

---

# Une méthodologie générale pour l'étude numérique du couplage fluide-structure par une approche multicode

Anne-Sophie Mouronval\* — Abdellah Hadjadj\*  
Emmanuel Lefrançois\*\*

\* LMFN, CORIA - UMR CNRS 6614  
Avenue de l'Université, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray  
mouronv@coria.fr

\*\* Université de Technologie de Compiègne  
Laboratoire Roberval, F-60205 Compiègne Cedex

---

*RÉSUMÉ.* Cette étude illustre le développement d'un outil de calcul numérique destiné à analyser les effets d'un couplage aéroélastique dans les moteurs fusée. Une méthodologie simple est proposée afin d'adapter aux simulations aéroélastiques et de coupler un "code fluide" volumes finis reposant sur des schémas robustes de type TVD ou WENO et un "code structure". Un rapide inventaire des méthodes numériques employées pour la mécanique des fluides en milieux évolutifs (i.e. déformables) est dressé. La méthode de maillage dynamique, issue des méthodes ALE, est présentée de manière plus détaillée et ses applications illustrées. Par la suite, plusieurs points spécifiques au couplage fluide/structure sont discutés. Enfin, une dernière partie est consacrée à l'étude du phénomène de flutter et constitue une validation de l'algorithme de couplage retenu. Des conclusions sont tirées concernant notamment le type de schéma à utiliser pour le solveur fluide pour cette dernière application.

*ABSTRACT.* This paper describes the development of a numerical tool that is needed to investigate fluid/structure interactions occurring in overexpanded rocket nozzles. A simple methodology is proposed in order to adapt to fluid/structure coupling existing codes dedicated to fluid mechanics and structural mechanics. We survey numerical methods for moving boundaries problems, pay special attention to methods using dynamic meshes and underline several technical difficulties that are specific to fluid/structure interactions problems. Finally, we combine the fluid and structural solvers using the most popular staggered procedure. The resulting code is validated by computing supersonic panel flutter. Some conclusions are drawn concerning the type of numerical schemes (for fluid solvers) that should be used for this application.

*MOTS-CLÉS :* interaction fluide/structure, couplage faible, maillage mobile, équations d'Euler, flutter, schémas TVD et WENO.

*KEYWORDS:* fluid/structure interaction, weak coupling, moving mesh, Euler equations, flutter, TVD and WENO schemes.

---

## 1. Introduction

A la suite du récent échec du vol 157 d'Ariane 5, le 11 décembre 2002, la commission d'enquête a déclaré que la perte de contrôle du lanceur résultait de fuites dans le système de refroidissement du moteur Vulcain 2 [spab, spaa]. Ces fuites proviendraient de fissures engendrées par des efforts mécaniques et thermiques.

En effet, lors du démarrage d'un moteur fusée au sol (ou plus précisément durant la phase de montée en pression de la chambre de combustion) des efforts latéraux sur le divergent du moteur peuvent exister. Ce phénomène, déjà observé sur plusieurs moteurs réels [SCH 73, NAV 73], peut avoir de graves conséquences liées notamment à son caractère aléatoire. Ainsi, ces efforts peuvent-ils causer des déformations de la tuyère et des mouvements par rapport à son système d'attache. Les contraintes générées par ces efforts, instationnaires en module et direction, sont susceptibles d'être amplifiées par des effets dynamiques. Ils constituent de ce fait un facteur contraignant dans la conception de la structure de la tuyère puisqu'ils imposent d'avoir des tuyères plus épaisses, donc plus lourdes ou plus courtes et par conséquent de rendement moindre (diminution de la charge utile transportée).

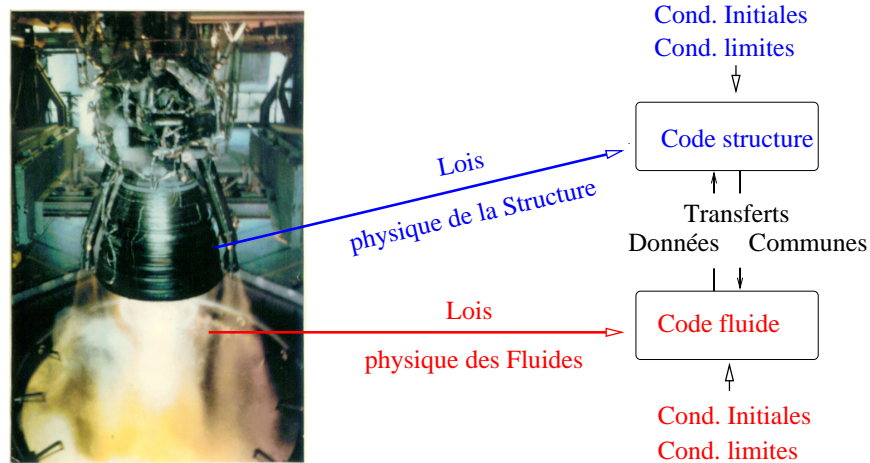
Les charges latérales sont dues au fait que la pression chambre n'est pas suffisamment forte pour que l'écoulement au sol soit supersonique dans toute la tuyère (régime de forte surdétente) : l'écoulement est recomprimé à travers un choc pour s'adapter à la pression extérieure. Cette recompression s'accompagne d'un décollement dont les pertes de symétrie génèrent des efforts latéraux. Les causes exactes de ces pertes de symétrie sont, aujourd'hui encore, mal connues et les moyens de prédictions des efforts latéraux induits peu nombreux. Cependant, de nombreux travaux (voir [HAG 00] pour un récapitulatif) ont identifié différents facteurs susceptibles de provoquer une dissymétrie du décollement, tels que :

- une inclinaison (ou ondulation) de la ligne de décollement ;
- des pulsations de pression au niveau de la ligne de décollement ou dans la zone de recirculation ;
- un couplage aéroélastique ;
- une transition entre deux configurations de décollement (libre et restreint).

C'est dans ce contexte que s'inscrit l'action des groupes de recherche et développement européens FSCD (Flow Separation Control Device) et nationaux tels que ATAC (Aérodynamique des Tuyères et Arrière-Corps).

Dans le cadre du programme de recherche du groupe ATAC, nous nous intéressons au rôle du couplage aéroélastique dans l'apparition (ou l'amplification) des charges latérales [LEF 00].

Le couplage "faible" (par opposition au couplage fort) repose sur un dialogue entre des codes de calcul permettant d'étudier différents domaines de la physique. Cette technique très souple permet de conserver les spécificités et l'intégrité de chaque code de calcul. Seules quelques modifications au sein de ces codes sont nécessaires pour prendre en compte l'interaction des domaines de la physique auxquels ils sont dédiés.



**Figure 1.** Principe du couplage fluide-structure (application aux moteurs fusée)

A ce niveau, il convient de souligner que l'étude des phénomènes aéroélastiques dans les tuyères de moteurs fusée est particulièrement complexe. En effet, lorsque l'écoulement est surdétendu, celui-ci est soumis à un décollement, libre ou restreint, turbulent. Ce dernier peut, de plus, présenter un caractère dissymétrique, stable ou non. Par ailleurs, la paroi du divergent peut également être le lieu d'importants transferts thermiques (système de refroidissement...). Il est donc important de noter que le modèle mathématique utilisé ici est très simplifié par rapport à la complexité de ces problèmes physiques. Nous verrons que le code fluide utilisé se limite aux écoulements eulériens (pas de prise en compte des effets visqueux). De même, le code structure suppose que la paroi a un comportement linéaire (pas de plasticité...).

Les phénomènes aéroélastiques auxquels nous nous intéressons ici <sup>1</sup> font intervenir un couplage entre deux milieux bien différents : un fluide et une structure. Les échanges d'information entre les deux domaines s'effectuent par l'intermédiaire de conditions aux limites à l'interface fluide-structure (*cf.* figure 1). Le fluide soumet la structure à un effort de pression à l'interface alors que la structure déformable modifie le domaine fluide *via* cette même interface mobile. Une des difficultés de ce couplage réside dans le fait que le domaine fluide devient évolutif ce qui implique de modifier le "code fluide" (si celui-ci ne peut pas prendre en compte l'évolution du domaine de calcul au cours du temps). La première section de cette étude est donc consacrée aux méthodes numériques employées pour la mécanique des fluides en milieux évolutifs (techniques ALE : Arbitrary Lagrangian Eulerian, maillages dynamiques...). Plusieurs exemples de validation (ou d'application) simples à mettre en œuvre sont

1. Les phénomènes d'interaction fluide-structure se rencontrent, en effet, dans des domaines d'application très variés (voir Greffét [GRE 01] pour un récapitulatif) comme le génie civil (ponts...) mais aussi l'hydraulique (réservoirs...), la biomécanique (système veineux...) etc.

présentés. Nous verrons également que les modifications à apporter au "code structure" ne sont dues qu'aux échanges d'information avec le code fluide. Ces modifications ne feront donc pas l'objet d'une section spécifique. Il ne restera par conséquent qu'à mettre en œuvre les transferts d'information entre les deux codes. Ce point fera l'objet de la section 4. Enfin, la dernière section est consacrée à la validation de l'outil de calcul couplé ainsi développé. Cette validation repose sur un des cas-tests les plus étudiés en aéroélasticité : l'étude du phénomène de flutter. Une dernière partie expose nos conclusions.

## 2. Fluides en domaine évolutif

Le couplage faible en aéroélasticité fait intervenir un code dédié à la simulation du champ fluide et un second permettant d'étudier la dynamique de la structure. La structure est soumise au niveau de l'interface fluide-structure aux sollicitations (efforts de pression et frottement dans le cas d'un fluide visqueux) exercées par le fluide. Comme les codes de structure sont généralement capables de traiter des problèmes de dynamique où interviennent des efforts surfaciques variables en fonction du temps, ils ne nécessitent que de recevoir cette information du code fluide. D'autre part, le code structure fournit une estimation de la position de la structure à chaque instant sous l'effet des sollicitations du fluide. Ceci implique une nouvelle position de son interface avec le fluide qui doit être transmise à ce dernier. Ainsi, les seules modifications à introduire dans le code structure sont relatives aux transferts d'information avec le fluide (*cf.* section 4). Le code fluide doit lui aussi être modifié pour transmettre les efforts de pression pour chaque position de l'interface qu'il reçoit du code structure (*cf.* section 4). Cependant, le domaine fluide se modifie lorsque la structure se déforme. Les codes disponibles ne permettant généralement pas de traiter des domaines mobiles, quelques modifications du code fluide doivent être effectuées.

