
Modèles équilibre pour l'analyse duale

Martin Kempeneers* — **Pierre Beckers***
José Paulo Moitinho de Almeida**
Orlando J. B. Almeida Pereira**

** Département AéroSpatiale Mécanique et mAtériaux (ASMA)
Université de Liège
Institut de Mécanique et Génie Civil (B52)
1, Chemin des Chevreuils – 4000 Liège (Belgique)
{m.kempeneers, pierre.beckers}@ulg.ac.be*

*** Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa (Portugal)
{moitinho, orlando}@civil.ist.utl.pt*

RÉSUMÉ. L'analyse duale pure a été l'une des premières méthodes utilisées pour estimer l'erreur de discrétisation globale commise lors d'un calcul par éléments finis. Elle repose sur la comparaison de deux solutions éléments finis, la première obtenue à partir d'un modèle cinématiquement admissible classique et la seconde issue d'un modèle statiquement admissible (approche de type équilibre). Nous présentons dans ce travail deux méthodes permettant de créer des éléments équilibre. La première qui peut être qualifiée d'hybride, permet d'étudier des problèmes bidimensionnels avec des éléments équilibre de degré élevé. La seconde, pour laquelle nous présentons dans ce travail l'extension récente aux problèmes 3D à maillages tétraédriques, est de type équilibre pur. Ces deux approches nous ont permis de présenter quelques résultats d'estimation de l'erreur globale par analyse duale.

ABSTRACT. The pure dual analysis is one of the first methods developed to perform the estimation of the global discretization error of finite elements analysis. It is based on the comparison of two finite elements solutions, one of which being of the displacement type (kinematically admissible), the second one being of the equilibrium type (statically admissible). This work presents two methods allowing to create equilibrium elements. The first one which can be seen as an hybrid method, allows to compute high-order equilibrium solutions of 2D problems. The second method is of the pure equilibrium type. Its recent extension to 3D problems with tetrahedral mesh is presented here. Those approaches enabled us to present some results of global error estimation by dual analysis.

MOTS-CLÉS : estimation d'erreur globale, analyse duale, modèles équilibre.

KEYWORDS: global error estimation, dual analysis, equilibrium models.

1. Introduction

L'estimation d'erreur d'un calcul éléments finis par analyse duale a été proposée pour la première fois dans les années 60 par Fraeijs de Veubeke (Fraeijs de Veubeke, 1964). La méthode repose sur la comparaison de deux solutions, la première obtenue à partir d'un modèle cinématiquement admissible (ou modèle déplacement) et la seconde issue d'un modèle statiquement admissible (ou modèle équilibre). Bien que cette méthode fournisse une borne supérieure sur l'erreur globale très fiable, la nécessité d'une double analyse a longtemps été un obstacle à son développement.

Actuellement, l'augmentation des puissances de calcul et le développement des ordinateurs multiprocesseurs qui permettent de mener les deux analyses en parallèle, conduisent cependant à un regain d'intérêt pour cette méthode. La connaissance presque simultanée des deux solutions permet en effet d'estimer l'erreur directement à la fin du calcul éléments finis, sans devoir passer par une étape de post-traitement des solutions (construction d'un champ de contraintes admissible) qui peut parfois se révéler fort coûteuse.

Malheureusement, si les modèles cinématiquement admissibles sont ceux sur lesquels reposent la quasi-entière des codes éléments finis actuels et sont par conséquent très bien maîtrisés, les modèles équilibre n'ont pas connu pareil succès, en partie à cause de leur plus grande complexité. Il reste par conséquent beaucoup à explorer dans ce domaine.

Ce travail présente deux approches différentes permettant de créer des éléments statiquement admissibles. La première, mise en œuvre ici dans le cas particulier de structures bidimensionnelles à maillages triangulaires, repose sur une discrétisation à la fois du champ de contraintes à l'intérieur d'un élément et du champ de déplacements sur ses bords (Moitinho de Almeida, 1989) et (Moitinho de Almeida *et al.*, 1991). C'est la raison pour laquelle les éléments créés par cette approche sont généralement qualifiés d'*éléments équilibre hybrides*. La seconde est basée sur une approche équilibre pure plus classique, sa mise en œuvre dans le cas de structures tridimensionnelles à maillages tétraédriques est très récente (Pasteels, 2001) et (Beckers *et al.*, 2002).

La principale difficulté inhérente aux modèles équilibre est l'apparition de modes cinématiques internes. Ces modes correspondent à des singularités parasites de la matrice de raideur qui apparaissent en plus des modes rigides. Les deux approches envisagées y sont sensibles et la recherche d'une solution doit passer par un contrôle préalable de ces modes parasites. Une méthode de contrôle des modes cinématiques internes consiste à les éliminer au moment de la résolution du système éléments finis en les détectant à l'aide d'un « *solver* » adéquat. La méthode de contrôle présentée ici consiste à éliminer ces modes en amont de la création du système éléments finis global en les bloquant au niveau élémentaire par la technique des super-éléments qui peut également être considérée comme une méthode de

découpage. Ce processus consiste à remplacer chaque élément par un assemblage dans lequel les modes cinématiques sont bloqués. La technique des super-éléments présente le gros avantage de pouvoir s'intégrer dans un code éléments finis standard.

2. Notations

Si on divise la frontière Γ d'un domaine Ω en deux parties Γ_u et Γ_t sur lesquelles sont respectivement imposées des conditions aux limites cinématiques et statiques, les équations de l'élasticité peuvent s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante :

Equations constitutives du matériau :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

Equations de compatibilité :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} u \quad \text{dans } \Omega \quad (2)$$

$$u = u_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (3)$$

Equations d'équilibre :

$$\mathbf{d}^T \boldsymbol{\sigma} + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4)$$

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = t_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (5)$$

\mathbf{H} la matrice de Hooke du matériau considéré.

\mathbf{d} et \mathbf{N} respectivement les opérateurs de gradient et de surface.

Appelons U l'énergie de déformation du domaine Ω :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega .$$

Soit $ET(u)$ et $EC(\boldsymbol{\sigma})$ respectivement l'énergie potentielle totale du champ u et l'énergie complémentaire totale du champ $\boldsymbol{\sigma}$:

$$ET(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Omega} f^T u \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} t_\Gamma^T u \, d\Gamma . \quad (6)$$

$$EC(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma})^T u_\Gamma \, d\Gamma . \quad (7)$$

On définit la norme énergétique de la manière suivante :

$$\| \bullet \| = \sqrt{2U(\bullet)} .$$

3. Analyse duale et estimateur d'erreur globale

L'analyse duale telle que présentée par Beckers et Debonnie dans (Debonnie *et al.*, 1995 et (Debonnie *et al.*, 1999) permet de déterminer une borne supérieure sur la norme énergétique de l'erreur globale commise par une analyse éléments finis.

