), (\mathbf{u}, 0)) &= -B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \lambda M(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \mu M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &= A((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu)) + \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

De la même manière, on peut montrer que l'approximation éléments finis de (\mathbf{w}, ψ) est donnée par $(\mathbf{w}_h, \psi_h) = (\mathbf{u}_h, 0)$ lorsque $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$ est solution de (14). Auquel cas il suit que :

$$(\mathbf{w}, \psi) - (\mathbf{w}_h, \psi_h) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, 0) = (\mathbf{e}, 0) \quad (35)$$

et nous avons alors :

$$\mathcal{E} = \mathcal{R}_h((\mathbf{e}, 0)) + \Delta_A \quad (36)$$

Maintenant, en partant de la définition du résiduel, nous pouvons écrire que pour toute paire $(\mathbf{v}, \mu) \in V \times \mathbb{R}$:

$$A((\mathbf{u}, \lambda); (\mathbf{v}, \mu)) - A((\mathbf{u}_h, \lambda_h); (\mathbf{v}, \mu)) = \mathcal{R}_h((\mathbf{v}, \mu)) \quad (37)$$

Après avoir développé cette équation et substitué $(\mathbf{e}, 0)$ à (\mathbf{v}, μ) , nous obtenons :

$$-B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) + \lambda M(\mathbf{e}, \mathbf{e}) + (\lambda - \lambda_h)M(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}) = \mathcal{R}_h((\mathbf{e}, 0)) \quad (38)$$

D'autre part, comme $M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = M(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = 1$ d'après (8) et (14), nous pouvons aisément montrer que $M(\mathbf{e}, \mathbf{u}_h) = -M(\mathbf{e}, \mathbf{e})/2$, et donc :

$$\mathcal{R}_h((\mathbf{e}, 0)) = -B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) + \frac{\lambda + \lambda_h}{2} M(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \quad (39)$$

Finalement, les quantités $M(\mathbf{e}, \mathbf{e})$ sont en général négligeables par rapport à $B(\mathbf{e}, \mathbf{e})$, ce qui nous amène le résultat :

$$\boxed{\mathcal{E} = \lambda - \lambda_h \approx -B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = -\|e\|_B^2} \quad (40)$$

REMARQUE. — Des calculs simples mais fastidieux (qui impliquent de calculer les dérivées deuxième et troisième de A) nous permettent d'évaluer Δ_A comme :

$$\Delta_A = \frac{\lambda - \lambda_h}{2} M(\mathbf{e}, \mathbf{e})$$

si bien que, en utilisant (36) et (39) :

$$\lambda - \lambda_h = -B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) + \lambda M(\mathbf{e}, \mathbf{e})$$

Nous aurions pu arriver directement à ce résultat en manipulant judicieusement les équations (8) et (14).

4. Estimateurs d'erreur dans les grandeurs spécifiées

Nous avons montré dans la section précédente que le problème de l'estimation d'erreur dans des grandeurs spécifiées pouvaient dans certains cas se résumer à l'estimation d'erreur dans la norme en énergie. Ceci présente l'avantage de pouvoir utiliser des méthodes connues et éprouvées comme par exemple les méthodes explicites [VER 96], les méthodes résiduelles implicites, par élément [BAN 85, LAD 01, AIN 97] (avec ou sans équilibrage) ou par sous-domaines [CAR 00, MOR 01], ainsi que les méthodes dites de lissage [ZIE 92a, ZIE 92b].

Dans cette notice, nous utilisons une méthode résiduelle par élément sans équilibrage [BAN 85], qui nous apparaît comme un bon compromis entre précision et efficacité, spécialement pour des calculs en dimension trois. Nous rappelons succinctement la méthodologie pour obtenir des bornes supérieure et inférieure à l'erreur $\|e\|_B$ pour le problème d'élasticité linéaire statique. Puis nous appliquons ces résultats à l'estimation d'erreur dans des grandeurs Q pour les problèmes d'élasticité et de vibrations.

4.1. Borne supérieure

Soit un élément K du maillage et W_K l'ensemble des fonctions de forme de degré $p_K + 1$, où p_K désigne le degré maximal sur K des fonctions polynômiales utilisées pour le calcul de la solution éléments finis. Soit $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ où \mathbf{u} et \mathbf{u}_h sont les solutions de (7) et (12). Un estimateur de la norme $\|e\|_B$ s'obtient en calculant les fonctions $\psi_K \in W_K$ sur chaque élément K tel que :

$$B_K(\psi_K, \mathbf{v}) = \mathcal{R}_K(\mathbf{v}) + \int_{\partial K} \mathbf{g}_{\gamma, K} \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad \forall \mathbf{v} \in W_K \quad (41)$$

où $B_K(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{R}_K(\cdot)$ sont les restrictions de $B(\cdot, \cdot)$ et $\mathcal{R}(\cdot)$ sur K telles que :

$$\begin{aligned} B_K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_K \nabla \mathbf{v} : \mathbf{E} \nabla \mathbf{u} \, dx \\ \mathcal{R}_K(\mathbf{v}) &= \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_t} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_K \nabla \mathbf{v} : \mathbf{E} \nabla \mathbf{u}_h \, dx \end{aligned}$$

et où les flux $\mathbf{g}_{\gamma, K}$ sur chaque face γ de K sont donnés par :

$$\mathbf{g}_{\gamma, K} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}|_K - \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}|_L) & \text{si } \gamma = \partial K \cap \partial L \\ \mathbf{0} & \text{si } \gamma \subset \partial \Omega \end{cases}$$

Nous pouvons alors calculer l'estimateur η_{sup} de l'erreur dans la norme en énergie :

$$\eta_{\text{sup}} = \sqrt{\sum_K B_K(\psi_K, \psi_K)} \quad (42)$$

Nous soulignons ici que η_{sup} produit une borne supérieure à l'erreur $\|e\|_B$ si les problèmes locaux (41) sont tous résolus exactement sur $(H^1(K))^3$ privés des modes rigides (voir [PRU 03, Théorème 4.3]). Ici, puisque ψ_K est évalué sur l'espace fini W_K , nous ne sommes pas garantis que η_{sup} soit une borne supérieure. Néanmoins, les expériences numériques nous ont montré que c'était souvent le cas lorsque les maillages étaient choisis suffisamment fins.