Afin de réaliser des simulations numériques des écoulements en milieux évolutifs quelconques (*ie.* grandes déformations du domaine fluide par exemple) il convient de :

- formuler les nouvelles équations à résoudre et adapter des méthodes numériques déjà existantes (sous-section 2.1) ;
- respecter certains critères de type GCL (Geometric Conservation Law, sous-section 2.2) ;
- faire évoluer le maillage lui-même en fonction de la position de l'interface (sous-section 2.3).

### 2.1. Adaptation des méthodes numériques

Considérons la forme Eulérienne des équations bidimensionnelles régissant l'écoulement :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad [1]$$

où  $\mathbf{x} = x \mathbf{i}_x + y \mathbf{i}_y$  représente le vecteur des variables d'espace dans le repère cartésien de base  $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y)$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}}$  l'opérateur divergence,  $\mathbf{Q} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho E_t]^T$  le vecteur des variables conservatives et  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x \mathbf{i}_x + \mathbf{F}_y \mathbf{i}_y$  le vecteur des flux eulériens :

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E_t + p)u \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E_t + p)v \end{pmatrix}$$

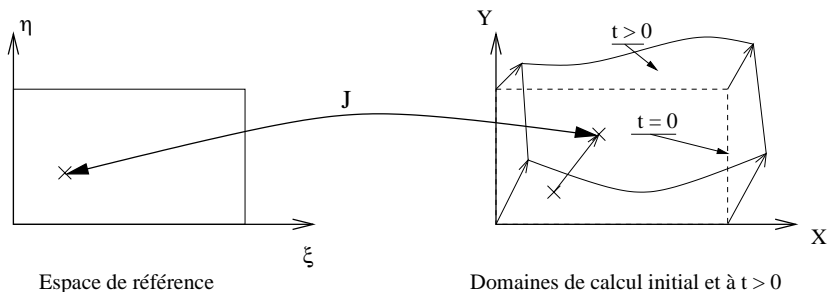
avec  $\rho$  la masse volumique,  $p$  la pression statique,  $u$  et  $v$  les composantes du vecteur vitesse et  $E_t$  l'énergie totale par unité de masse. Considérons maintenant que le domaine fluide est mobile. Notons que, dans cette section, nous supposons que le mouvement du maillage est connu et ne dépend pas du fluide. Afin de faciliter la résolution de ce système où  $\mathbf{x}$  est fonction du temps, plusieurs techniques sont envisageables [PIP 92].

Une première solution consiste à ramener le domaine mobile à un domaine fictif fixe. Les méthodes reposant sur des *changements de variables* [GUR 90] ou de *repères* [FAR 90] entrent dans cette catégorie. Cependant, ces techniques souffrent de nombreuses restrictions ce qui explique que les *méthodes de type ALE* (Arbitrary Lagrangian Eulerian) leur soient souvent préférées.

Contrairement aux précédentes, les méthodes ALE [DON 82] reposent sur l'utilisation de cellules déformables. D'une manière générale, elles introduisent un maillage mobile dont la vitesse peut varier continûment et arbitrairement entre une valeur nulle (approche eulérienne) et une valeur égale à celle du fluide (approche Lagrangienne). En dernier lieu, citons les *maillages dynamiques* [BAT 90a] dont le principe est similaire à celui des méthodes ALE : les deux approches ne diffèrent que par l'usage qui en est fait d'une formulation intégrale [PIP 92]. Cette dernière technique est simple à mettre en œuvre et facilite l'adaptation des schémas existants. Nous la présentons donc ci-après.

Considérons les équations précédentes et définissons un nouvel espace (dit de référence) de coordonnées mixtes  $\xi$  (figure 2).

Dans le cas général, les deux systèmes de coordonnées  $\mathbf{x}$  et  $\xi$  dépendent du temps. L'intérêt d'introduire un nouvel espace de coordonnées réside essentiellement dans la possibilité de le considérer comme indépendant du temps et de bénéficier ainsi d'un domaine sur lequel les intégrations pourront être rigoureusement et plus facilement calculées. Parmi les choix possibles de domaine de référence, citons le domaine initial ou encore le même domaine à un instant donné antérieur au calcul (pour le cas de grandes déformations susceptibles de dégrader la qualité du maillage et nécessitant des remises à jour régulières).



**Figure 2.** Transformation géométrique  $J$

Ces deux espaces sont reliés par une transformation géométrique qui s'exprime au travers d'un Jacobien  $J$  défini par :

$$J = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \Big|_t \right)$$

La vitesse d'un point du domaine est  $\mathbf{u}_b = u_b \mathbf{i}_x + v_b \mathbf{i}_y$  avec :

$$\mathbf{u}_b = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\xi}$$

Il résulte de l'utilisation de ces coordonnées (voir [PIP 92] pour plus de détails) une nouvelle formulation des équations d'Euler :

$$\frac{\partial (J\mathbf{Q})}{\partial t} \Big|_{\xi} + J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}' = 0 \tag{2}$$

avec  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_x \mathbf{i}_x + \mathbf{F}'_y \mathbf{i}_y$  et :

$$\mathbf{F}'_x = \mathbf{F}_x - u_b \mathbf{Q} \qquad \mathbf{F}'_y = \mathbf{F}_y - v_b \mathbf{Q}$$

Ces équations sont similaires aux équations d'Euler classiques. A ce stade, deux remarques peuvent être formulées :

- seuls les termes de convection sont affectés par la vitesse locale du maillage. Si les équations de Navier-Stokes sont considérées alors les flux visqueux (laminaires et turbulents) restent inchangés ;

- Il est également intéressant de noter que pour  $\xi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}$ , les équations d'Euler classiques sont retrouvées alors que si l'on choisit  $\xi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  (coordonnées Lagrangiennes), la formulation Lagrangienne de la dynamique des gaz est obtenue.

Considérons maintenant une cellule d'intégration du maillage mobile, de volume  $\mathcal{V}$ . Celle-ci occupe un volume  $\mathcal{V}_x$  dans les coordonnées du laboratoire et un volume  $\mathcal{V}_{\xi}$

dans l'espace des coordonnées mixtes. L'intégration de l'équation [2] sur  $\mathcal{V}_\xi$  conduit à :

$$\int_{\mathcal{V}_\xi} \left. \frac{\partial(J\mathbf{Q})}{\partial t} \right|_\xi d\xi + \int_{\mathcal{V}_\xi} J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}' d\xi = \mathbf{0}$$

La dérivée en temps étant prise à  $\xi$  constant et  $\mathcal{V}_\xi$  étant indépendant du temps, la dérivation en temps peut être sortie de l'intégrale. Enfin, le changement de variables  $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$  permet d'obtenir :

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathcal{V}_x} \mathbf{Q} d\mathbf{x} \right] + \int_{\mathcal{V}_x} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}' d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad [3]$$

Cette dernière équation peut être considérée comme la formulation en maillage dynamique des équations d'Euler selon un formalisme de type volumes finis.

## 2.2. Loi de consistance géométrique : GCL

On remarquera que les méthodes de type ALE ou maillage dynamique font intervenir des vitesses de maillage qu'il est nécessaire de traiter rigoureusement pour assurer, au minimum, une indépendance de la solution physique du problème à l'égard de ces dernières. La démarche générale consiste alors à satisfaire une loi dite de conservation géométrique (GCL en anglais) qui stipule que [TRU 61] :

*" Tout champ uniforme et constant solution des équations de Navier-Stokes, doit le rester quel que soit le mouvement du maillage".*

Cette terminologie remonte à la fin des années 70 avec les travaux de Thomas et Lombard [THO 79]. Demirdzic [DEM 88], par exemple, montra que le non-respect de la GCL pouvait générer des puits ou des sources de masse et contribuer à l'apparition d'oscillations numériques.

En maillage fixe, celle-ci se limite à la SCL (Surface Conservation Law [ZHA 93]). Cette loi est obtenue en considérant les équations précédentes sur un maillage fixe, pour un écoulement uniforme dans une direction  $\mathbf{c}$  arbitraire. Son expression analytique, bien connue, prend la forme :

$$\int_S \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

et traduit le fait que chaque cellule de calcul doit être fermée par ses surfaces. Cette équation semble triviale, ce qui explique qu'elle soit rarement mentionnée. Elle est généralement satisfaite pour les schémas de type volumes finis et ne pose pas de problème particulier dans notre cas.

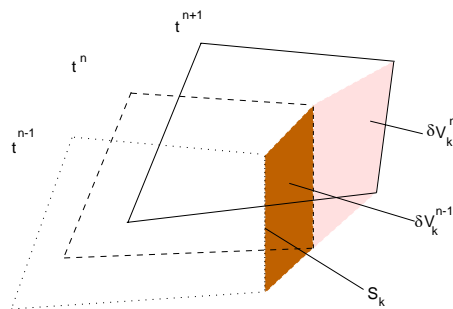
Pour un maillage mobile, la GCL inclut également la loi de conservation volumétrique (VCL : Volume Conservation Law). Elle repose sur le fait qu'un maillage

arbitrairement mobile ne doit pas affecter l'écoulement; elle est déduite à partir de l'équation de continuité pour un fluide de masse volumique uniforme et de vitesse nulle [FAR 96, DEM 88] :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad [4]$$

Soulignons que le non-respect de cette loi conduit à une formation artificielle de puits et de sources de masse.

Afin que la VCL soit vérifiée à chaque pas de temps, Demirdzic [DEM 88, DEM 90] détermine la vitesse normale de chaque surface à partir de la discrétisation de l'équation [4]. Cette discrétisation doit s'effectuer selon la même technique que celle employée pour résoudre l'ensemble des équations d'Euler. Cette méthode est générale : elle permet de déterminer une vitesse normale de chaque surface, respectant la VCL, quel que soit le type de discrétisation temporelle utilisé (explicite, implicite, à un ou plusieurs sous-pas...). Trois exemples illustrent ce point.