Soit (u_{ex}, σ_{ex}) la solution exacte d'un problème donné. On peut montrer que si on appelle $\Delta u = u_h - u_{ex}$ l'erreur sur une solution approchée cinématiquement admissible u_h et $\Delta \sigma = \sigma_h - \sigma_{ex}$ celle sur une solution approchée statiquement admissible σ_h , on a toujours :

$$\|\Delta u\|^2 = 2[ET(u_h) - ET(u_{ex})] \quad (8)$$

$$\text{et } \|\Delta \sigma\|^2 = 2[EC(\sigma_h) - EC(\sigma_{ex})] \quad (9)$$

D'autre part, on peut montrer également que :

$$ET(u_{ex}) + EC(\sigma_{ex}) = 0 \quad (10)$$

Les relations (8), (9) et (10) conduisent immédiatement à la relation fondamentale de l'analyse duale définissant une borne supérieure de l'erreur absolue globale pour chacune des deux solutions :

$$\left. \begin{array}{l} \|\Delta u\| \\ \|\Delta \sigma\| \end{array} \right\} \leq \left[\|\Delta u\|^2 + \|\Delta \sigma\|^2 \right]^{1/2} = \left\{ 2[ET(u_h) + EC(\sigma_h)] \right\}^{1/2} \quad (11)$$

On obtient une mesure de l'erreur relative *E.R.* en comparant (11) à la norme énergétique de la solution exacte :

$$[2U(u_{ex})]^{1/2} = [2U(\sigma_{ex})]^{1/2} \cong [U(u_h) + U(\sigma_h)]^{1/2}$$

Et ainsi,

$$E.R. = \left\{ \frac{2[ET(u_h) + EC(\sigma_h)]}{U(u_h) + U(\sigma_h)} \right\}^{1/2} \quad (12)$$

La qualité d'un estimateur d'erreur global est mesurée par son indice d'effectivité θ qui est, par définition, le rapport entre les normes énergétiques de l'erreur absolue estimée et de l'erreur absolue exacte. Quand la solution exacte n'est pas disponible, on la remplace par une solution de référence supposée suffisamment proche.

Dans le cas présent, on définit donc deux indices d'effectivité θ_c et θ_s , représentant respectivement la qualité de l'estimation de l'erreur sur la solution cinématiquement admissible et sur la solution statiquement admissible.

$$\theta_c = \left\{ \frac{ET(u_h) + EC(\sigma_h)}{ET(u_h) + EC(\sigma_{ex})} \right\}^{1/2} \quad \text{et} \quad \theta_s = \left\{ \frac{ET(u_h) + EC(\sigma_h)}{ET(u_{ex}) + EC(\sigma_h)} \right\}^{1/2} \quad (13)$$

4. Formulation équilibre hybride 2D

4.1. Discrétisation

4.1.1. Champ de contraintes

On peut discrétiser le champ de contraintes à l'intérieur d'un élément $\Omega_{(i)}$:

$$\sigma_{(i)} = S_{(i)} \hat{s}_{(i)} + \sigma_{0,(i)},$$

avec $S_{(i)}$ la matrice des fonctions d'approximation des contraintes, $\hat{s}_{(i)}$ les contraintes généralisées et $\sigma_{0,(i)}$ le terme prenant en compte les éventuelles contraintes initiales (par exemple dues à la présence de forces de volume).

En choisissant des fonctions d'approximation vérifiant la forme homogène des équations d'équilibre de volume (4) et si $\sigma_{0,(i)}$ est une solution particulière de ces mêmes équations, on définit un champ de contraintes vérifiant *a priori* les équations d'équilibre en volume. Afin de simplifier les calculs qui suivent, nous nous placerons dans le cas d'efforts volumiques nuls ($\sigma_0 = 0$).

En 2D, une manière simple de construire de telles fonctions d'approximation est de passer par le potentiel d'Airy (Beckers, 1972).

Pour obtenir des fonctions d'approximation polynomiales des contraintes de degré n , on définit le potentiel $\Phi(x, y)$ comme une somme pondérée de monômes $x^i y^j$ ($\forall i, j \in \mathbb{N} : 2 \leq i + j \leq n + 2$). Les contraintes généralisées sont alors les facteurs de pondération de ces monômes et si, pour simplifier, on considère que les contraintes initiales sont nulles, le champ de contraintes 2D s'écrit :

$$\sigma_{(i)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} \Phi_{(i)}(x, y)$$

4.1.2. Champ de déplacements

Le champ de déplacements sur une face $\Gamma_{(j)}$ d'un élément est discrétisé par :

$$v_{(j)} = \mathbf{V}_{(j)} \hat{v}_{(j)},$$

avec $\mathbf{V}_{(j)}$ la matrice des fonctions de forme des déplacements de la face j et les $\hat{v}_{(j)}$ déplacements généralisés.

Les fonctions d'approximation des déplacements, sont des polynômes exprimés en coordonnées locales de la face considérée, elles sont du même degré que les fonctions d'approximation des contraintes.

4.2. Pondération des équations

On utilise comme fonctions de pondération respectivement les fonctions d'approximation des déplacements et des contraintes pour imposer sous la forme résidus pondérés les équations d'équilibre de frontière et de compatibilité.

4.2.1. Equilibre de frontière

L'équilibre des tractions (5) sur une face $\Gamma_{(j)}$ s'écrit :

$$\sum_i N_{(i),(j)} \sigma_{(i)} = t_{\Gamma,(j)}$$

la sommation portant sur les éléments adjacents à $\Gamma_{(j)}$.

De là, sa formulation de type résidu pondéré :

$$\sum_i \left(\int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{V}_{(j)}^T N_{(i),(j)} \mathbf{S}_{(i)} d\Gamma \right) \hat{s}_{(i)} = \int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{V}_{(j)}^T t_{\Gamma,(j)} d\Gamma$$

ou sous forme compacte pour toutes les faces $\Gamma_{(j)}$,

$$\sum_i \mathbf{D}_{(i),(j)} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} = \hat{\mathbf{g}}_{(j)} \quad (14)$$

L'utilisation des fonctions d'approximation des déplacements, du même degré que les fonctions d'approximation des contraintes, comme fonctions de pondération garantit le respect des équations d'équilibre local (Moitinho de Almeida *et al.*, 1996).