4.2. Borne inférieure

La dérivation d'une borne inférieure repose sur l'observation suivante (voir démonstration dans [ODE 01]) :

$$\|e\|_B = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{R}_h(v)|}{\|v\|_B} \quad (43)$$

Nous en déduisons que toute fonction $\chi \in V$ fournit une borne inférieure η_{inf} à l'erreur puisque :

$$\eta_{\text{inf}} = \frac{|\mathcal{R}_h(\chi)|}{\|\chi\|_B} \leq \|e\|_B \quad (44)$$

Díez *et al.* ([DIE 03]) ont prouvé l'optimalité de η_{inf} ainsi calculée, une fois donnée la fonction χ . Bien sûr, le choix $\chi = \pm e$ donne une estimation exacte. En pratique, on choisit de construire une fonction continue χ à partir des fonctions locales ψ_K , solutions de (41), lesquelles sont discontinues à l'interface des éléments puisque calculées indépendamment les unes des autres. Cette procédure est expliquée en détail dans [PRU 01, PRU 03]. Des méthodes similaires sont également présentées dans [BAB 99, STR 00b, DIE 03].

4.3. Estimateurs pour le problème d'élasticité

Nous avons montré que l'erreur mesurée dans la quantité d'intérêt peut être représentée en fonction de $\|se + s^{-1}\varepsilon\|_B$ et $\|se - s^{-1}\varepsilon\|_B$, où $e = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ et $\varepsilon = \mathbf{w} - \mathbf{w}_h$. Puisque les problèmes primal et dual sont ici linéaires, nous pouvons bien sûr estimer e et ε individuellement et combiner les résultats pour estimer les quantités ci-dessus. Il suffit donc de trouver $\psi_K^u \in W_K$ et $\psi_K^w \in W_K$ telles que :

$$B_K(\psi_K^u, \mathbf{v}) = \mathcal{R}_K^u(\mathbf{v}) + \int_{\partial K} \mathbf{g}_{\gamma, K}^u \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad \forall \mathbf{v} \in W_K$$

$$B_K(\psi_K^w, \mathbf{v}) = \mathcal{R}_K^w(\mathbf{v}) + \int_{\partial K} \mathbf{g}_{\gamma, K}^w \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad \forall \mathbf{v} \in W_K$$

où \mathcal{R}_K^u et \mathcal{R}_K^w se réfèrent aux résiduels associés aux problèmes dual et primal respectivement :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_h^u(\mathbf{v}) &= F(\mathbf{v}) - B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \\ \mathcal{R}_h^w(\mathbf{v}) &= Q(\mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_h)\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire, les bornes “supérieures” à $\|s\boldsymbol{\varepsilon} + s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\|_B$ et $\|s\boldsymbol{\varepsilon} - s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\|_B$ sont données par :

$$\begin{aligned}\eta_{\text{sup}}^+ &= \sqrt{\sum_K B_K(s\boldsymbol{\psi}_K^u + s^{-1}\boldsymbol{\psi}_K^w, s\boldsymbol{\psi}_K^u + s^{-1}\boldsymbol{\psi}_K^w)} \\ \eta_{\text{sup}}^- &= \sqrt{\sum_K B_K(s\boldsymbol{\psi}_K^u - s^{-1}\boldsymbol{\psi}_K^w, s\boldsymbol{\psi}_K^u - s^{-1}\boldsymbol{\psi}_K^w)}\end{aligned}$$

avec :

$$s = \left(\sqrt{\sum_K B_K(\boldsymbol{\psi}_K^w, \boldsymbol{\psi}_K^w)} \right)^{1/2} / \left(\sqrt{\sum_K B_K(\boldsymbol{\psi}_K^u, \boldsymbol{\psi}_K^u)} \right)^{1/2}$$

Nous pouvons aussi construire des fonctions continues $\boldsymbol{\chi}^u$ et $\boldsymbol{\chi}^w$, de sorte que les combinaisons $s\boldsymbol{\chi}^u + s^{-1}\boldsymbol{\chi}^w$ et $s\boldsymbol{\chi}^u - s^{-1}\boldsymbol{\chi}^w$ soient dans V , et donc :

$$\begin{aligned}\eta_{\text{inf}}^+ &= \frac{|s\mathcal{R}_h^u(s\boldsymbol{\chi}^u + s^{-1}\boldsymbol{\chi}^w) + s^{-1}\mathcal{R}_h^w(s\boldsymbol{\chi}^u + s^{-1}\boldsymbol{\chi}^w)|}{\|s\boldsymbol{\chi}^u + s^{-1}\boldsymbol{\chi}^w\|_B} \\ \eta_{\text{inf}}^- &= \frac{|s\mathcal{R}_h^u(s\boldsymbol{\chi}^u - s^{-1}\boldsymbol{\chi}^w) - s^{-1}\mathcal{R}_h^w(s\boldsymbol{\chi}^u - s^{-1}\boldsymbol{\chi}^w)|}{\|s\boldsymbol{\chi}^u - s^{-1}\boldsymbol{\chi}^w\|_B}\end{aligned}$$

Si l'on suppose que η_{sup}^+ et η_{sup}^- sont des bornes supérieures garanties, nous obtenons alors les bornes supérieure et inférieure à l'erreur dans la quantité d'intérêt :

$$\eta_{\text{inf}}^Q \leq Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h) \leq \eta_{\text{sup}}^Q \quad (45)$$

où :

$$\boxed{\begin{aligned}\eta_{\text{inf}}^Q &= \frac{1}{4}(\eta_{\text{inf}}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{\text{sup}}^-)^2 \\ \eta_{\text{sup}}^Q &= \frac{1}{4}(\eta_{\text{sup}}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{\text{inf}}^-)^2\end{aligned}} \quad (46)$$