**Figure 3.** Volumes  $\delta\mathcal{V}_k^{n-1}$  et  $\delta\mathcal{V}_k^n$  balayés par une surface orientée  $S_k \mathbf{n}$  d'une cellule de contrôle mobile entre les instants  $(t^{n-1}, t^n)$  et  $(t^n, t^{n+1})$  respectivement

**Exemple 1.** Avancement en temps explicite du premier ordre "Euler explicite"

La discrétisation de l'équation [4] à l'aide d'un schéma temporel de type "Euler explicite" s'écrit :

$$\frac{\mathcal{V}^{n+1} - \mathcal{V}^n}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k S_k]^n$$

où l'indice  $n$  fait référence à l'instant  $t^n$  et  $S_k (k \in [1, N_b])$  représente l'une des  $N_b$  surfaces  $\mathcal{S}$  appartenant au volume de contrôle  $\mathcal{V}$ . D'autre part, la variation du volume d'une cellule entre deux instants peut être vue comme la somme des variations



(positives ou négatives) de volume engendrées par le mouvement de chaque surface orientée  $\mathcal{S}_k \mathbf{n}$  :

$$\frac{\mathcal{V}^{n+1} - \mathcal{V}^n}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t}$$

où  $\delta \mathcal{V}_k^n = \delta \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathcal{S}_k \mathbf{n}$  ( $\delta \bar{\mathbf{r}}$  représente le déplacement du centre de la surface) est le volume<sup>2</sup> balayé par la surface orientée  $\mathcal{S}_k \mathbf{n}$  pendant l'intervalle  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  (voir figure 3). Ainsi, la vitesse normale d'une surface  $\mathcal{S}_k$  doit être calculée suivant :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^n = \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^n} \quad [5]$$

pour que la VCL soit vérifiée. Notons que  $\mathcal{V}^{n+1}$  est supposé connu (la position des points du maillage à l'instant  $n + 1$  peut, par exemple, être déduite de celle de l'interface fluide-structure par interpolation).

REMARQUE. — Dans le cas d'un schéma explicite, les flux sont évalués à l'instant  $n$ , c'est pourquoi nous avons choisi (équation [5]) d'évaluer les surfaces  $\mathcal{S}_k$  à l'instant  $n$  (c'est-à-dire au même instant que les autres termes des flux). Ce choix n'est pas dicté par la VCL [ZHA 93] : il est possible de choisir d'évaluer  $\mathcal{S}_k$  à l'instant  $n + 1$  par exemple. Dans ce cas, la relation [5] devient :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^n = \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^{n+1}}$$

Notons que le produit  $(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k$  est inchangé et donc que ces deux choix sont consistants du point de vue de la VCL (*i.e.* vérifient la relation [4]).

### Exemple 2. Avancement en temps implicite du second ordre

Lorsque le code utilise un avancement en temps implicite du second ordre, la discrétisation de l'équation [4] implique :

$$\frac{3\mathcal{V}^{n+1} - 4\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n-1}}{2\Delta t} = \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^{n+1}$$

Comme, de plus,

$$\frac{3\mathcal{V}^{n+1} - 4\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n-1}}{2\Delta t} = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{3\delta \mathcal{V}_k^n - \delta \mathcal{V}_k^{n-1}}{2\Delta t}$$

la vitesse normale de chaque surface doit être calculée suivant :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^{n+1} = \frac{3\delta \mathcal{V}_k^n - \delta \mathcal{V}_k^{n-1}}{\Delta t \mathcal{S}_k^{n+1}} \quad [6]$$

2. Ce "volume" peut être positif ou négatif suivant le signe de  $\delta \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}$ .

On peut noter que les vitesses (*cf.* équations [5] et [6]) doivent être calculées différemment dans ces deux premiers exemples. Cependant, la méthode appliquée pour obtenir ces relations est bien la même dans les deux cas et repose toujours sur la discrétisation de l'équation [4] (seul le schéma d'intégration change).

REMARQUE. — Comme précédemment, les surfaces  $\mathcal{S}_k$  sont évaluées au même instant que les autres termes des flux (donc à l'instant  $n + 1$  pour ce schéma implicite). Rappelons que ce choix est arbitraire et qu'il n'est pas dicté par la VCL (du moins pour la méthode proposée par Demirdzic [DEM 88]).

**Exemple 3.** Runge-Kutta TVD explicite à 3 sous-pas (troisième ordre)

Dans nos calculs, les schémas d'intégration temporelle employés sont de type Runge-Kutta explicite (du second ou troisième ordre). Nous illustrons donc aussi le calcul de la vitesse normale de chaque surface pour un schéma temporel Runge-Kutta TVD au troisième ordre [SHU 88] :

$$\mathcal{V}^{(1)} \mathbf{Q}^{(1)} = \mathcal{V}^n \mathbf{Q}^n + \Delta t L(\mathbf{Q}^n) \quad [7]$$

$$\mathcal{V}^{(2)} \mathbf{Q}^{(2)} = \frac{3}{4} \mathcal{V}^n \mathbf{Q}^n + \frac{1}{4} \mathcal{V}^{(1)} \mathbf{Q}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(\mathbf{Q}^{(1)}) \quad [8]$$

$$\mathcal{V}^{n+1} \mathbf{Q}^{n+1} = \frac{1}{3} \mathcal{V}^n \mathbf{Q}^n + \frac{2}{3} \mathcal{V}^{(2)} \mathbf{Q}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(\mathbf{Q}^{(2)}) \quad [9]$$

où  $L$  représente l'opérateur spatial.

NOTE. — Avant d'appliquer ce schéma de discrétisation à l'équation [4], il est nécessaire de déterminer les volumes  $\mathcal{V}^{(1)}$  et  $\mathcal{V}^{(2)}$ . En premier lieu, notons que le premier sous-pas constitue une estimation  $\mathbf{Q}^{(1)}$  de la solution en  $t^{n+1}$ . On peut donc considérer que  $\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}^{n+1}$ . De même, on considérera que  $\mathcal{S}^{(1)} = \mathcal{S}^{n+1}$  (ces surfaces seront utilisées pour calculer  $L(\mathbf{Q}^{(1)})$ ). Enfin, le second sous-pas étant une estimation  $\mathbf{Q}^{(2)}$  de la solution en  $t^{n+1/2}$ , nous aurons  $\mathcal{V}^{(2)} \approx (\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n+1})/2$ . De même,  $\mathcal{S}^{(2)} \approx (\mathcal{S}^n + \mathcal{S}^{n+1})/2$  (ces surfaces seront utilisées pour calculer  $L(\mathbf{Q}^{(2)})$ ).

L'application du premier sous-pas (équation [7]) de cette méthode à l'équation [4] et les remarques précédentes impliquent :

$$\mathcal{V}^{n+1} = \mathcal{V}^n + \Delta t \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^n$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^n = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t}$$

Cette relation fournit l'expression de la vitesse normale de la surface devant être utilisée au premier sous-pas de l'intégration temporelle :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^n = \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^n} \quad [10]$$

L'application de la relation [8] (second sous-pas) à la discrétisation de l'équation [4] conduit ensuite à :

$$\frac{\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n+1}}{2} \approx \frac{3}{4} \mathcal{V}^n + \frac{1}{4} \mathcal{V}^{n+1} + \frac{1}{4} \Delta t \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^{(1)}$$

soit, après simplification :

$$\sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t}$$

On en déduit l'expression de la vitesse normale d'une surface quelconque  $\mathcal{S}_k$  à utiliser au second sous-pas de l'intégration temporelle :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^{(1)} = \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^{(1)}} \quad [11]$$

Enfin, l'application de la relation [9] (troisième sous-pas) à la discrétisation de l'équation [4] implique :

$$\mathcal{V}^{n+1} = \frac{1}{3} \mathcal{V}^n + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{V}^n + \mathcal{V}^{n+1}}{2} + \frac{2}{3} \Delta t \sum_{k=1}^{N_b} [(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k \mathcal{S}_k]^{(2)}$$

Il en résulte :

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n})_k^{(2)} = \frac{\delta \mathcal{V}_k^n}{\Delta t \mathcal{S}_k^{(2)}} \quad [12]$$

Ainsi, en utilisant les expressions [10], [11] et [12] pour le calcul des vitesses à chaque sous-pas, la VCL est-elle automatiquement vérifiée, comme l'ont confirmé des tests utilisant un fluide uniforme au repos sur un maillage arbitrairement mobile (calculs non présentés).

NOTE. — En toute rigueur, le schéma d'intégration temporelle Runge-Kutta TVD n'est du troisième ordre que pour les problèmes linéaires. De plus, les approximations faites ( $\mathcal{V}^{(1)}$  et  $\mathcal{V}^{(2)}$ ) font que le schéma n'est plus du troisième ordre. Toutefois, il ne s'agit pas d'une source d'erreur significative ([PIP 95], page 197).

D'autre part, concernant l'influence de la mobilité du maillage sur la précision du schéma, les travaux de Guillard et Farhat [GUI 00], notamment, ont montré que le

fait d'assurer un critère de type GCL adapté au schéma, permet d'assurer les mêmes critères de stabilité et de précision que dans le cas d'un maillage fixe. Les auteurs ont aussi montré que plus la précision du schéma augmentait et plus le respect d'une loi GCL devenait primordial.

En résumé, la méthode proposée par Demirdzic [DEM 88] et adoptée ici pour satisfaire la VCL consiste à discrétiser l'équation [4] en tenant compte du schéma temporel employé par le code. Il est également nécessaire de choisir l'instant auquel les surfaces, apparaissant dans les flux, doivent être évaluées : à chaque choix correspond une vitesse normale des surfaces qui respecte la VCL.

### 2.3. *Prise en compte du mouvement du maillage*

La seconde difficulté, liée à ce type de simulations, réside dans le mouvement du maillage lui-même (*i.e.* la transmission du mouvement du bord du domaine fluide au reste du maillage) et peut, elle aussi, être traitée suivant différentes techniques. L'approche retenue par Farhat [FAR 95] en constitue un exemple original. Dans cette référence, le maillage est assimilé à une *pseudo-structure* possédant son propre comportement dynamique. Après discrétisation, celui-ci se voit attribuer une matrice masse  $[M]$ , une matrice de rigidité  $[K]$  et une matrice relative à l'amortissement  $[D]$ . Le couplage fait désormais intervenir trois champs : le fluide, la structure et le maillage dynamique. Cette technique généralise plusieurs méthodes plus classiquement employées, notamment celle de Batina [BAT 90a]. En effet, pour  $[M] = [D] = [0]$ , l'analogie des ressorts, utilisée par Batina [BAT 90a] et modifiée par Blom [BLO 00], est retrouvée.