4.2.2. Equations de compatibilité

Pour un élément $\Omega_{(i)}$, la forme pondérée des équations de compatibilité s'écrit :

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} \, d\Omega = \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T d\mathbf{u}_{(i)} \, d\Omega \quad (15)$$

En intégrant par parties le membre de droite de l'équation on obtient,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(i)} = \sum_j \left(\int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(j)}^T \mathbf{V}_{(j)} \, d\Omega \right) \hat{\mathbf{v}}_{(j)}$$

ou sous forme compacte pour l'élément $\Omega_{(i)}$,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(i)} = \sum_j \mathbf{D}_{(i),(j)}^T \hat{\mathbf{v}}_{(j)}$$

D'autre part, en introduisant les relations constitutives (1) dans le membre de gauche de l'équation (15)

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(i)} = \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} \, d\Omega = \left(\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{H}_{(i)}^{-1} \mathbf{S}_{(i)} \, d\Omega \right) \hat{\mathbf{s}}_{(i)}$$

ou sous forme compacte pour l'élément $\Omega_{(i)}$,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(i)} = \mathbf{F}_{(i)} \hat{\mathbf{s}}_{(i)}$$

Les équations de compatibilité s'écrivent donc :

$$-\mathbf{F}_{(i)} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} + \sum_j \mathbf{D}_{(i),(j)}^T \hat{\mathbf{v}}_{(j)} = 0 \quad (16)$$

4.2.3. *Système global*

En assemblant les équations de compatibilité (16) et les équations d'équilibre de frontière (14) de tous les éléments, on obtient le système global du modèle éléments finis :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{g}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

REMARQUE. — Généralement le système (17) présente plusieurs équations linéairement dépendantes qui conduisent à des modes cinématiques parasites. Ces modes correspondent à des déplacements relatifs non nuls des frontières des éléments de la structure non chargée. On peut montrer (Maunder *et al.*, 1997) que pour un élément triangulaire primitif de degré p :

p	Nombre de modes cinématiques
0	0
1	2
≥ 2	3

Tableau 1. Nombre de modes cinématiques pour un élément triangulaire primitif

4.3. *Elimination des modes cinématiques parasites*

La technique utilisée ici pour créer un élément équilibre triangulaire sans mode cinématique repose sur la notion de super-élément. Elle consiste à assembler plusieurs éléments primitifs afin de bloquer leurs modes cinématiques internes.

L'assemblage présenté à la figure 1 permet de former un élément triangulaire exempt de mode cinématique (Sander, 1971). La position du point P peut être quelconque à l'intérieur du triangle.

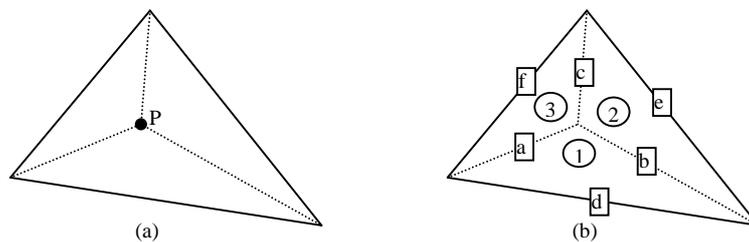


Figure 1. Super-élément triangulaire

En repérant les éléments et les frontières de la manière présentée sur la figure 1, le système (17) gouvernant le super-élément s'écrit :

$$\begin{array}{c|cc|cc}
 \begin{array}{ccc}
 -\mathbf{F}_{(1)} & & \\
 & -\mathbf{F}_{(2)} & \\
 & & -\mathbf{F}_{(3)}
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 \mathbf{D}_{(1),(a)}^T & \mathbf{D}_{(1),(b)}^T \\
 & \mathbf{D}_{(2),(b)}^T & \mathbf{D}_{(2),(c)}^T \\
 & & \mathbf{D}_{(3),(c)}^T
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 \mathbf{D}_{(1),(d)}^T & \\
 & \mathbf{D}_{(2),(e)}^T \\
 & & \mathbf{D}_{(3),(f)}^T
 \end{array} & \begin{array}{c}
 \hat{\mathbf{s}}_{(1)} \\
 \hat{\mathbf{s}}_{(2)} \\
 \hat{\mathbf{s}}_{(3)} \\
 \hat{\mathbf{v}}_{(a)} \\
 \hat{\mathbf{v}}_{(b)} \\
 \hat{\mathbf{v}}_{(c)} \\
 \hat{\mathbf{v}}_{(d)} \\
 \hat{\mathbf{v}}_{(e)} \\
 \hat{\mathbf{v}}_{(f)}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cc}
 \mathbf{D}_{(1),(a)} & \mathbf{D}_{(3),(a)} \\
 \mathbf{D}_{(1),(b)} & \mathbf{D}_{(2),(b)} \\
 & \mathbf{D}_{(2),(c)} & \mathbf{D}_{(3),(c)}
 \end{array} & & & = \\
 \hline
 \begin{array}{cc}
 \mathbf{D}_{(1),(d)} & \\
 & \mathbf{D}_{(2),(e)} \\
 & & \mathbf{D}_{(3),(f)}
 \end{array} & & & \begin{array}{c}
 \hat{\mathbf{g}}_{(d)} \\
 \hat{\mathbf{g}}_{(e)} \\
 \hat{\mathbf{g}}_{(f)}
 \end{array}
 \end{array}$$

et, sous forme compacte,

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{D}_i^T & \mathbf{D}_e^T \\ \mathbf{D}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{v}}_i \\ \hat{\mathbf{v}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{g}}_e \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Compatibilité)} \\ \text{(Equilibre interne)} \\ \text{(Equilibre externe)} \end{array}
 \end{array} \quad (18)$$

Les équations de compatibilité donnent,

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{D}_i^T \hat{\mathbf{v}}_i + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{D}_e^T \hat{\mathbf{v}}_e \quad (19)$$

En remplaçant $\hat{\mathbf{s}}$ par cette expression dans les équations d'équilibre interne (18) on obtient,

$$\mathbf{K}_{ii} \hat{\mathbf{v}}_i + \mathbf{K}_{ie} \hat{\mathbf{v}}_e = \mathbf{0} \quad (20)$$

avec,

$$\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{D}_i \mathbf{F}^{-1} \mathbf{D}_i^T \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{ie} = \mathbf{D}_i \mathbf{F}^{-1} \mathbf{D}_e^T$$

L'assemblage ayant éliminé tous les modes cinématiques, la solution de l'équation (20) est unique et \mathbf{K}_{ii} est inversible. On peut donc isoler $\hat{\mathbf{v}}_i$ et, à partir de (19), les équations d'équilibre externe se ramènent à la formulation classique d'un problème éléments finis.

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_e = \hat{\mathbf{g}}_e,$$

avec,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ie}^T \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie} \text{ et } \mathbf{K}_{ee} = \mathbf{D}_e \mathbf{F}^{-1} \mathbf{D}_e^T .$$

On peut donc utiliser les méthodes classiques d'assemblage pour obtenir le système global d'un problème donné. Sa résolution fournit les valeurs des déplacements généralisés externes du super-élément. Cependant, contrairement à la formulation cinématiquement admissible, ils ne sont généralement pas continus entre deux faces d'un élément. De là, en utilisant (19), on détermine les valeurs des contraintes généralisées.

$$\hat{\delta} = \mathbf{F}^{-1} \left(\mathbf{D}_e^T - \mathbf{D}_i^T \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie} \right) \hat{v}_e$$

5. Formulation équilibre pure 3D

Le principe de cette approche, présenté en détail pour les analyses bidimensionnelles dans (Fraeijns de Veubeke, 1965), consiste, dans un premier temps, à choisir une forme paramétrique simple du champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre (4). On définit ainsi un ensemble de solutions admissibles. Pour imposer la réciprocité des tractions de surface à la frontière de deux éléments, il est nécessaire de choisir des connecteurs définissant univoquement ces tractions d'interface. Ceci est réalisé en choisissant un nombre suffisant de charges ponctuelles.