Nous pouvons également obtenir une estimation de $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h)$, soit en prenant la moyenne de η_{sup}^Q et η_{inf}^Q , soit en ne considérant que les bornes inférieures ou que les bornes supérieures, par exemple :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h) \approx \eta^Q = \frac{1}{4}(\eta_{\text{sup}}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{\text{sup}}^-)^2 \quad (47)$$

Nous observons alors dans ce dernier cas que :

$$\begin{aligned}
 \eta^Q &= \frac{1}{4} \sum_K B_K(s\psi_K^u + s^{-1}\psi_K^w, s\psi_K^u + s^{-1}\psi_K^w) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_K B_K(s\psi_K^u - s^{-1}\psi_K^w, s\psi_K^u - s^{-1}\psi_K^w) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_K 2B_K(\psi_K^u, \psi_K^w) + 2B_K(\psi_K^w, \psi_K^u) \\
 &= \sum_K B_K(\psi_K^u, \psi_K^w)
 \end{aligned}$$

REMARQUE. — Nous soulignons qu'il est possible de construire ici des bornes supérieure et inférieure car la forme bilinéaire est symétrique et définie positive. Certains des résultats ci-dessus ne peuvent donc être étendus à des cas plus généraux.

4.4. Estimateurs pour le problème de vibrations

Nous rappelons d'après le résultat (40) que l'erreur dans la valeur propre $\lambda - \lambda_h$ a été obtenue en fonction de l'erreur $\|e\|_B$ que nous estimons maintenant. En procédant comme précédemment, nous cherchons d'abord les fonctions élémentaires $\psi_K \in W_K$ telles que :

$$B_K(\psi_K, \mathbf{v}) = \mathcal{R}_K(\mathbf{v}) + \int_{\partial K} \mathbf{g}_{\gamma, K} \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad \forall \mathbf{v} \in W_K \quad (48)$$

où \mathcal{R}_K est la restriction à l'élément K du résiduel global :

$$\mathcal{R}_h(\mathbf{v}) = -B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - \lambda_h M(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \quad (49)$$

Nous notons que le résiduel ne dépend ici que de la variable \mathbf{v} puisque $M(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = 1$ lorsque $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$ est solution de (14). Une borne supérieure à $\|e\|_B$ est donnée comme auparavant par :

$$\eta_{\text{sup}} = \sqrt{\sum_K B_K(\psi_K, \psi_K)} \quad (50)$$

Une borne inférieure s'obtient après construction d'une fonction continue χ comme :

$$\eta_{\text{inf}} = \frac{|\mathcal{R}_h(\chi)|}{\|\chi\|_B} \quad (51)$$

En définissant $\eta_{\text{inf}}^\lambda = -\eta_{\text{sup}}^2$ et $\eta_{\text{sup}}^\lambda = -\eta_{\text{inf}}^2$, nous avons alors l'encadrement suivant :

$$\eta_{\text{inf}}^\lambda \leq \lambda - \lambda_h \leq \eta_{\text{sup}}^\lambda \quad (52)$$

REMARQUE. — L'erreur dans la fréquence propre $f_h = \sqrt{\lambda_h}/(2\pi)$ peut se déduire de l'erreur dans la valeur propre λ_h en utilisant un développement limité de Taylor ; nous avons alors :

$$f - f_h \approx \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_h}}(\lambda - \lambda_h) = \frac{1}{8\pi^2 f_h}(\lambda - \lambda_h) \quad (53)$$

et les bornes sur l'erreur en fréquence sont données par :

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_{\text{inf}}^f &= -\frac{1}{8\pi^2 f_h} \eta_{\text{sup}}^2 \\ \eta_{\text{sup}}^f &= -\frac{1}{8\pi^2 f_h} \eta_{\text{inf}}^2 \end{aligned}} \quad (54)$$

Nous aurions pu obtenir ce résultat en considérant $Q((\mathbf{u}, \lambda)) = \sqrt{\lambda}/(2\pi) = f$ au lieu de $Q((\mathbf{u}, \lambda)) = \lambda$.

5. Applications numériques

Nous présentons ici quelques applications numériques afin d'illustrer les résultats théoriques développés dans les sections précédentes. Nous avons considéré un problème de poutre encastree, un problème faisant intervenir un bras de contrôle, ainsi qu'une plaque plane pour des problèmes de vibrations. Ces exemples ont été déjà partiellement présentés dans [PRU 03, ODE 03].

Auparavant, nous souhaitons commencer par quelques commentaires quant à la sélection des espaces locaux W_K définis sur chaque élément K . Il est clair que la dimension de ces espaces, c'est-à-dire le nombre de fonctions de forme (à multiplier par trois puisque le vecteur déplacement comprend trois composantes) qui seront utilisées pour résoudre les problèmes auxiliaires (41), influenceront directement le coût de l'estimateur d'erreur. Dans un souci d'économie, il est donc souhaitable de minimiser le nombre de ces fonctions, tout en s'assurant que la précision de la borne supérieure ne s'en trouve pas excessivement détériorée. Dans le cas de fonctions hiérarchiques, nous ne prenons en général que les fonctions du type arête de degré $p + 1$ où p est le degré choisi pour calculer \mathbf{u}_h ou \mathbf{w}_h . Puisque un hexaèdre présente douze arêtes, nous avons donc douze fonctions d'arête quelle que soit la valeur de p . A titre de comparaison, la dimension de l'espace complet des fonctions bulles de degré $p + 1$ (toutes les fonctions associées aux arêtes et faces, ainsi que celles définies sur l'intérieur de l'élément) est donnée par la formule $(p + 2)^3 - (p + 1)^3 = 3p^2 + 9p + 7$. Ainsi pour $p = 1$, nous disposerions de 19 fonctions, mais pour $p = 3$, de 61 fonctions, d'où un coût supplémentaire non négligeable. Nous présentons dans le cas de la poutre encastree un exemple qui illustre l'influence du choix de W_K .