### 2.4. *Récapitulatif*

Comme nous venons de le voir, le couplage faible en aéroélasticité nécessite de faire communiquer un code fluide et un code structure. Certaines instructions doivent être introduites dans chaque code pour permettre ce dialogue (*cf.* section 4). D'autre part, contrairement au code structure, le code fluide doit subir quelques modifications en plus de l'introduction de ces instructions. Ces modifications sont dues au fait que le mouvement de l'interface fluide-structure modifie le domaine fluide au cours du temps. Nous avons présenté dans cette section différentes techniques permettant de traiter ce problème. Nous avons en particulier présenté la technique dite de "maillage dynamique" dont un des principaux avantages est de permettre une adaptation rapide des schémas existants aux domaines mobiles.

Ainsi, l'adaptation des schémas volumes finis TVD (Total Variation Diminishing, basés sur un solveur de Roe) [ROE 81] et WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) [SHU 88, JIA 96, KUD 98]) utilisés dans cette étude est simple avec cette technique. Elle consiste principalement à :

- faire évoluer le maillage (le mouvement du maillage ayant été supposé, dans cette section, connu et indépendant du fluide) ;
- calculer la vitesse du maillage en respectant la GCL ;
- prendre en compte le flux modifié  $\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \mathbf{u}_q \mathbf{Q}$  au lieu de  $\mathbf{F}$  ;

NOTE. — Il en résulte, par exemple, que la matrice Jacobienne  $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{Q}$ , intervenant dans ces deux schémas, devient  $\mathbf{A} - \mathbf{u}_q \mathbf{I}_d$  ( $\mathbf{I}_d$  désigne la matrice identité), d'où une modification des valeurs propres associées à cette matrice. La référence [LAN 91] décrit plus en détails les modifications à apporter au schéma de Roe, celles à introduire dans le schéma WENO sont similaires.

- prendre en compte la vitesse du maillage dans le calcul du pas de temps :

$$\Delta t = \frac{CFL}{\max_{i,j} \left( (|u - u_b|_{i,j} + a_{i,j}) / \Delta x_{i,j} + (|v - v_b|_{i,j} + a_{i,j}) / \Delta y_{i,j} \right)} \quad [13]$$

où  $a$  est la célérité du son et  $CFL < 1$ .

- prendre en compte la vitesse du maillage dans les conditions aux limites ;
- valider le code fluide obtenu (*cf.* section suivante).

### 3. Exemple d'applications au fluide en domaine évolutif

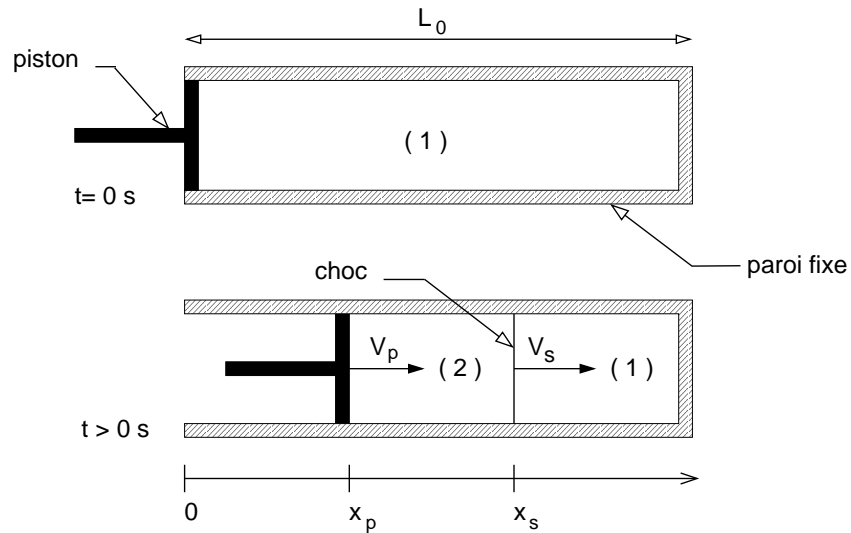
Cette section est consacrée à la validation de la méthode de maillage dynamique et permet de mieux en appréhender les possibilités. Des cas-tests monodimensionnels et bidimensionnels sont investis. Le choix de ces cas-tests a été motivé par la présence d'ondes de choc, ce qui les rapproche des écoulements dans les tuyères. Les solveurs utilisés pour l'ensemble des simulations présentées sont de type volumes finis et reposent sur des schémas TVD ou WENO en maillages structurés.

#### 3.1. Compression dans un piston

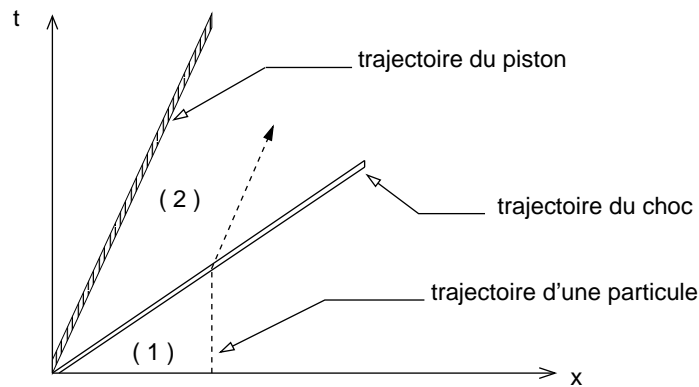
Le dispositif simulé consiste en une chambre contenant un gaz au repos, obstruée à l'une de ses extrémités par un piston (*cf.* figure 4) et permet de générer des ondes de choc instationnaires.

A l'instant initial, le piston est brutalement déplacé à une vitesse constante unitaire  $V_p$  de sorte à comprimer le gaz (*cf.* figures 4 et 5). L'onde de choc ainsi générée se propage dans le milieu au repos, défini par l'état 1. Connaissant la vitesse  $V_p$  du piston et la célérité  $a_1$  du son dans le milieu au repos, le nombre de Mach  $M_s$  de cette onde ainsi que sa vitesse et sa position peuvent être aisément déduits [EMA 86] :

$$\frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_s^2 - 1}{M_s} = \frac{V_p}{a_1} \quad ; \quad V_s = M_s a_1 \quad ; \quad x_s = V_s t \quad [14]$$



**Figure 4.** Génération d'une onde de choc instationnaire



**Figure 5.** Diagramme  $x-t$  correspondant à la compression du gaz

Enfin, un écoulement gazeux (état 2) de même vitesse que le piston est induit entre celui-ci et l'onde de choc. Ses caractéristiques sont déterminées par les conditions initiales (état 1) et le nombre de Mach du choc :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^2 \frac{1}{M_s^2} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2 \right) \left( \gamma M_s^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \right) \quad [15]$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \gamma M_s^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \right) \quad ; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} \quad [16]$$

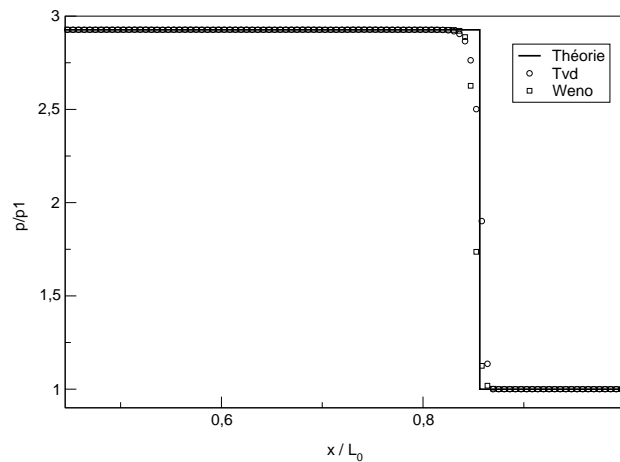
La cavité d'une longueur de référence  $L_0$  contient initialement de l'air au repos ( $\gamma = 1.4$ ) dont la pression  $p_1$  et la masse volumique  $\rho_1$  sont choisies unitaires. D'autre part, le maillage, composé d'une centaine de mailles, est mis à jour à chaque itération en imposant une variation linéaire de la vitesse de ses points (de  $V_p$  pour le premier point à 0 pour le dernier).

Les conditions aux limites sont de type glissement sur l'ensemble des parois (cylindre et piston). Les calculs sont réalisés à l'aide des schémas TVD<sup>3</sup> et WENO<sup>4</sup>. Le pas de temps est calculé suivant l'équation [13] avec un CFL=0.6 pour les deux schémas.

$p_2/p_1$	$\rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$V_2/a_1$
2.93	2.08	1.41	0.84

**Tableau 1.** Evolution spatiale théorique des grandeurs physiques caractéristiques

Théoriquement, l'onde de choc se propage à un nombre de Mach  $M_s = 1.63$  (équation [14]). Les grandeurs caractéristiques (relations [15] et [16]) théoriques de l'état 2 induit par le choc sont présentées dans le tableau 1. Ces résultats sont très bien retrouvés par les simulations numériques réalisées, comme en témoignent les profils de pression obtenus à un instant quelconque et représentés sur la figure 6.



**Figure 6.** Profils adimensionnés de pression à l'instant adimensionné  $t^* = ta_1/L_0 = 0.529$

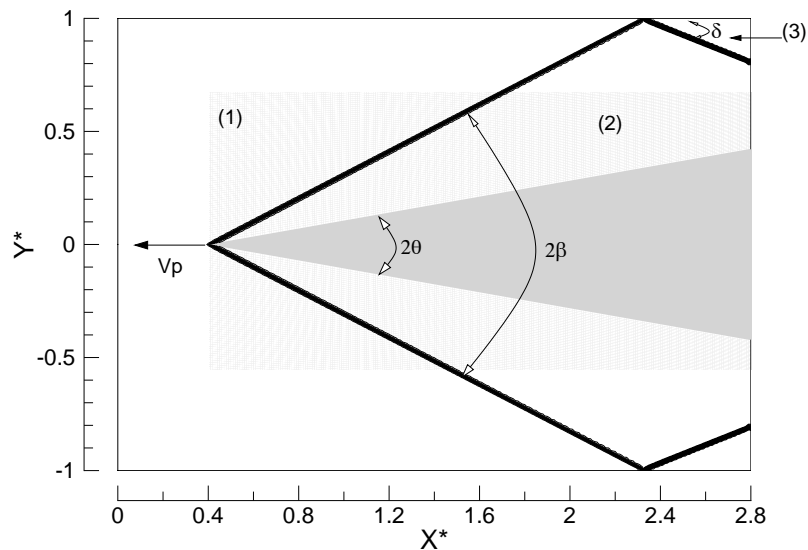
3. Solveur de Roe, reconstruction des variables caractéristiques à l'ordre 2, limiteur minmod et avancement en temps Runge-Kutta d'ordre 2.
4. Ordre 5 en espace, fractionnement des flux de Lax-Friedrichs et avancement en temps Runge-Kutta TVD d'ordre 3.