Dans un second temps on recherche, dans cet ensemble de solutions, celle qui rend l'énergie complémentaire totale minimum. Pour cela on annule la variation première de la fonctionnelle (7) par rapport aux paramètres définissant le champ de contraintes. Les développements qui suivent présentent brièvement la mise en œuvre de cette formulation dans le cas d'un élément tétraédrique Ω à champ de contraintes linéaire.

5.1. Ensemble de solutions admissibles

Il faut chercher un champ de contraintes solution de forme polynomiale du premier degré des coordonnées globales. C'est-à-dire que chacune des six contraintes $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ est de la forme :

$$\sigma = \hat{\delta}_\alpha + \hat{\delta}_\beta x + \hat{\delta}_\gamma y + \hat{\delta}_\delta z$$

De la sorte 24 paramètres sont nécessaires pour définir le champ complet discrétisé. Cependant, ces contraintes doivent vérifier les équations d'équilibre (4), ce qui fait que seuls 21 de ces paramètres sont indépendants.

Si on ne considère pas les forces de volume, la discrétisation du champ de contraintes s'écrit sous forme matricielle :

$$\sigma = S\hat{s} \quad (21)$$

Avec S , la matrice des fonctions d'approximation linéaires des contraintes et \hat{s} le vecteur des paramètres inconnus du problème également appelés contraintes généralisées.

5.2. Choix des connecteurs

Ayant supposé le champ de contraintes linéaire, l'équilibre de surface (5) impose que le champ des tractions le soit également. Trois connecteurs par face et par direction sous forme de charges ponctuelles sont donc nécessaires pour définir univoquement ce champ ; soit un total de 36 connecteurs par élément.

La position des connecteurs sur chaque face triangulaire étant libre, il est intéressant pour la suite de les placer aux trois points définis par Hammer pour l'intégration exacte d'une fonction quadratique sur un domaine triangulaire (Hammer *et al.*, 1956).

Ainsi, pour chaque composante i des tractions de surface t , on définit sur une face donnée, les connecteurs :

$$\hat{g}_{i,j} = \frac{A}{3} t_i(\phi_j) \quad (22)$$

où A est l'aire de la face considérée et ϕ_j la position du point d'intégration j de Hammer sur la face.

Il est alors possible, pour chaque face, d'écrire les tractions de surface en termes de connecteurs :

$$t = W\hat{g}$$

où W est une matrice de fonctions linéaires des coordonnées globales.

En considérant les 4 faces du tétraèdre, les égalités (5), (21) et (22) permettent également d'écrire les relations d'équilibre entre les connecteurs et les contraintes généralisées :

$$\hat{g} = C\hat{s} \quad (23)$$

5.3. Informations sur les déplacements

Si on écrit le travail des tractions de surface sur une face Γ :

$$\int_{\Gamma} t^T u \, d\Gamma = \hat{g}^T \int_{\Gamma} \mathbf{W}^T u \, d\Gamma = \hat{g}^T \hat{q} \quad (24)$$

avec $\hat{q} = \int_{\Gamma} \mathbf{W}^T u \, d\Gamma =$ vecteur des déplacements généralisés.

REMARQUE. — On vérifie aisément que dans le cas où le champ de déplacements u est du premier degré, les déplacements généralisés sont exactement égaux aux valeurs locales des déplacements des points d'ancrage des connecteurs.

5.4. Minimisation de l'énergie complémentaire totale

Considérant (21), (23) et (24), la fonctionnelle (7) se réécrit en termes de contraintes généralisées :

$$EC = \frac{1}{2} \hat{s}^T \mathbf{F} \hat{s} - \hat{s}^T \mathbf{C}^T \hat{q}$$

avec $\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{S} \, d\Omega =$ Matrice de flexibilité définie positive.

L'annulation de la variation première de cette fonctionnelle par rapport aux paramètres \hat{s} donne :

$$\hat{s} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{C}^T \hat{q}$$

De là, en réécrivant (23), on obtient le système classique des problèmes éléments finis :

$$\mathbf{K} \hat{q} = \hat{g}$$

avec $\mathbf{K} = \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{C}^T$

REMARQUE. — Tout comme l'élément triangulaire, l'élément tétraédrique présente des modes cinématiques internes. En effet, comme la matrice \mathbf{F} est régulière, le rang de \mathbf{K} est aussi celui de \mathbf{C} . Or \mathbf{C} est une matrice rectangulaire ayant n_g lignes (nombre de connecteurs) et n_s colonnes (nombre de contraintes généralisées). Donc $\text{rang}(\mathbf{C}) = \min(n_g, n_s) = n_s$. La matrice \mathbf{K} , ($n_g \times n_g$), est donc de rang n_s , c'est-à-dire qu'elle possède ($n_g - n_s$) singularités indépendantes. Parmi celles-ci, les n_r modes rigides sont des singularités naturelles. Les autres, au nombre de ($n_g - n_s - n_r$), sont des modes cinématiques parasites. Dans le cas présent, $n_g = 36$, $n_s = 21$ et $n_r = 6$. On a donc 9 modes internes parasites.

5.5. Elimination des modes cinématiques parasites

La méthode est la même que pour les éléments triangulaires, à savoir la création de super-éléments.

L'assemblage permettant d'obtenir un super-élément tétraédrique ne présente aucun mode cinématique interne, il est représenté à la figure 2, c'est l'analogue de celui utilisé pour les éléments triangulaires.

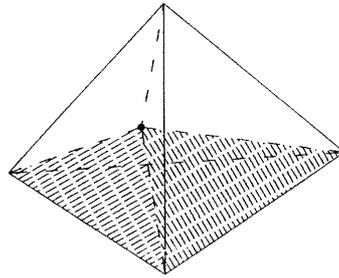


Figure 2. Super-élément tétraédrique

Pour cet assemblage, on a $n_g = 90$ (36 connecteurs externes et 54 internes) et $n_s = 84$ (4×21), ce qui conduit à $n_g - n_s - n_r = 0$. Les seules singularités de la matrice de raideur de l'assemblage sont donc celles qui correspondent aux modes rigides.

La matrice de raideur du super-élément s'obtient en éliminant les degrés de liberté internes \hat{q}_i de l'assemblage :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ie} \\ \mathbf{K}_{ie}^T & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_i \\ \hat{q}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{g}_e \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\hat{g}_e = \left(\mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ie}^T \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie} \right) \hat{q}_e = \mathbf{K} \hat{q}_e$$

avec, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ie}^T \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie}$ la matrice de raideur (36×36) du super-élément.