Maillage	Borne inf. (arêtes)	Borne sup. (arêtes)	Borne sup. (bulles)	Estimateur (arêtes)	Erreur "exacte" $Q(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$
$4 \times 1 \times 2$	0.201	0.269	0.351	0.235	0.380
$8 \times 1 \times 2$	0.095	0.149	0.213	0.122	0.168
$16 \times 2 \times 4$	0.022	0.052	0.084	0.036	0.054
$32 \times 4 \times 8$	0.002	0.013	0.021	0.007	0.015

Tableau 1. Valeurs et bornes estimées de l'erreur dans le déplacement u_z au point $\mathbf{x}_0 = (10, 0.5, 1)$ en utilisant les fonctions d'arête seulement ou l'ensemble des fonctions bulles

5.1. Poutre encastrée

Nous considérons ici une poutre occupant le volume $10 \times 1 \times 2$. Nous précisons que les quantités présentées ici seront toutes prises sans dimension. Les coordonnées des points sont définies par rapport à l'origine, choisie comme le coin de la poutre situé le plus bas sur les figures 1 et 2. La poutre est fixée sur la frontière $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, et est soumise à une densité surfacique d'effort uniforme $P = 100$ agissant verticalement sur la partie supérieure de la poutre. Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont donnés par $E = 2 \times 10^6$ et $\nu = 0.3$. Pour les calculs, nous avons construit quatre maillages uniformes composés d'éléments tri-linéaires de type hexaèdres, le premier maillage contenant 8 éléments ($4 \times 1 \times 2$), le deuxième 16 éléments ($8 \times 1 \times 2$), le troisième 128 éléments ($16 \times 2 \times 4$), et le dernier 1024 éléments ($32 \times 4 \times 8$).

Nous nous intéressons ici au déplacement u_z au point $\mathbf{x}_0 = (10, 0.5, 1)$ et à la composante de contrainte σ_{xx} au point $\mathbf{x}_0 = (5, 0.5, 2)$. Par valeur de u_z et de σ_{xx} en un point donné \mathbf{x}_0 , nous considérons en fait des moyennes pondérées locales au voisinage de \mathbf{x}_0 , par exemple :

$$u_z(\mathbf{x}_0) \approx Q(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} u_z(\mathbf{x}) k_{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \, dx$$

$$\sigma_{xx}(\mathbf{x}_0) \approx Q(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{xx}(\mathbf{x}) k_{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \, dx$$

avec k_{ε} définie par $k_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = C \exp(|\mathbf{x}|^2/\varepsilon^2 - 1)^{-1}$ si $|\mathbf{x}| < \varepsilon$ et $k_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = 0$ sinon. La constante C est choisie afin de normaliser la fonction k_{ε} , et la valeur de ε est prise de l'ordre de la taille des éléments au voisinage de \mathbf{x}_0 .

Les valeurs et bornes estimées de l'erreur sont présentées dans le tableau 1 pour u_z et dans le tableau 2 pour σ_{xx} . Dans le cas de u_z , nous donnons les bornes supérieures à l'erreur calculées lorsque l'ensemble W_K comprend d'une part, les fonctions d'arête seulement, d'autre part toutes les fonctions bulles. Nous observons que les bornes supérieures ne sont pas nécessairement garanties dans le premier cas, bien que les

Maillage	Borne inf.	Borne sup.	Estimateur	Erreur "exacte"
$4 \times 1 \times 2$	-1041	547	-247	-308
$8 \times 1 \times 2$	-1899	1132	-134	-125
$16 \times 2 \times 4$	-1357	1251	-52	-39
$32 \times 4 \times 8$	-685	655	-15	-10

Tableau 2. Valeurs et bornes estimées de l'erreur dans la composante de contrainte σ_{xx} au point $\mathbf{x}_0 = (5, 0.5, 2)$ en utilisant les fonctions d'arête seulement

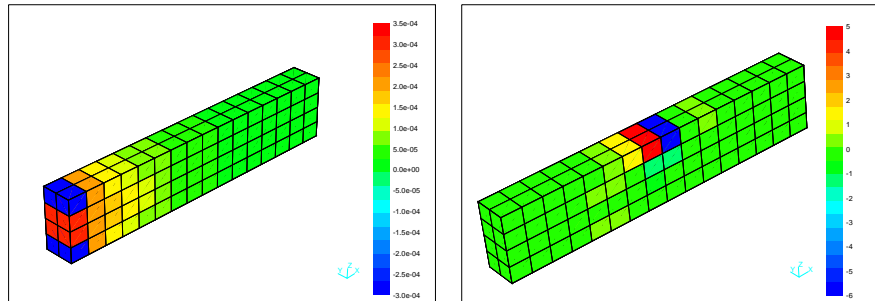


Figure 1. Distribution des contributions à l'erreur dans la grandeur u_z au point $\mathbf{x}_0 = (10, 0.5, 1)$ (à gauche) et dans la grandeur σ_{xx} au point $\mathbf{x}_0 = (5, 0.5, 2)$ (à droite)

valeurs soient très proches de l'erreur exacte, mais qu'elles le sont dans le deuxième cas lorsque le maillage devient suffisamment fin. Dans la pratique, il convient donc de trouver un juste équilibre entre coût de calcul et précision. Dans le cas de la composante de contrainte σ_{xx} , il est à noter que les bornes ne sont pas toujours précises mais que leur valeur moyennée, *i.e.* l'estimateur, est une excellente approximation de l'erreur "exacte" calculée. Ici, et dans les expériences numériques qui suivent, l'erreur "exacte" est estimée en calculant une approximation de la solution sur un maillage très fin.

Finalement, la figure 1 montre la distribution par élément des erreurs obtenue sur le maillage ($16 \times 2 \times 4$). Ces distributions d'erreur sont à comparer aux solutions duales pour le déplacement u_z et pour la composante de contrainte σ_{xx} (voir figure 2). Celles-ci indiquent en effet que la valeur du déplacement u_z à l'extrémité libre de la poutre dépend très fortement de la précision obtenue à l'autre extrémité. En d'autres termes, cela signifie que les sources d'erreur peuvent affecter l'erreur dans le déplacement en se propageant à travers toute la poutre. La solution duale pour la quantité σ_{xx} montre au contraire que l'influence est beaucoup plus locale.