### 3.2. Projectile placé dans un écoulement supersonique

Ce second cas-test a pour objectif de tester nos codes de calcul en maillage dynamique sur une configuration bidimensionnelle. Il repose sur l'évolution d'un projectile bidimensionnel plan placé dans un écoulement supersonique. Celui-ci, dans un premier temps immobile, est par la suite animé d'une certaine vitesse.

#### 3.2.1. Cas 1 : projectile fixe

Un projectile (cf. figure 7) de demi-angle au sommet  $\theta = 10^\circ$  est brutalement introduit dans un écoulement supersonique à un nombre de Mach de 3.



**Figure 7.** Projectile fixe ( $V_p = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ) soumis à un écoulement supersonique ( $M_1 = 3.0$ ) : iso-contours de pression obtenues à l'aide du schéma WENO et définition des notations utilisées.  $X^* = X/h$  et  $Y^* = Y/h$  (où  $h$  est la demi-hauteur du canal, prise unitaire)

La présence de cet obstacle dans l'écoulement supersonique génère une onde de choc oblique qui se réfléchit sur la paroi supérieure du canal. Les caractéristiques physiques des différentes régions de l'écoulement induites par les réflexions du choc peuvent être établies analytiquement [EMA 86] et sont résumées dans le tableau 2.

Etant donnée la symétrie du problème, seule la moitié supérieure de la configuration, apparaissant sur la figure 7, a été simulée. Le maillage réalisé comporte  $(N_x \times N_y) = (280 \times 100)$  mailles. Les conditions initiales sont définies par l'état 1 et les conditions aux limites sont les suivantes :

- entrée supersonique (toutes les grandeurs sont imposées) ;



- sortie supersonique (extrapolation de toutes les variables) ;
- conditions de glissement sur toutes les parois ;
- conditions de symétrie (*i.e.* glissement) sur l'axe ( $y = 0$ ).

Le CFL est fixé à 0.9 pour le schéma TVD et 0.7 pour le schéma WENO.

$\beta$	$M_2$	$p_2/p_1$	$T_2/T_1$	$\rho_2/\rho_1$
27.38°	2.51	2.05	1.24	1.65
$\delta$	$M_3$	$p_3/p_1$	$T_3/T_1$	$\rho_3/\rho_1$
21.79°	2.09	3.83	1.49	2.56

**Tableau 2.** Evolution spatiale des grandeurs physiques caractéristiques. Etats (2) et (3), valeurs théoriques

Les iso-valeurs de pression obtenues à l'aide du premier schéma sont présentées sur la figure 7 (les résultats du WENO sont comparables et ne sont donc pas exposés). L'ensemble des grandeurs physiques des régions 2 et 3 est en parfait accord avec la théorie. En particulier, les angles  $\beta$  et  $\delta$  sont très bien prédits. Ceci confirme la robustesse et la précision de nos codes, en l'absence de mouvement du maillage.

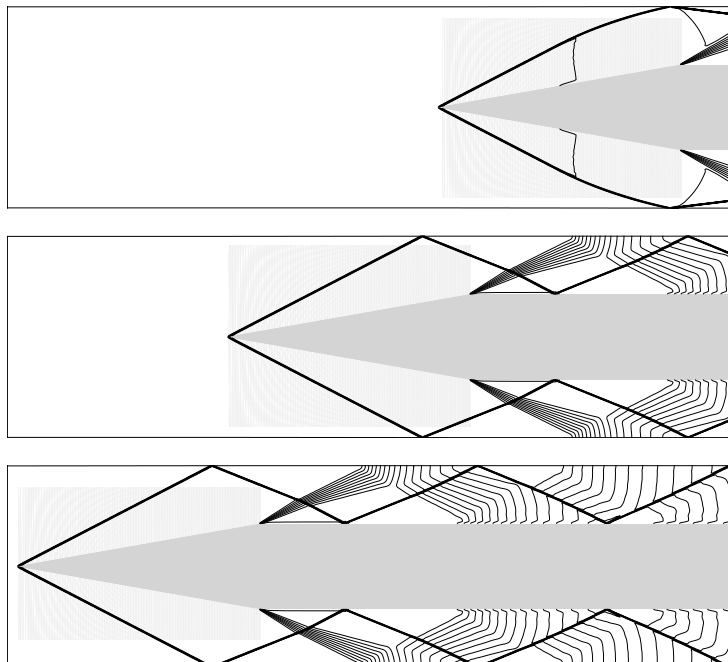
### 3.2.2. Cas 2 : projectile mobile

Le projectile est maintenant animé d'une vitesse  $V_p = 260 \text{ m.s}^{-1}$  ce qui correspondrait à un nombre de Mach  $M_p = V_p/a_1 = 0.75$ . La pression et la température du fluide en amont de l'obstacle sont inchangées mais sa vitesse est telle que son nombre de Mach soit égal à 2.25. Par conséquent, dans le référentiel lié au projectile en mouvement, l'écoulement supersonique amont possède un nombre de Mach relatif de 3.0. Ainsi, pour le projectile, ce second cas est équivalent au précédent ( $M_1 = 3.0$ ). En particulier, les angles  $\beta$  et  $\delta$  des chocs formés doivent être égaux à ceux obtenus dans le cas précédent.

Le fuselage du projectile, dont seul le bord d'attaque a été simulé dans le cas 1, est supposé avoir une hauteur constante. Comme précédemment, seule la moitié supérieure de la configuration a été simulée. Le domaine de calcul est un rectangle de longueur  $7.2 h$  comportant  $(N_x \times N_y) = (450 \times 100)$  mailles. Les conditions initiales sont définies par l'état 1, les conditions aux limites, le CFL et les schémas numériques employés sont identiques au cas 1 (pour un CFL de 0.9, le pas de temps obtenu est d'environ  $5 \times 10^{-6} \text{ s}$ ).

Le maillage est remis à jour à chaque itération, le projectile s'étant déplacé durant celle-ci de la distance  $V_r \Delta t$ .

Les résultats obtenus à trois instants différents de la simulation sont présentés sur la figure 8. Les angles des chocs et du faisceau de détente sont très bien prédits et la topologie de l'écoulement est de bonne qualité (absence d'oscillations numériques...). La technique de maillage dynamique est ainsi validée.



**Figure 8.** Projectile lancé à  $V_p = 260 \text{ m.s}^{-1}$  dans un écoulement supersonique à un nombre de Mach  $M_1$  de 2.25. Iso-contours de masse volumique aux instants  $t^* = ta_1/h = 0.69$ ,  $t^* = 3.47$  et  $t^* = 6.25$  (schéma TVD)

#### 4. Spécificités du couplage

Nous exposons maintenant les spécificités du couplage. Dans un premier temps, nous rappelons les principales différences entre le couplage fort et le couplage faible. La souplesse de ce dernier est ainsi mise en évidence. Les principes généraux de plusieurs algorithmes de couplage faible ainsi que les problèmes sous-jacents sont introduits. Cette section décrit donc la mise en œuvre du couplage proprement dit (*i.e.* la mise en œuvre des transferts d'information entre les codes fluide et structure).

Selon Cebal [CEB 97], on peut résumer les différents types de couplage existants :

- le *couplage fort* repose sur la résolution, à chaque instant, d'un seul système couplé pour le fluide et pour la structure : le couplage est porté par un modèle mathématique unique ;
- le *couplage faible* consiste à établir un dialogue entre deux codes dont l'un est dédié à la structure et l'autre au fluide.

Le couplage fort est réalisé grâce à des algorithmes *monolithiques* [FEL 93] et n'introduit pas de décalage temporel entre le fluide et la structure. Cependant, certains numériciens ne lui sont pas favorables. Dans le cas général, la formulation du problème en un unique système ne serait pas aisée. Cebral [CEB 97] souligne, de plus, que la matrice complète du système couplé peut être mal conditionnée<sup>5</sup> et qu'un important travail de réécriture des codes peut être nécessaire et choisit de s'orienter vers le couplage faible.

Parmi les avantages de ce second type de couplage figure sa grande souplesse : il préserve en effet la modularité de chacun des codes de calcul. Ainsi, il permet de bénéficier des méthodes les plus performantes dans chacune des disciplines et simplifie les traitements explicite/implicite ainsi que le sous-cyclage [LES 98]. Ces avantages nous ont conduits à employer ce couplage pour nos simulations couplées. Cependant, plusieurs réflexions doivent accompagner le choix de l'algorithme de couplage. Le choix du « bon candidat » doit être conditionné d'après :

1) L'échelle des temps caractéristiques des physiques étudiées. Certains auteurs (De Langre [DEL 00]) introduisent la notion de vitesse réduite comme étant le rapport des temps caractéristiques respectifs du fluide et de la structure pour une longueur donnée :

$$U_R = \frac{V_{fluide}}{V_{struct.}} = \frac{\Delta t_{struct.}}{\Delta t_{fluide}}$$

Ce paramètre offre ainsi un classement des couplages selon que :

- $U_R \ll 1$  : fluide sans écoulement (retenue de barrage...)
- $U_R \equiv 1$  : fluide avec écoulement lent (voile dans le vent...)
- $U_R \gg 1$  : fluide avec écoulement rapide (aéroélasticité...),

2) La nature des discrétisations temporelles employées pour les deux codes (explicite, implicite, recherche d'un état stationnaire, transitoire...).

Ces deux points conditionnent la nécessité ou pas d'itérer au sein du processus de couplage ainsi que la fréquence de remise à jour des variables communes au fluide et à la structure (typiquement la frontière du domaine et le champ de pression pariétal).

3) Concernant ce dernier aspect, se pose aussi le problème du choix du profil de pression pariétal à transmettre au code de structure. Le champ transmis correspond-t-il à celui calculé à l'instant 'n', 'n+1' ou à une combinaison des deux [PIP 00] ?