6. Applications numériques – Analyse duale

6.1. Problème bidimensionnel

On étudie le problème de la plaque percée d'un trou carré représenté à la figure 3a soumise à une traction uniaxiale. On fait l'hypothèse de l'état plan de contraintes.

Les données du problème sont : $E = 1$, $\nu = 0.3$, épaisseur = 1, $L = 100$ et $P = 1$. Ce problème présentant deux axes de symétries, on peut se contenter d'étudier un quart de la structure (figure 3b). Il existe une singularité au niveau de l'angle droit intérieur.

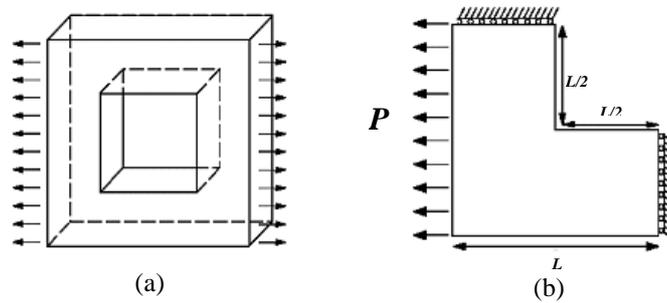


Figure 3. Problème de la plaque percée d'un trou carré

Les maillages étudiés sont trois maillages structurés de super-éléments triangulaires dont la longueur caractéristique h des éléments vaut respectivement $L/2$, $L/4$ et $L/8$ (figure 4).

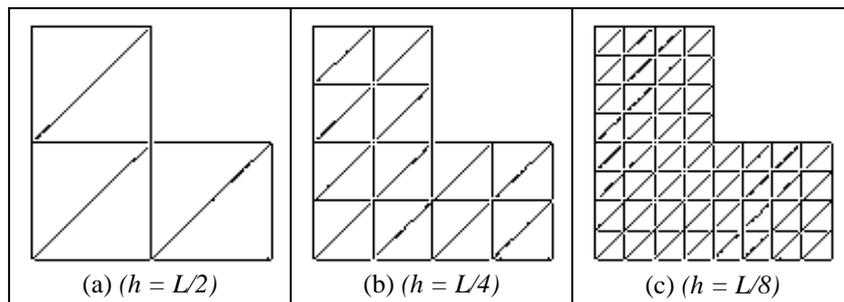


Figure 4. Maillages triangulaires étudiés

Pour chacun de ces maillages, l'énergie de déformation obtenue avec des éléments déplacement et des éléments équilibre hybrides de degré 1 à 5 est reprise dans le tableau 2.

Degré	Eléments déplacement			Eléments équilibre		
	$h = L/2$	$h = L/4$	$h = L/8$	$h = L/2$	$h = L/4$	$h = L/8$
1	9875	12168	14048	18778	16040	15715
2	14871	15330	15480	15849	15664	15610
3	15389	15497	15538	15674	15614	15589
4	15484	15533	15552	15636	15596	15580
5	15519	15546	15558	15611	15587	15576

Tableau 2. *Energie de déformation*

Ces valeurs permettent de calculer une très bonne approximation de l'énergie de déformation exacte par la méthode d'extrapolation duale présentée dans (Pereira, 1996).

$$U_{ex} \approx 15565$$

Cette valeur sert de référence dans la suite pour les calculs d'erreurs relatives exactes et d'indices d'effectivité.

Les conditions limites étant de type déplacements imposés homogènes, on montre facilement que :

$$ET(u_h) = -U(u_h) ; EC(\sigma_h) = U(\sigma_h)$$

et

$$EC(\sigma_{ex}) = -ET(u_{ex}) = U(\sigma_{ex}) = U(u_{ex})$$

De là, pour un maillage donné, en considérant n'importe quel couple de solutions duales (u_h, σ_h) , on peut calculer avec (12) une borne supérieure sur l'erreur relative globale commise sur chacune des deux solutions. Il est alors intéressant de comparer cette borne à l'erreur réellement commise sur ces solutions.

Soit p_c le degré des fonctions d'approximation (déplacements) d'une solution cinématiquement admissible et p_s celui d'une solution statiquement admissible (contraintes). Le tableau 3 montre l'erreur relative calculée pour chaque couple de solutions duales du maillage de la figure 4(b) et les erreurs exactes de chaque solution. La dernière ligne de ce tableau montre les valeurs de l'erreur relative exacte des solutions statiquement admissibles et la dernière colonne celles des solutions cinématiquement admissibles.

	$p_s = 1$	$p_s = 2$	$p_s = 3$	$p_s = 4$	$p_s = 5$	$E.R._{ex,CA}$
$p_c = 1$	52,40	50,12	49,81	49,70	49,64	49,50
$p_c = 2$	21,27	14,66	13,54	13,12	12,89	12,32
$p_c = 3$	18,55	10,33	8,67	7,98	7,60	6,60
$p_c = 4$	17,93	9,16	7,23	6,40	5,91	4,56
$p_c = 5$	17,68	8,67	6,61	5,68	5,12	3,48
$E.R._{ex,SA}$	17,34	7,94	5,62	4,49	3,76	

Tableau 3. Erreur relative. Bornes et valeurs exactes (%)

Les lignes de ce tableau montrent l'évolution de l'estimation de l'erreur relative sur la solution cinématiquement admissible en fonction de la solution statique utilisée pour calculer cette erreur. Les colonnes montrent la situation inverse.

On peut quantifier la qualité de ces estimations en calculant leurs indices d'effectivité θ_c et θ_s (13). Les tableaux 4 et 5 montrent les valeurs de ces indices pour chaque couple de solutions duales du maillage 2 ($h = L/4$).

	$p_s = 1$	$p_s = 2$	$p_s = 3$	$p_s = 4$	$p_s = 5$
$p_c = 1$	1,068	1,014	1,007	1,005	1,003
$p_c = 2$	1,739	1,192	1,100	1,065	1,046
$p_c = 3$	2,831	1,567	1,314	1,210	1,151
$p_c = 4$	3,963	2,012	1,588	1,404	1,297
$p_c = 5$	5,119	2,496	1,900	1,632	1,473