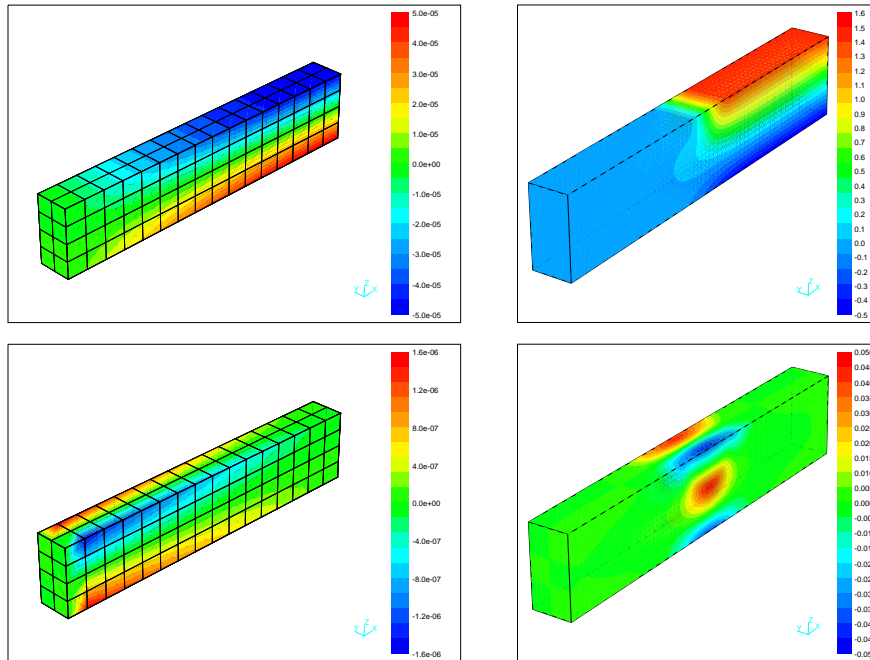


Figure 2. Solutions duales dans la direction x (en haut) et dans la direction y (en bas) associées à la grandeur u_z au point $(10, 0.5, 1)$ (à gauche) et à la grandeur σ_{xx} au point $(5, 0.5, 2)$

5.2. Bras de contrôle

Dans cet exemple, nous simulons un bras de contrôle soumis au cas de charge indiqué par les flèches pointant sur l'anneau supérieur, et à des déplacements nuls appliqués sur les anneaux inférieurs, comme montré sur le graphe placé sur le côté supérieur gauche de la figure 3. Nous considérons ici un seul maillage (voir figure 3) de 232 éléments isoparamétriques $Q2$. D'autre part, nous supposons que le bras de contrôle est réalisé dans un matériau dont les propriétés sont données par $E = 1.2 \times 10^6$ et $\nu = 0.3$.

L'objectif de la simulation est d'estimer la valeur de la composante de contrainte σ_{xx} au point x_0 . Ce point se trouve en fait à l'intérieur d'un élément situé en bordure du trou central. La valeur "exacte" de cette quantité est calculée sur le même maillage en utilisant des polynômes de degré quatre et vaut 70.405. Pour la solution éléments finis u_h , nous trouvons une erreur dans la contrainte (moyennée localement autour de x_0) de 5.099, soit une erreur relative de 7.24 pourcent. Les calculs *a posteriori* produisent une borne inférieure de -21.123 , une borne supérieure de 30.848, et leur valeur moyennée de 4.862. Nous observons que cette dernière valeur est une très

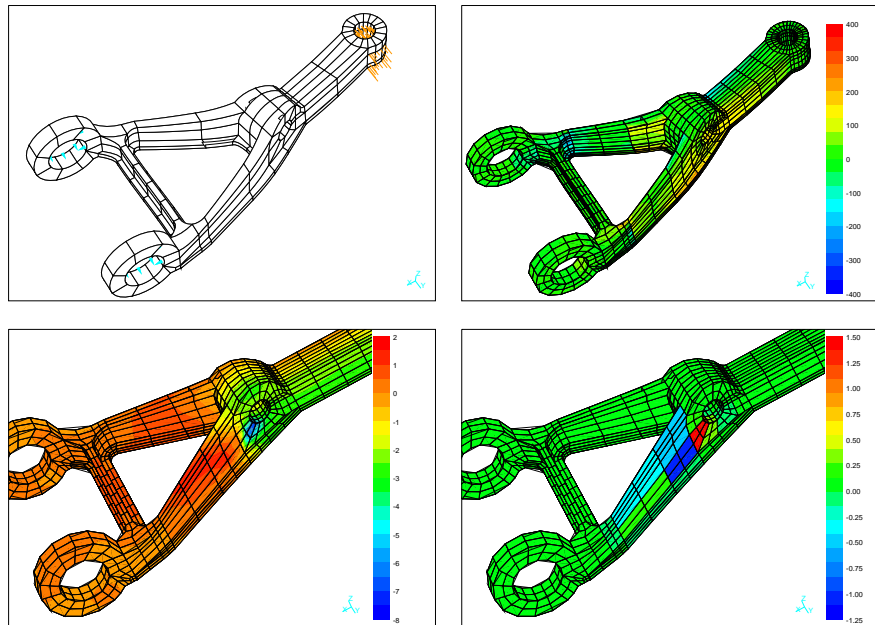


Figure 3. Géométrie du bras de contrôle et visualisation des déformations sous le présent cas de charge (en haut, à gauche), composante σ_{xx} du champ de contrainte (en haut, à droite), fonction duale dans la direction x associée à σ_{xx} au point \mathbf{x}_0 (en bas, à gauche), et distribution des contributions à l'erreur dans σ_{xx} au point \mathbf{x}_0 (en bas, à droite)

bonne estimation de l'erreur "exacte". Sur la figure 3, nous montrons également le champ de contrainte σ_{xx} et la solution duale associée à σ_{xx} au point \mathbf{x}_0 . D'autre part, nous observons que la distribution des contributions à l'erreur relative à cette quantité reste dominante à proximité du point \mathbf{x}_0 .