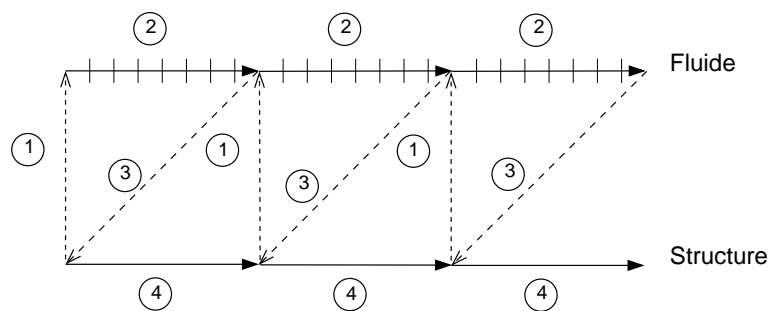
4) Enfin, le choix des moyens informatiques de transfert des informations entre les deux codes doit aussi être pris en compte.

#### 4.1. Principaux schémas de couplage 'faible'

Les *algorithmes décalés* [FAR 95, BLO 97] font partie du premier point. Le principe du plus simple de ces algorithmes (CSS : *Conventional Serial Staggered* [PIP 00]) est le suivant (figure 9) :

5. Ceci peut se justifier par les différences entre les "rigidités" du fluide et de la structure et entre leurs discrétisations respectives.

- 1) transfert des déplacements  $u^n$  de la structure vers le fluide et actualisation de la position du maillage mobile ;
- 2) intégration temporelle du fluide. Celle-ci peut-être sous-cyclée [PIP 95] ( $N_{fs}$  pas fluide pour un pas structure). En effet, le pas de temps fluide  $\Delta t_f$  est souvent très inférieur au pas de temps structure  $\Delta t_s$  ;
- 3) transfert de la pression  $P_s^{n+1}$  du fluide vers la structure et calcul des charges induites ;
- 4) intégration temporelle de la structure : calcul des déplacements  $u^{n+1}$  à l'instant  $t^{n+1}$ .



**Figure 9.** Principe de l'algorithme CSS [PIP 00]

Toutefois, cet algorithme est d'une précision inférieure à celles des solveurs fluide et structure employés et moins stable que ceux-ci [PIP 00].

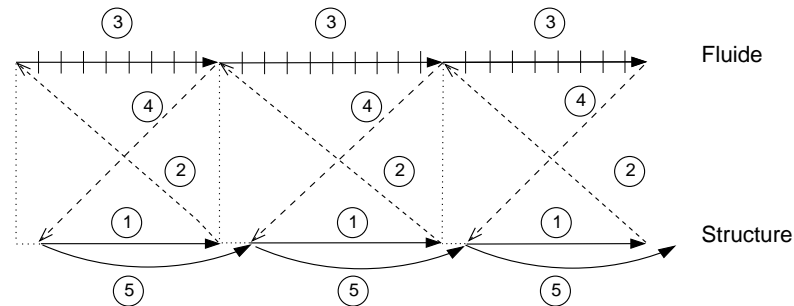
Plusieurs auteurs ont utilisé une *procédure itérative de prédiction/correction* [BLO 98b] afin de remédier à ces problèmes, bien que ces algorithmes requièrent un temps de calcul, par pas de temps, relativement important. D'autres ont choisi de généraliser l'algorithme CSS (*generalized Conventional Serial Staggered* [PIP 00]) et d'en contrôler la précision. L'intégration en temps est décomposée selon les étapes suivantes (figure 10) :

- 1) prédiction du déplacement de la structure à  $t^{n+1}$  selon :

$$u_p^{n+1} = u^n + \alpha_0 \Delta t_s \dot{u}^n + \alpha_1 \Delta t_s (\dot{u}^n - \dot{u}^{n-1})$$

où  $u_p$  représente la prédiction,  $\dot{u}$  la vitesse de la structure et  $\alpha_i$  ( $i=0,1$ ) deux paramètres numériques.

- 2) transfert de la prédiction au fluide et actualisation de la position  $x^{n+1}$  du maillage ;
- 3) intégration en temps du fluide avec éventuellement sous-cyclage ;
- 4) transfert de la pression  $P_s^{n+1}$  vers la structure et calcul des charges induites ;
- 5) intégration en temps de la structure : calcul des déplacements  $u^{n+1}$  à l'instant  $t^{n+1}$ .



**Figure 10.** Principe de l'algorithme CSS généralisé [PIP 00]

La prédiction utilisée pour mettre à jour le maillage du fluide ne vérifiant pas, en général  $u_p^{n+1} = u^{n+1}$ , ces algorithmes définissent une double interface entre le fluide et la structure. Par ailleurs, une analyse de l'évolution de l'énergie du système couplé a mis en évidence l'importance des choix de la prédiction (étape 1) et du champ de pression  $P_s^{n+1}$  transmis à la structure sur la conservation de l'énergie de ce système [PIP 00].

Enfin, on notera qu'il n'est pas simple de respecter simultanément la GCL et la continuité des positions et des vitesses du fluide et de la structure à l'interface. Aussi, Lesoinne et Farhat [LES 98] ont-ils développé un algorithme dit ISS (*Improved Serial Staggered*) répondant à l'ensemble de ces contraintes. Ces algorithmes reposent sur des intégrations du fluide et de la structure aux instants  $(t^{n-1/2}, t^{n+1/2} \dots)$  et  $(t^n, t^{n+1} \dots)$  respectivement.

En dernier lieu, soulignons que des difficultés similaires (en termes de conservation de l'énergie, dans l'espace cette fois) existent si les maillages du fluide et de la structure ne coïncident pas à l'interface. Néanmoins, des solutions sont proposées dans les références [FAR 95, CEB 97].

### Moyens informatiques

Dans la pratique, le transfert d'information entre les deux codes est réalisé grâce à une bibliothèque de calcul parallèle (de type PVM : Parallel Virtual Machine ou MPI : Message Passing Interface). Plusieurs cours sur ces bibliothèques sont disponibles sur Internet (voir par exemple [IDR 02b]).

NOTE. — Aujourd'hui la bibliothèque MPI a largement pris le pas sur la bibliothèque PVM. Il est donc recommandé d'utiliser cette bibliothèque bien que PVM reste intéressante dans le cadre de l'utilisation conjointe de machines hétérogènes.

---

6. Numériquement, cela se traduit souvent par le fait que le fluide emploie un avancement en temps explicite et la structure un avancement implicite.

Les codes fluide et structure sont installés sur une machine multiprocesseur ou sur un cluster de machines (homogènes ou hétérogènes) disposant d'une bibliothèque de calcul parallèle. Nos calculs couplés, par exemple, sont effectués sur des machines parallèles de type CRAY T3E, SGI ORIGIN 2000, et IBM SP4. Ensuite, un processeur est associé à chaque code grâce à des instructions spécifiques MPI ou PVM. Les échanges entre processeurs (donc entre codes) sont effectués grâce à des instructions d'envoi et de réception. La bibliothèque MPI par exemple dispose de sous-routines telles que MPI\_[R, S, B]SEND() et MPI\_RECV().

### Récapitulatif

En résumé, la mise en œuvre du couplage faible proprement dit nécessite de :

- choisir un algorithme de couplage (CSS, GCSS, ISS avec ou sans sous-cyclage...) adapté à la physique du problème couplé ;
- choisir le champ de pression à transférer [PIP 00] en rapport avec la précision du schéma couplé ;
- choisir une bibliothèque de calcul parallèle (PVM, MPI...). Ce choix dépend de la machine ou du cluster sur lequel les calculs seront effectués ;
- valider le nouveau code obtenu (section suivante).

## 5. Validation du couplage : cas du flutter

### 5.1. Position du problème et analyse théorique

Ce cas-test classique en aéroélasticité consiste en l'étude de la stabilité d'une plaque semi-infinie placée dans un écoulement supersonique [FUN 58]. D'un point de vue numérique, ce cas-test constitue une validation de la "partie couplage" des codes fluide et structure : il permet en effet d'estimer l'amortissement numérique introduit lors du couplage ainsi que le "calage en temps des deux codes".

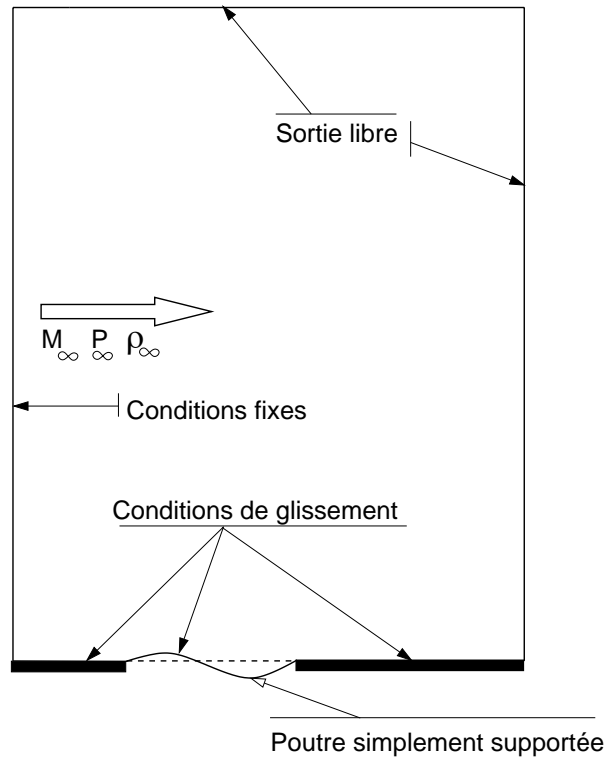
Une plaque semi-infinie, modélisable par une poutre, est placée dans un écoulement supersonique (*cf.* figure 11) dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Densité à l'infini :  $\rho_\infty = 0.4 \text{ kg.m}^{-3}$
- Pression à l'infini :  $P_\infty = 13000 \text{ Pa}$

La plaque, dont les propriétés matériaux sont les suivantes :

- Module d'Young :  $E = 7.728 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2}$
- Epaisseur :  $h = 1.35 \times 10^{-3} \text{ m}$
- Longueur :  $L = 0.5 \text{ m}$
- Masse volumique :  $\rho_s = 2710 \text{ kg.m}^{-3}$
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0$

est simplement supportée à ses extrémités. Plus précisément, cette plaque est soumise à la pression  $P(x, t)$  du fluide sur sa partie supérieure et à une pression constante  $P = P_\infty$  sur sa partie inférieure.