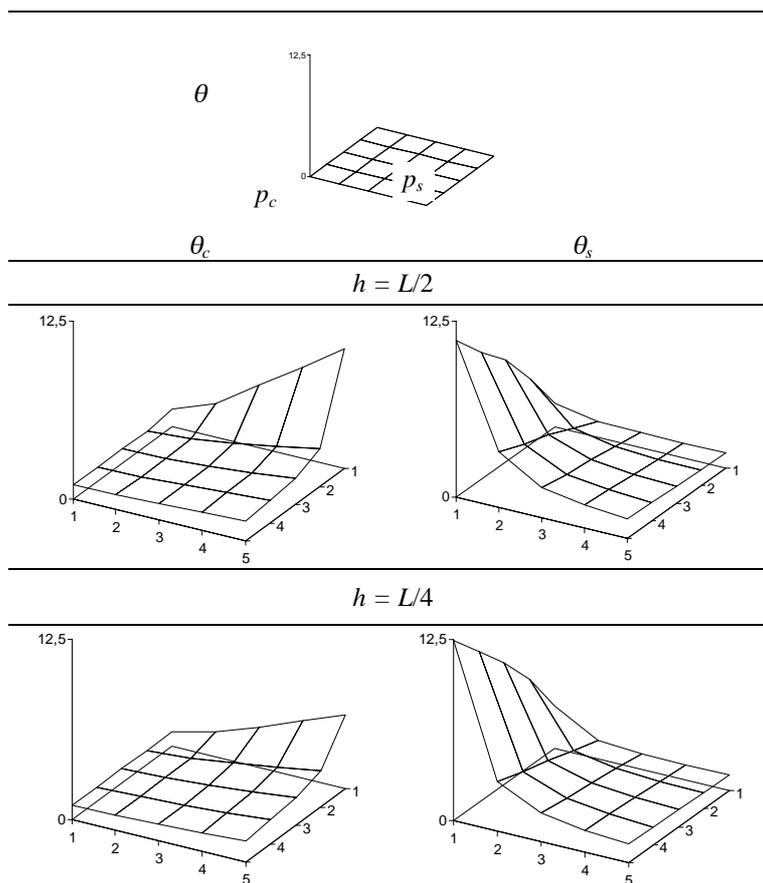
Tableau 4. θ_c . Qualité de l'estimation de l'erreur sur u_h

	$p_s = 1$	$p_s = 2$	$p_s = 3$	$p_s = 4$	$p_s = 5$
$p_c = 1$	2,855	5,957	8,369	10,454	12,457
$p_c = 2$	1,222	1,839	2,402	2,912	3,413
$p_c = 3$	1,069	1,299	1,542	1,777	2,018
$p_c = 4$	1,033	1,152	1,287	1,425	1,570
$p_c = 5$	1,020	1,091	1,176	1,265	1,362

Tableau 5. θ_s . Qualité de l'estimation de l'erreur sur σ_h

Comme on pouvait s'y attendre, l'estimation de l'erreur commise sur une solution donnée est d'autant meilleure que le degré de la solution duale utilisée pour la calculer est élevé. L'analyse duale permet donc théoriquement d'obtenir une estimation de l'erreur aussi précise que souhaité.

Les très mauvaises valeurs de θ_s pour des degrés p_c faibles s'expliquent par la médiocre qualité des solutions cinématiques correspondantes (tableau 3). La subdivision présentée à la figure 1 n'a en fait aucune influence sur la solution cinématiquement admissible de degré 1. Cependant, l'effet de cette subdivision s'accroît avec le degré des fonctions d'approximation des déplacements ; cela se traduit par une nette amélioration des valeurs de θ_s . Pour les mêmes raisons, si on souhaite conserver des valeurs de θ_c raisonnables pour des p_c élevés, il faut disposer de solutions statiques dont le degré d'approximation est de plus en plus élevé par rapport à celui des solutions cinématiques. Ces comportements apparaissent clairement sur les représentations graphiques de θ_c et θ_s en fonction de p_c et p_s pour chaque maillage (figure 5).



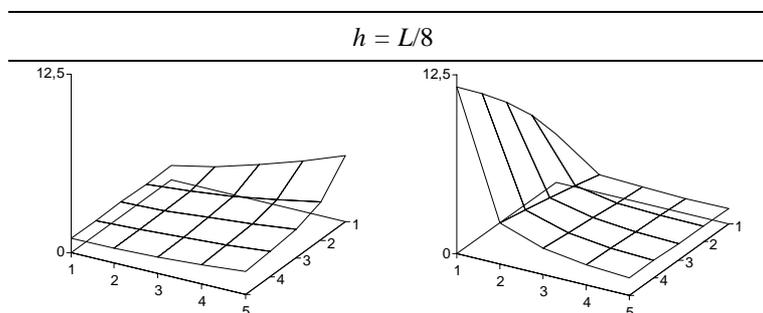


Figure 5. Indices d'effectivité

La figure 5 montre également que la qualité des estimations ne s'améliore pas significativement avec le raffinement du maillage.

Si l'on cherche à estimer l'erreur sur une solution déplacement du premier ou du deuxième degré, on remarque que des éléments équilibre de degré peu élevé permettent déjà d'obtenir des valeurs satisfaisantes $\theta_c (< 1.2)$.

Jusqu'à présent nous avons comparé des solutions cinématiquement et statiquement admissibles obtenues avec des maillages strictement identiques, c'est-à-dire dont les éléments triangulaires avaient été subdivisés de la même manière en vue de créer les super-éléments présentés à la figure 1. Cependant, si on se place dans la logique d'utiliser les éléments équilibre dans le seul but d'estimer l'erreur commise sur une solution déplacement donnée, la création de super-éléments, nécessaire à l'élaboration du modèle équilibre, apparaît comme une étape de prétraitement s'inscrivant dans le processus d'estimation de l'erreur et ne doit pas se retrouver dans le modèle déplacement. Dans ce contexte nous présentons brièvement les résultats de l'estimation de l'erreur sur les solutions cinématiquement admissibles du problème de la figure 3 avec les maillages 2 ($h = L/4$) et 3 ($h = L/8$) non subdivisés. Seules les valeurs de l'efficacité (tableaux 6 et 7) sont intéressantes à présenter car elles donnent une idée de l'ordre de grandeur de l'estimateur d'erreur dual. Il est bien évident que dans ce cas on s'intéressera uniquement à l'efficacité θ_c .

	$p_s = 1$	$p_s = 2$	$p_s = 3$	$p_s = 4$	$p_s = 5$
$p_c = 1$	1,068	1,014	1,007	1,005	1,003
$p_c = 2$	1,534	1,132	1,068	1,044	1,031
$p_c = 3$	2,154	1,325	1,173	1,114	1,081
$p_c = 4$	2,807	1,558	1,309	1,206	1,149
$p_c = 5$	3,499	1,825	1,471	1,320	1,233

Tableau 6. θ_c . Qualité de l'estimation de l'erreur sur u_r . Maillage 2

	$p_s = 1$	$p_s = 2$	$p_s = 3$	$p_s = 4$	$p_s = 5$
$p_c = 1$	1,048	1,015	1,008	1,005	1,004
$p_c = 2$	1,461	1,159	1,086	1,057	1,041
$p_c = 3$	1,930	1,350	1,196	1,132	1,097
$p_c = 4$	2,463	1,591	1,341	1,235	1,174
$p_c = 5$	3,054	1,875	1,521	1,364	1,273

Tableau 7. θ_c . Qualité de l'estimation de l'erreur sur u_h . Maillage 3

Les tableaux 6 et 7 semblent montrer que pour des solutions cinématiquement admissibles de degré peu élevé (1 ou 2), on peut se contenter d'un modèle équilibre du même ordre que celui du modèle déplacement et garder des valeurs tout à fait acceptables de θ_c . Pour des degrés plus élevés, il vaut cependant mieux recourir à des modèles équilibre tels que $p_s = p_c + 1$ ou mieux, $p_s = p_c + 2$. Comme nous l'avons précisé précédemment, cet écart nécessaire entre les degrés des deux approximations devrait être augmenté avec la richesse du modèle déplacement.