5.3. Vibrations d'une plaque plane

Nous considérons ici une plaque plane mince de dimension 3×2 et d'épaisseur $t = 0.02$, réalisée dans un matériau dont les propriétés sont $E = 200 \times 10^9$, $\nu = 0.27$, et $\rho = 7849$. Dans cette étude, la plaque est supposée encastree le long de ses côtés. Nous avons construit deux maillages, l'un de $N_e = 16 \times 16$ et l'autre de $N_e = 24 \times 16$ éléments (dans les directions x et y), avec un unique élément à travers l'épaisseur de la plaque (direction z). De plus, les éléments sont choisis linéaires ($p_z = 1$) dans la direction z , et linéaires ($p = 1$) ou quadratiques ($p = 2$) dans les directions x et y .

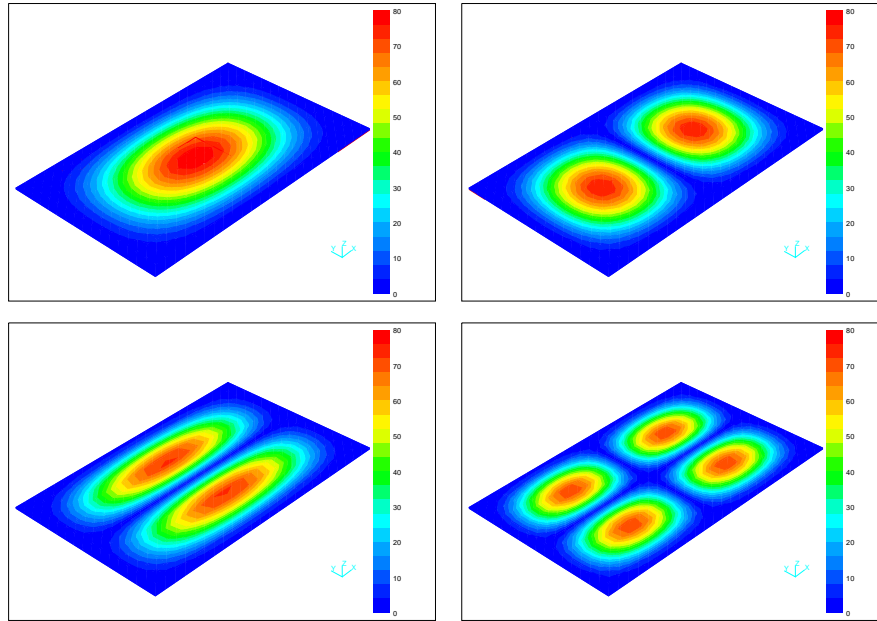


Figure 4. Modes propres associés aux fréquences f_1 (en haut, à gauche), f_2 (en haut, à droite), f_3 (en bas, à gauche) et f_5 (en bas, à droite)

Nous nous intéressons ici aux cinq premières fréquences propres de ce système que nous notons f_i , $i = 1, \dots, 5$. Les modes propres associés à f_1 , f_2 , f_3 , et f_5 sont montrés sur la figure 4 (en fait est montrée l'intensité du déplacement des modes propres). Les valeurs exactes f_i sont calculées de manière précise sur le maillage fin 24×16 en prenant $p = 3$ et $p_z = 2$. Nous trouvons alors $f_1 = 32.571$, $f_2 = 50.271$, $f_3 = 79.702$, $f_4 = 80.140$, et $f_5 = 96.147$, lesquelles valeurs seront utilisées pour évaluer la qualité des estimateurs d'erreur.

Nous reportons dans les tableaux 3, 4, et 5 les résultats obtenus dans trois cas différents : 1) $N_e = 16 \times 16$ avec $p = 1$, 2) $N_e = 24 \times 16$ avec $p = 1$, et 3) $N_e = 24 \times 16$ avec $p = 2$. Pour faciliter la lecture des résultats, nous ne montrons que les fréquences propres discrètes f_h , l'estimateur d'erreur $\eta^f = (\eta_{\text{inf}}^f + \eta_{\text{sup}}^f)/2$, l'indice d'efficacité de η_f défini comme le rapport entre l'estimateur η_f et la valeur exacte de l'erreur, ainsi que les bornes inférieures et supérieures sur les fréquences, c'est-à-dire $f_h + \eta_{\text{inf}}^f$ et $f_h + \eta_{\text{sup}}^f$. Nous observons dans les deux premiers cas (voir tableaux 3 et 4) que les fréquences discrètes f_h obtenues sont peu précises avec des erreurs relatives qui atteignent jusqu'à 360 pourcent. Néanmoins, nous remarquons que η_f fournit des estimations voisines de l'erreur exacte, puisque l'indice d'efficacité varie entre 0.80 à 1.23 et les bornes encadrent plus fidèlement l'erreur sur le maillage 24×16 .

Fréquences	$N_e = 16 \times 16, p = 1$				
	f_h	η^f	λ_{eff}	Borne inf. à f_h	Borne sup. à f_h
f_1	127.60	-106.18	1.12	-24.20	67.05
f_2	222.08	-142.38	0.82	32.44	126.96
f_3	304.81	-277.53	1.23	-115.86	170.41
f_4	357.12	-288.94	1.04	-70.24	206.59
f_5	401.03	-242.96	0.80	94.80	221.34

Tableau 3. Fréquences discrètes f_h , estimateurs d'erreur η_f avec indice d'efficacité λ_{eff} , et encadrement des fréquences exactes sur le maillage 16×16 avec $p = 1$

Fréquences	$N_e = 24 \times 16, p = 1$				
	f_h	η^f	λ_{eff}	Borne inf. à f_h	Borne sup. à f_h
f_1	117.05	-75.53	0.89	18.81	64.24
f_2	170.52	-103.98	0.86	37.09	95.99
f_3	281.51	-167.69	0.83	66.16	161.48
f_4	300.55	-195.39	0.89	40.22	170.08
f_5	327.60	-208.85	0.90	51.65	185.83