**Figure 11.** Configuration étudiée

Le calcul de la valeur théorique des conditions critiques de flutter repose sur l'équation de la dynamique d'une poutre en flexion, donnée par :

$$\rho_s b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E b h^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b \Delta P(x, t) = 0 \quad [17]$$

où  $b$  est la profondeur de la poutre (choisie unitaire),  $w$  la composante verticale du déplacement et  $\Delta P(x, t) = P(x, t) - P_\infty$  les efforts aérodynamiques résultants. Ce dernier terme peut être approximé, selon la théorie du piston [ASH 56], par :

$$\Delta P(x, t) = \alpha \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad [18]$$

où  $u_\infty$  et  $M_\infty$  sont respectivement la vitesse du fluide à l'infini et le nombre de Mach qui lui est associé. Les conditions aux limites pour une poutre simplement supportée

s'écrivent :  $w(x=0) = w(x=L) = \partial^2 w / \partial x^2(x=0) = \partial^2 w / \partial x^2(x=L) = 0$ . Notons que l'équation [17] n'est valable que dans le cadre des petits déplacements ( $w < h/2$ ). Par la suite, nous étudions le système formé des équations mathématiques [17] et [18]. Cette analyse nous servira de référence lors du couplage de codes.

Nous choisissons d'étudier le système précédent en ramenant l'équation [17] à un problème aux valeurs propres où intervient le paramètre de charge  $\alpha$ , fonction du nombre de Mach  $M_\infty$ . En effet, cette méthode met bien en évidence l'influence du nombre de Mach sur les fréquences propres de la structure.

L'application de la méthode des éléments finis à l'équation [17] conduit à la forme générale suivante :

$$[M]\{\ddot{W}\} + ([K] + \alpha[K_p])\{W\} = \{0\} \quad [19]$$

où  $[M]$  est la matrice masse globale,  $[K]$  la matrice de rigidité globale,  $[K_p]$  la matrice de charge externe globale issue de la théorie du piston et  $\{W\}$  le vecteur solution des déplacements nodaux verticaux. Les matrices  $[M]$  et  $[K]$  utilisées sont celles de l'élément de poutre de Bernoulli dont une description figure dans la référence [BAT 90c].

L'écriture de  $\{W\}$  sous forme modale :

$$\{W\}(x, t) = \{\overline{W}\}(x)e^{i\omega t} \quad ; \quad \omega : \text{pulsation}$$

conduit au problème aux valeurs propres suivant :

$$(([K] + \alpha[K_p]) - \lambda[M])\{\overline{W}\} = \{0\} \quad [20]$$

où  $\lambda = \omega^2$  est la valeur propre associée au mode propre  $\{\overline{W}\}$ .

Ainsi, nous pouvons considérer que les efforts aérodynamiques contribuent à modifier la rigidité naturelle de la structure. Pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire en l'absence d'efforts aérodynamiques, la résolution de [20] fournit pour les deux premières fréquences propres naturelles ( $f_n = \omega_n / 2\pi$ ) de la plaque semi-infinie  $f_1 = 13 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 52 \text{ Hz}$ , ce qui est en très bon accord avec les valeurs théoriques ( $13.07 \text{ Hz}$  et  $52.30 \text{ Hz}$ ) déduites de :

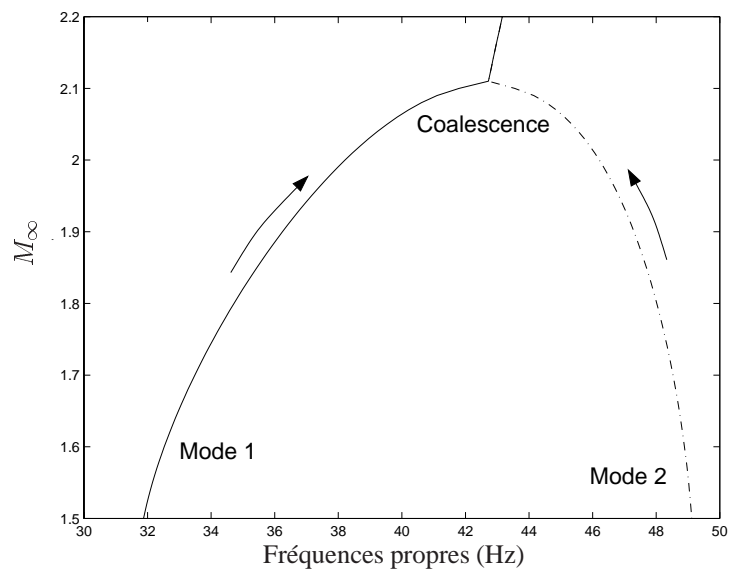
$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{D}{m_0 L^4}} \quad \text{avec} \quad m_0 = \rho_s b h \quad \text{et} \quad D = \frac{E b h^3}{12} \quad [21]$$

où  $\omega_n$  représente la  $n^{\text{ième}}$  pulsation propre.

Lorsque le paramètre  $\alpha$  varie, les fréquences propres sont modifiées (cf. figure 12). Ainsi lorsque  $\alpha$  augmente (i.e. lorsque  $M_\infty$  augmente), les deux premières fréquences propres de la structure tendent à se rapprocher jusqu'à se confondre (coalescence de mode) pour une valeur critique  $\alpha_c$  correspondant à l'apparition du phénomène de flutter. Dans notre cas, le nombre de Mach associé à la valeur critique  $\alpha_c$  vaut :  $M_{crit}^{th} = 2.11$  et la fréquence de coalescence des deux premiers modes est de  $42 \text{ Hz}$  environ. En deçà de cette valeur de  $\alpha$ , la structure adopte un comportement stable, et



tend vers une position d'équilibre correspondant à sa position au repos. A l'approche de cette valeur, la dissipation d'énergie emmagasinée par la structure ralentit jusqu'à se stabiliser pour  $\alpha = \alpha_c$ . A ce stade, le mouvement de la structure est auto-entretenu, l'énergie captée par le premier mode est transmise au second mode sans dissipation<sup>7</sup>. Au delà de  $\alpha_c$ , les deux modes prennent des valeurs imaginaires et la structure adopte un comportement harmonique instable.



**Figure 12.** Evolution théorique des deux premières fréquences propres de la structure en fonction du nombre de Mach  $M_\infty$ . Résolution des équations [17] et [18] par analyse modale

## 5.2. Couplage a priori

Dans cette partie, nous testons le code de structure REFLEX [BAT 90b] employé pour le couplage.

### 5.2.1. Principe

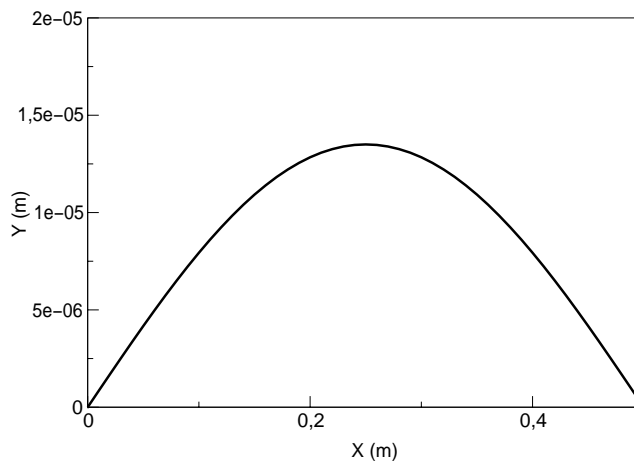
Le principe de ce couplage *a priori*, résumé sur la figure 14, est décrit ci-dessous.

1) Calcul du premier mode propre de la structure (*cf.* figure 13) et perturbation de la position de la structure suivant ce mode.

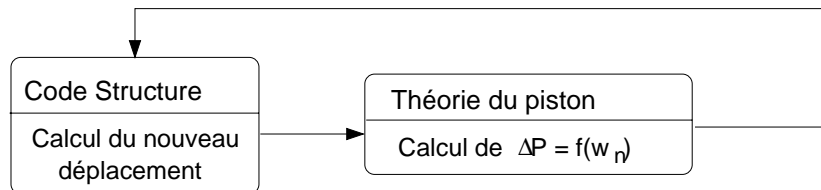
2) Le code structure évalue la charge initiale  $\Delta P_{piston}^0$  à partir de la théorie du piston.

<sup>7</sup>. Ceci est dû à la valeur commune prise par ces deux derniers.

- 3) Le code structure calcule le nouveau déplacement  $w^{n+1}$  de la poutre soumise à la charge aérodynamique  $\Delta P_{piston}^n$ .
- 4) Ce même code calcule la nouvelle charge aérodynamique  $\Delta P_{piston}^{n+1}$  à l'aide de la théorie du piston à partir du déplacement  $w^{n+1}$ .
- 5) Mise à jour des grandeurs.
- 6) Retour au point 3, jusqu'à atteindre l'instant final choisi.
- 7) Examen de la réponse temporelle de la structure.



**Figure 13.** Premier mode propre naturel de la structure



**Figure 14.** Couplage a priori, test du code structure. Schématisation des étapes 3 à 6

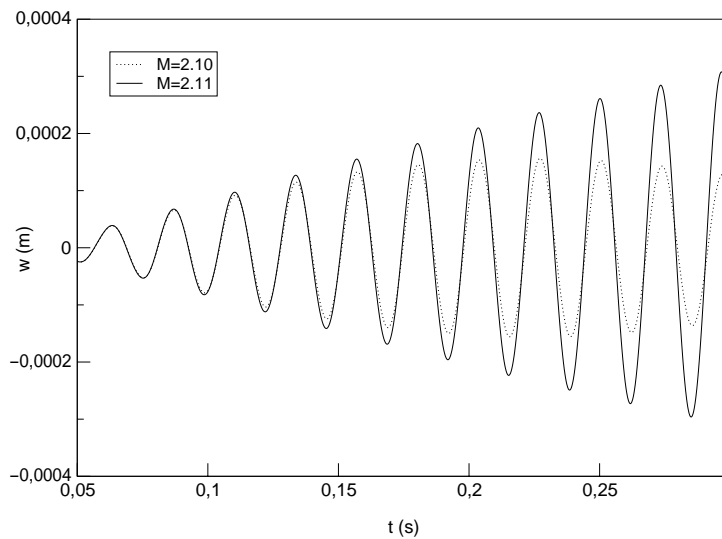
### 5.2.2. Test du code structure

Ce test permet de vérifier le bon fonctionnement (schéma temporel...) du code structure REFLEX [BAT 90b]. En effet l'équation résolue est une formulation éléments finis de [17] :

$$[M]\{\ddot{W}\} + [K]\{W\} = \{F\} \quad [22]$$

où le vecteur sollicitation  $\{F\}$  est déduit de la théorie du piston. Par conséquent, la solution obtenue par REFLEX doit coïncider avec celle établie à l'aide de la résolution par analyse modale.