6.2. Problème tridimensionnel

Soit l'arche présentée à la figure 6, encastré à sa base et soumis à une pression constante sur l'une de ses faces latérales (Florentin, 2002).

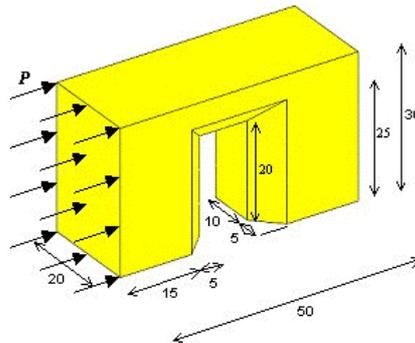


Figure 6. Définition du problème de l'arche

Les données sont : $E = 1$, $\nu = 0.3$ et $P = 1$.

Nous avons comparé les solutions obtenues pour les maillages de la figure 7 réalisés avec un programme de maillage automatique. Pour chacun d'eux, nous avons calculé une solution statique et des solutions cinématiques de degré 1 et 2.

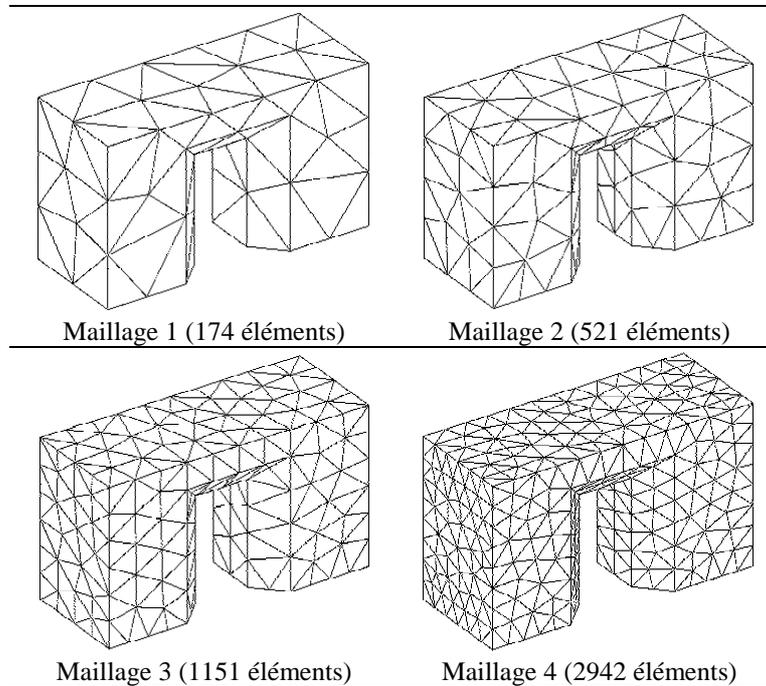


Figure 7. *Maillages de l'arche*

Le tableau 8 montre les énergies de déformation calculées par les modèles équilibre et déplacement pour chacun de ces maillages.

Une solution de référence a été calculée à l'aide d'un maillage fin (12 000 éléments) de tétraèdres cinématiquement admissibles du second degré.

$$U_{ex} \approx 17995$$

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Modèle stat.	19752,33	19261,13	18656,75	18462,93
Modèle cin. ($p=1$)	12806,72	14266,03	15432,01	16274,74
Modèle cin. ($p=2$)	16803,65	17346,25	17703,74	17873,67

Tableau 8. *Energies de déformation*

En traçant l'évolution des énergies en fonction du nombre d'éléments de chaque maillage, on obtient les courbes de convergence caractéristiques de l'analyse duale

de la figure 8. Selon la formule [11], la différence entre un point donné de ces courbes et la solution exacte (ou dans ce cas la solution de référence considérée comme exacte) vaut précisément la moitié du carré de la norme énergétique de l'erreur sur la solution considérée. Ces courbes sont de ce point de vue très intéressantes car elles permettent de se rendre compte immédiatement de la proportion de chacune des deux erreurs dans la borne sur l'erreur globale.

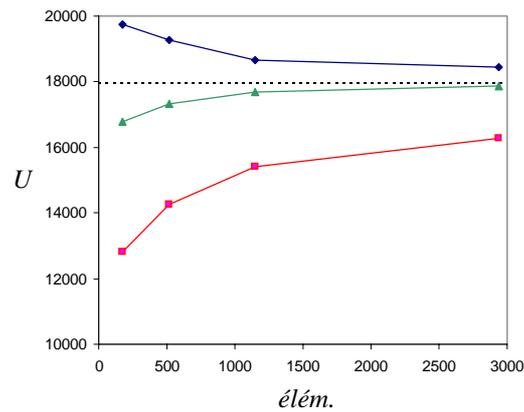


Figure 8. Courbes de convergence

Si on se place dans le contexte de la recherche d'une borne supérieure sur l'erreur globale des solutions déplacement, le tableau 9 montre les valeurs de l'erreur relative calculées à l'aide de l'analyse duale comparées à celles réellement commises.

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
$E.R. (p = 1)$	65,32	54,19	42,81	34,85
$E.R._{ex} (p = 1)$	58,04	48,08	39,16	31,69
$E.R. (p = 2)$	40,17	32,13	22,56	17,70
$E.R._{ex} (p = 2)$	26,17	19,16	12,77	8,23

Tableau 9. Erreurs relatives estimées et exactes (%)

La qualité de ces estimations se mesure par leurs indices d'effectivité (tableau 10). Ces résultats indiquent que les éléments équilibre linéaires présentés permettent d'estimer de manière très satisfaisante l'erreur commise lors de calculs éléments

finis réalisés avec des tétraèdres à 4 nœuds. L'estimation de l'erreur dans le cas de calculs réalisés avec des tétraèdres à 10 nœuds conserve le caractère fondamental de borne sur l'erreur. L'indice d'effectivité est peu probant mais il est faussé par la qualité, insuffisante dans ce cas-ci, de la solution de référence utilisée.

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
$\theta_c (p = 1)$	1,1570	1,1574	1,1217	1,1278
$\theta_c (p = 2)$	1,5732	1,7180	1,8089	2,2038

Tableau 10. *Indices d'effectivité estimateur dual*

Au vu de la figure 8, il apparaît clairement qu'un moyen très simple d'obtenir une meilleure estimation de l'erreur commise lors d'un calcul réalisé avec des éléments déplacement du second degré, consiste à comparer l'énergie de la solution cinématiquement admissible non plus directement à celle de la solution statique, mais à la moyenne des deux énergies (tableau 11). Cela a cependant pour conséquence de ne plus garantir une borne supérieure sur l'erreur.