Tableau 4. Fréquences discrètes f_h , estimateurs d'erreur η_f avec indice d'efficacité λ_{eff} , et encadrement des fréquences exactes sur le maillage 24×16 avec $p = 1$

Fréquences	$N_e = 24 \times 16, p = 2$				
	f_h	η^f	λ_{eff}	Borne inf. à f_h	Borne sup. à f_h
f_1	35.15	-2.45	0.95	32.70	32.71
f_2	54.29	-3.78	0.94	50.50	50.51
f_3	86.57	-6.14	0.89	80.41	80.45
f_4	86.80	-6.09	0.91	80.69	80.73
f_5	104.27	-7.37	0.91	96.88	96.93

Tableau 5. Fréquences discrètes f_h , estimateurs d'erreur η_f avec indice d'efficacité λ_{eff} , et encadrement des fréquences exactes sur le maillage 24×16 avec $p = 2$

Dans le troisième cas (voir tableau 5), les fréquences discrètes obtenues sont clairement plus précises. Les erreurs relatives sont maintenant de l'ordre de 8.50 pourcent.

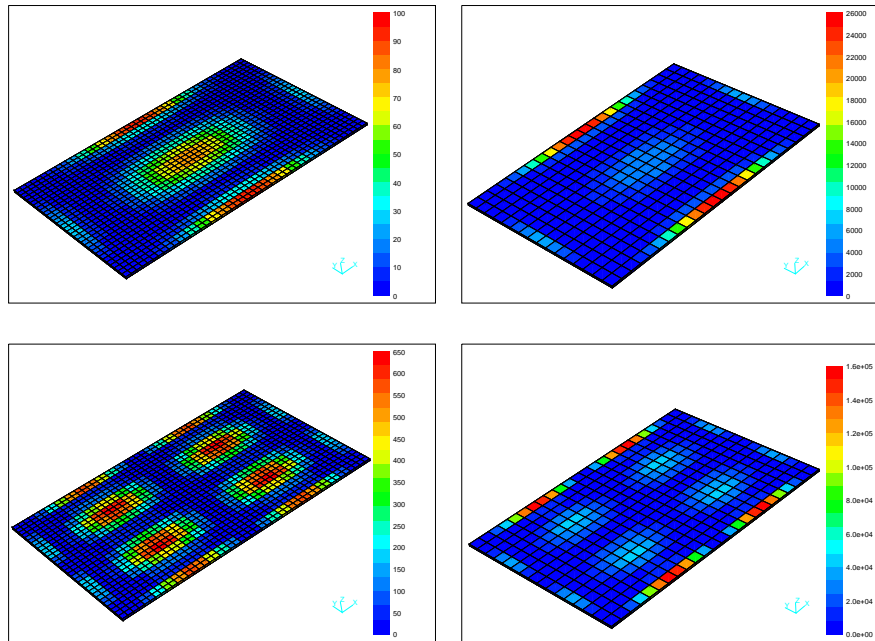


Figure 5. Distribution des contributions à l'erreur dans f_1 (en haut) et dans f_5 (en bas) en utilisant $p = 2$ (à gauche) et $p = 1$ (à droite)

Les indices d'efficacité de η^f sont néanmoins toujours très bons, et les bornes supérieures aux fréquences proches des valeurs exactes. En revanche, nous observons que les bornes inférieures ne sont plus garanties puisque les estimateurs η_{sup} (c.f. (50)) ont été calculés en ne prenant que les fonctions d'arrêt de degré $p + 1$.

Finalement, nous montrons sur la figure 5 la distribution des contributions à l'erreur pour f_1 et f_5 . Ces distributions sont à comparer bien sûr aux modes propres de la figure 4. Nous observons toutefois des contributions plus importantes le long des frontières dans le cas $p = 1$ par rapport au cas $p = 2$, où celles-ci semblent mieux réparties entre intérieur du domaine et frontières.

6. Conclusion

Nous avons décrit dans cette notice une approche pour l'obtention d'estimateurs et de bornes sur l'erreur dans une grandeur spécifiée dans le cadre de problèmes d'élasticité linéaire et de vibrations. Nous avons présenté quelques exemples où l'erreur dans une composante du déplacement ou de la contrainte en un point donné du corps solide, ou bien encore dans une fréquence, est estimée avec une précision raisonnable. Ces résultats suggèrent que l'estimation d'erreur dans des grandeurs spécifiées pourrait

fournir de nouveaux outils qui assureraient un meilleur contrôle de la précision dans les calculs de simulation ou de design par éléments finis. En outre, les estimateurs présentés ici ont la particularité d'être construits à partir d'estimateurs d'erreur dans la norme en énergie. Cette approche a l'avantage, si l'on souhaite incorporer l'estimation d'erreur dans des quantités d'intérêt dans un code éléments finis existant, de minimiser les transformations à y réaliser, si celui-ci bien sûr possède déjà un estimateur d'erreur global par la méthode résiduelle ou de lissage.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Dr. Mark Botkin de la division *Vehicle Analysis and Dynamics Laboratory*, au sein du Centre de Recherche et Développement de General Motors Corporation, pour le vif intérêt porté à ces travaux et pour le support financier sous le contrat P.O. TCS76717. Le support financier de l'Office of Naval Research sous le contrat N00014-95-0401 est aussi remercié. Ils souhaitent également remercier Tim Westermann et Dr. Jon Bass d'Altair Engineering Inc. pour l'aide technique apportée au développement des applications numériques.

7. Bibliographie

- [AIN 97] AINSWORTH M., ODEN J. T., « *A posteriori* error estimation in finite element analysis », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 142, n° 1–2, 1997, p. 1–88.
- [AIN 00] AINSWORTH M., ODEN J. T., *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 2000.
- [BAB 99] BABUŠKA I., STROUBOULIS T., GANGARAJ S. K., « Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solution Part I : One-dimensional model problem », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 176, 1999, p. 51–79.
- [BAB 01] BABUŠKA I., STROUBOULIS T., *The Finite Element Method and its Reliability*, Oxford University Press, 2001.
- [BAN 85] BANK R. E., WEISER A., « Some *a posteriori* error estimators for elliptic partial differential equations », *Math. Comp.*, vol. 44, n° 170, 1985, p. 283–301.
- [BEC 96] BECKER R., RANNACHER R., « A feedback approach to error control in finite elements methods : Basic analysis and examples », *East-West J. Numer. Math.*, vol. 4, 1996, p. 237–264.
- [BEC 01] BECKER R., RANNACHER R., « An optimal control approach to *a posteriori* error estimation in finite element methods », *Acta Numerica*, vol. 19, 2001, p. 1–102.
- [BON 02] BONET J., HUERTA A., PERAIRE J., « The efficient computation of bounds for functionals of finite element solutions in large strain elasticity », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 191, n° 43, 2002, p. 4807–4826.
- [CAR 00] CARSTENSEN C., FUNKEN S. A., « Fully reliable localized error control in the FEM », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, n° 4, 2000, p. 1465–1484.
- [CHA 99] CHARPENTIER I., MADAY Y., PATERA A. T., « Bounds evaluation for outputs of eigenvalue problems approximated by the overlapping modal synthesis method », *C. R.*

- Acad. Sci. Paris – Série I*, vol. 329, 1999, p. 909–914.
- [CIR 98] CIRAK F., RAMM E., « *A posteriori* error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 156, n° 1–4, 1998, p. 351–362.
- [DIE 03] DÍEZ P., PARÉS N., HUERTA A., « Recovering lower bounds of the error by post-processing implicit residual *a posteriori* error estimates », *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 56, n° 10, 2003, p. 1465–1488.
- [ERI 95] ERIKSSON K., ESTEP D., HANSBO P., JOHNSON C., « Introduction to adaptive methods for differential equations », *Acta Numerica*, vol. 4, 1995, p. 105–158.
- [GAR 84] GARTLAND, JR. E. C., « Computable pointwise error bounds and the Ritz method in one dimension », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 21, n° 1, 1984, p. 84–100.
- [JOH 92] JOHNSON C., HANSBO P., « Adaptive finite element methods in computational mechanics », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 101, n° 1–3, 1992, p. 143–181.
- [LAD 01] LADEVÈZE P., PELLE J.-P., *La Maîtrise du Calcul en Mécanique Linéaire et Non Linéaire*, Hermès, 2001.
- [LAR 02] LARSSON F., HANSBO P., RUNESSON K., « Strategies for computing goal-oriented *a posteriori* error measures in non-linear elasticity », *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 55, n° 8, 2002, p. 879–894.
- [MAD 99] MADAY Y., PATERA A. T., PERAIRE J., « A general formulation for *a posteriori* bounds for output functionals of partial differential equations ; application to the eigenvalue problem », *C. R. Acad. Sci. Paris – Série I*, vol. 328, 1999, p. 823–828.
- [MOR 01] MORIN P., NOCHETTO R. H., SIEBERT K. G., « Local problems on stars : A *a posteriori* error estimators, convergence, and performance », *Math. Comp.*, vol. 72, n° 243, 2003, p. 1067–1097.
- [ODE 00] ODEN J. T., VEMAGANTI K., « Estimation of local modeling error and goal-oriented modeling of heterogeneous materials ; Part I : error estimates and adaptive algorithms », *Journal of Computational Physics*, vol. 164, 2000, p. 22–47.
- [ODE 01] ODEN J. T., PRUDHOMME S., « Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method », *Computers Math. Applic.*, vol. 41, n° 5–6, 2001, p. 735–756.
- [ODE 02] ODEN J. T., PRUDHOMME S., « Estimation of modeling error in computational Mechanics », *Journal of Computational Physics*, vol. 182, 2002, p. 496–515.
- [ODE 03] ODEN J. T., PRUDHOMME S., WESTERMANN T., BASS J., BOTKIN M. E., « Estimation of eigenfrequencies for elasticity and shell problems », *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 13, n° 3, 2003, p. 323–344.
- [PAR 97] PARASCHIVOIU M., PERAIRE J., PATERA A. T., « *A posteriori* finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 150, 1997, p. 289–312.
- [PRU 01] PRUDHOMME S., ODEN J. T., « Simple techniques to improve the reliability of *a posteriori* error estimates for finite element approximations », *Proceedings of the 2nd European Conference on Computational Mechanics, ECCOMAS & IACM*, Cracow, 2001.
- [PRU 03] PRUDHOMME S., ODEN J. T., WESTERMANN T., BASS J., BOTKIN M. E., « Practical methods for *a posteriori* error estimation in engineering applications », *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 56, n° 8, 2003, p. 1193–1224.

- [RAN 98] RANNACHER R., STUTTMEIER F. T., « *A posteriori* error control in finite element methods via duality techniques : Application to perfect plasticity », *Comp. Mech.*, vol. 21, 1998, p. 123–133.
- [STR 00a] STROUBOULIS T., BABUŠKA I., DATTA D. K., COPPS K., GANGARAJ S. K., « *A posteriori* estimation and adaptive control of the error in the quantity of interest. Part I : *A posteriori* estimation of the error in the von Mises stress and the stress intensity factor », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 181, 2000, p. 261–294.
- [STR 00b] STROUBOULIS T., BABUŠKA I., GANGARAJ S. K., « Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solution – Part II : bounds for the energy norm of the error in two dimensions », *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 47, 2000, p. 427–475.
- [VER 96] VERFÜRTH R., *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-refinement Techniques*, Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.
- [WAL 01] WALSH T., DEMKOWICZ L., « hp boundary element modeling of the external human auditory system - Goal oriented adaptivity with multiple load vectors », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 192, n° 1–2, 2003, p. 125–146.
- [ZIE 92a] ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., « The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1 : the recovery technique », *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 33, 1992, p. 1331–1364.
- [ZIE 92b] ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., « The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 2 : error estimates and adaptivity », *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 33, 1992, p. 1365–1382.