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
$\tilde{\theta}_c (p = 2)$	1,1124	1,2148	1,2791	1,5583

Tableau 11. *Indices d'effectivité estimateur dual modifié*

7. Conclusion

Les deux modèles équilibre présentés dans ce travail reposent sur la notion de super-élément. Ils conduisent à des solutions statiquement admissibles qui ont permis de montrer quelques exemples d'estimation de l'erreur par analyse duale pure. Par une simple comparaison énergétique, cette technique permet d'obtenir une borne supérieure sur l'erreur globale commise par chacun des modèles duaux. Les résultats 2D mettent en évidence les différences de comportement de la qualité des estimations de l'erreur sur les solutions équilibre et déplacement.

En pratique cependant, on dispose généralement d'une solution de type déplacement pour laquelle on souhaite obtenir une estimation par excès de l'erreur. De ce point de vue, la création de modèles équilibre doit être vue comme une méthode d'obtention d'une solution statiquement admissible permettant de trouver aisément cette borne supérieure. L'intérêt est bien entendu que cette borne soit la plus proche possible de l'erreur exacte. Les résultats obtenus montrent que la qualité de cet estimateur dépend fortement de la qualité de la solution statique utilisée.

Le modèle 2D hybride permet de créer très facilement des éléments équilibre de degré quelconque et, par là, d'estimer l'erreur sur des solutions déplacement de degré quelconque. Il permet aussi d'obtenir, pour une solution déplacement donnée, une estimation de l'erreur qui peut être théoriquement aussi précise que l'on veut. Une perspective intéressante est, par exemple, la création de solutions de référence permettant de calibrer ou de tester d'autres estimateurs d'erreur.

Le modèle 3D a comme caractéristique d'être de type équilibre pur. L'absence de discrétisation du champ de déplacements permet d'envisager des conditions limites où le champ de déplacements imposé est quelconque. Seul le cas tétraédrique linéaire a été présenté et nous avons montré comment, dans ces conditions, créer un élément de type équilibre complètement exempt de modes cinématiques parasites. Cet élément a permis de réaliser une estimation assez précise de l'erreur globale sur une solution déplacement linéaire. Il peut être également utilisé dans ce contexte conjointement avec des solutions déplacement du second degré. Il est envisageable par cette méthode de créer des éléments tétraédriques de degré plus élevé mais leur utilisation pratique reste limitée vu les coûts qu'ils engendrent. La formulation hybride permet également de créer de tels éléments (M. de Almeida *et al.*, 1996).

Il ne faut pas perdre de vue le fait que le calcul de la solution équilibre d'un problème donné est généralement plus coûteux que celui de la solution déplacement correspondante. De plus, la définition des éléments équilibre que nous venons de présenter nécessite une phase de prétraitement correspondant à la création des super-éléments. Les calculs des deux solutions sont complètement indépendants et peuvent donc être lancés simultanément. Dans la méthode de calcul d'erreur en relation de comportement (Ladevèze *et al.*, 2001), il est également fait appel à une solution statiquement admissible mais son évaluation s'effectue à partir de la solution cinématiquement admissible et doit donc être postérieure.

Même si nous nous sommes limités dans ce travail à l'estimation de l'erreur globale, les solutions équilibre obtenues peuvent également être utilisées dans le cadre d'une estimation locale de l'erreur.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Eric Florentin du LMT Cachan pour le calcul de la solution de référence du problème 3D ainsi que pour son précieux soutien logistique.

Ce travail s'inscrit principalement dans le cadre du projet FIRST-Europe Objectif 1 « ACaSD », cofinancé par la Direction Générale des Technologies, de la Recherche et de l'Energie de la Région Wallonne et par le Fonds social européen.

Il est aussi issu des activités de recherches de l'ICIST, Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção, ayant été partiellement financé par la Fundação para a Ciência e Tecnologia, dans le cadre du projet POCTI/ECM/33066/99 et du financement de l'unité de recherches.

8. Bibliographie

- Beckers P., Les fonctions de tension dans la méthode des éléments finis, Thèse de doctorat, Université de Liège, 1972.
- Beckers P., Kempeneers M., « Development of an equilibrium tetrahedral finite element », *International Congress on Quality Assessment of Numerical Simulations in Engineering*, Concepción, 2002.
- Debongnie J.F., Zhong H.G., Beckers P., « Dual analysis with general boundary conditions », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 122, 1995, p. 183-192.
- Debongnie J.F., Beckers P., « Recent advances in the dual analysis theory », *IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Sevilla, 1999.
- Florentin E., Sur l'évaluation de la qualité locale des contraintes éléments finis en élasticité tridimensionnelle, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2002.
- Fraeijs de Veubeke B., « Upper and lower bounds in matrix structural analysis » *AGARDograp*, 72, 1964, p. 165-201.
- Fraeijs de Veubeke B., « Stress analysis: displacements and equilibrium models in the finite elements method », *Symposium on Numerical methods in elasticity*, Swansea, 1964, Chapter 9 of *Stress Analysis*, Edit. Zienkiewicz O.C., Holister G.S., Wiley, London 1965.
- Hammer P.C., Marlowe D.J., Stroud A.H., « Numerical Integration Over Simplexes and Cones », *Math. Tables other Aids Comp.*, vol. 10, 1956, p. 130-136.
- Ladevèze P., Pelle J.P., *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermes-Lavoisier, 2001.
- Maunder E.A.W., Moitinho de Almeida J.P., Ramsay A.C.A., « A general formulation of equilibrium macro-elements with control of spurious kinematic modes », *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 39, 1996, p. 3175-3194.
- Maunder E.A.W., Moitinho de Almeida J.P., « Hybrid-equilibrium macro-elements with control of spurious kinematic modes », *Comp. Assist. Mech. Eng. Sci.* 4, 1997, p. 587-605.
- Moitinho de Almeida J.P., Modelos de elementos finitos para a análise elastoplástica, Ph.D. Thesis, Technical University of Lisbon, 1989.
- Moitinho de Almeida J.P., Freitas J.A.T., « Alternative approach to the formulation of hybrid equilibrium finite elements », *Comp. Struct.*, 40, 1991, p. 1043-1047.
- Moitinho de Almeida J.P., Pereira O.J.B.A., « A set of hybrid equilibrium finite element models for the analysis of three-dimensional solids », *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 39, 1996, p. 2789-2802.
- Pasteels P., Elément fini de tétraèdre à équilibre de rotation dualisé et pénalisé, Travail de fin d'études, Université de Liège, 2001.
- Pereira O.J.B.A., Utilização de elementos finitos de equilíbrio em refinamento adaptativo, PhD thesis, Universidade Técnica de Lisboa, 1996.
- Sander G., « Application of the dual analysis principle » B. Fraeijs de Veubeke, ed., *High Speed Computing of Elastic Structures*, 1971.