Le code REFLEX emploie le schéma temporel de Newmark implicite pour lequel  $\alpha=\beta=0.5$  et utilise, pour représenter la structure, un modèle de poutre ne contenant que des termes linéaires et ne prenant pas en compte le cisaillement transversal, conformément à l'analyse théorique (élément de poutre de type Bernoulli). Le maillage de la structure comporte 50 éléments de type poutre. Les conditions aux limites sont résumées sur la figure 11. Le pas de temps choisi est de l'ordre de  $4 \times 10^{-6}$  s au cours de la simulation (même pas de temps que le calcul couplé suivant).



**Figure 15.** Evolution temporelle du déplacement vertical en  $x=0.25$  m. Couplage a priori. On notera que les déplacements obtenus vérifient bien l'hypothèse des petits déplacements

La figure 15 expose l'évolution temporelle du déplacement en  $x=0.5$  m pour  $M_\infty=2.10$  et  $M_\infty=2.11$ . Les résultats obtenus sont en bon accord avec la théorie, ce qui démontre le bon comportement du code structure.

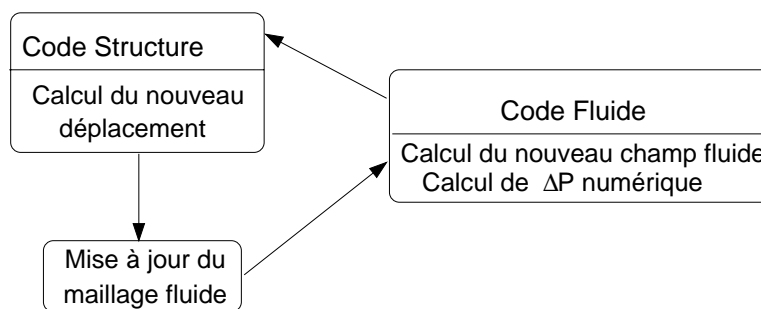
Ainsi, il ne nous reste qu'à introduire et valider un algorithme de couplage entre les codes fluide et structure.

### 5.3. Validation du couplage de codes

Le problème est maintenant résolu en couplant les codes fluide et structure. Il s'agit ici de valider l'algorithme de couplage de ces codes en estimant l'amortissement numérique introduit ainsi que le "calage en temps des deux codes".

NOTE. — Ce travail a également fait l'objet d'une collaboration avec l'équipe Calcul Scientifique Coopératif de l'IDRIS dans le cadre du Projet Eurogrid [IDR 02a]. Un des avantages de l'approche basée sur CORBA, qui a été utilisée par l'IDRIS, est de

permettre l'interopérabilité entre applications et calculateurs hétérogènes. L'ensemble des trois modules (structure, fluide et visualisation) ont été installés sur trois centres (IDRIS - IBM SP3 - centre de calcul de l'université de Manchester - SGI O2000 et O3000 - et Forschungszentrum à Jülich - IBM RS6000 et grappe de machines Pentium sous Linux) et utilisés de façon interchangeable suivant les besoins. Dans les démonstrations publiques qui ont été faites, la visualisation tournait à l'IDRIS (France) ou bien à Manchester (Angleterre), le code structure à Manchester ou bien à l'IDRIS et le code fluide à Jülich (Allemagne).



**Figure 16.** Couplage des codes fluide et structure. Schématisation des étapes 6 à 9

Comme précédemment, la détermination des conditions de flutter se fait en augmentant le nombre de Mach  $M_\infty$ , jusqu'à apparition de l'instabilité de la structure. La méthode de résolution utilisée pour chaque calcul est schématisée sur la figure 16. Contrairement au couplage *a priori*, la théorie du piston n'intervient pas : la charge aérodynamique  $\Delta P$  transmise au code structure pour construire le vecteur des sollicitations aérodynamiques  $\{F\}$  (cf. équation [22]) est calculée par le code fluide. La structure influence le fluide et réciproquement. Le principe du couplage est similaire à celui exposé dans la section précédente.

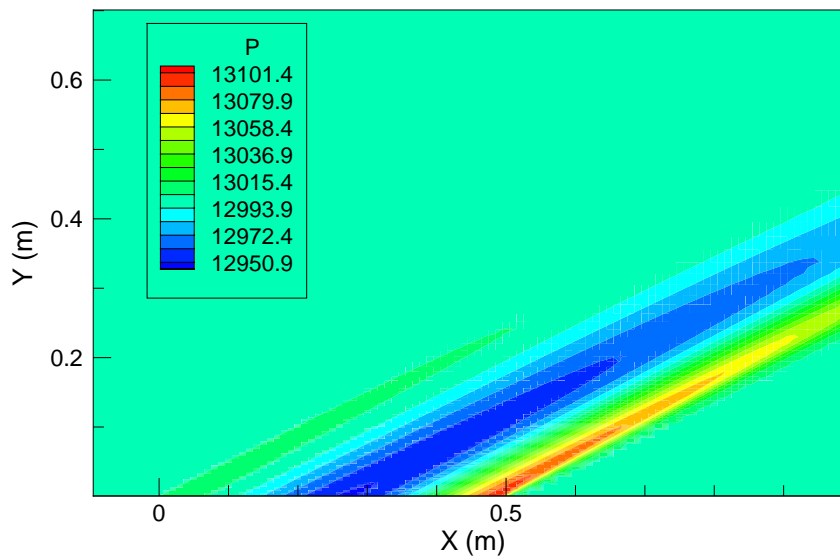
- 1) Calcul du premier mode propre de la structure (cf. figure 13) et perturbation de la position de la structure suivant ce mode.
- 2) Modification du maillage fluide afin de coïncider avec la position perturbée de la structure.
- 3) Calcul du champ fluide initial convergé : obtention d'un champ fluide pour un nombre de Mach infini donné et une structure figée.
- 4) Libération de la structure (la structure retrouve sa flexibilité).
- 5) Le code fluide calcule la charge initiale  $\Delta P_{num}^0$ .
- 6) Le code structure calcule le nouveau déplacement  $w^{n+1}$  de la poutre soumise à la charge aérodynamique  $\Delta P_{num}^n$ .
- 7) Le code structure transmet  $w^{n+1}$  au code fluide. Le maillage fluide est modifié en conséquence et le nouveau champ de pression ainsi que la charge aérodynamique résultante  $\Delta P_{num}^{n+1}$  sont calculés. Le code fluide transmet  $\Delta P_{num}^{n+1}$  à la structure.

- 8) Mise à jour des grandeurs.
- 9) Retour au point 6, jusqu'à atteindre l'instant final choisi.
- 10) Examen de la réponse temporelle de la structure.

Nous avons choisi par simplicité de faire communiquer les codes fluide et structure suivant un simple algorithme de type CSS sans sous-cyclage.

NOTE. — Les problèmes de stabilité de cet algorithme ne sont généralement significatifs que si un sous-cyclage trop grand est introduit. Par ailleurs, cet algorithme reste précis si les communications s'effectuent à chaque pas de temps fluide (et lorsque ce dernier code est explicite). Ceci explique notre choix.

Par ailleurs, le maillage du fluide est de  $(110 \times 126)$  mailles et coïncide avec le maillage de la structure à l'interface. De plus, le maillage fluide n'est modifié que localement au niveau de l'interface. Le CFL du fluide est fixé à 0.8 ( $\Delta t$  de l'ordre de  $4 \times 10^{-6}$  s au cours de la simulation). Enfin les transferts d'information entre les deux codes sont effectués grâce à la librairie de calcul parallèle MPI.

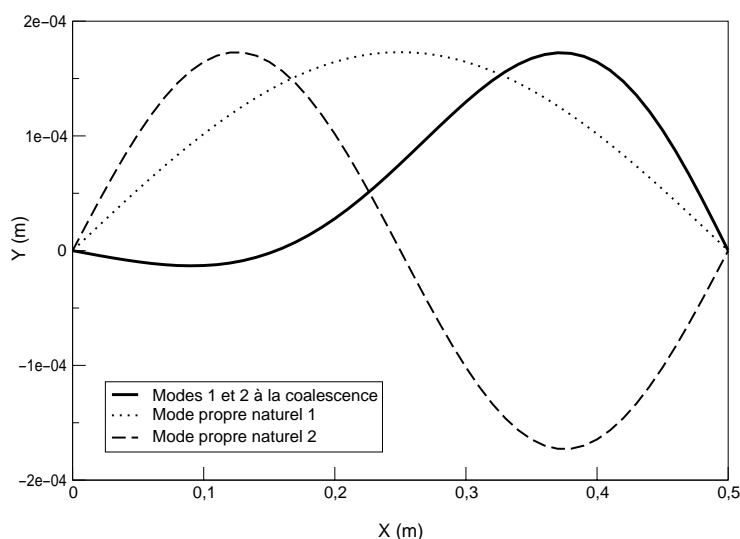


**Figure 17.** Champ de pression au cours de la simulation du flutter ( $M_\infty = 2.19$ )

Plusieurs calculs (différents codes fluide employés...) ont été effectués. Les résultats présentés ci-après ont été obtenus avec le code fluide WENO. Le maillage de la structure, l'élément de poutre et le schéma temporel utilisés par REFLEX ainsi que les conditions limites sont inchangés.

La figure 17 illustre le champ de pression obtenu à un instant quelconque de la simulation pour  $M_\infty = 2.19$ . Les variations de pression (compression suivie d'une

détente et d'une seconde compression) induites par le mouvement de la structure, *i.e.* par les changements de pente successifs de la paroi sont clairement visibles. Pour ce nombre de Mach très proche du nombre de Mach critique, la structure répond sur le "mode flutter" (figure 18), résultat de la coalescence de ses deux premiers modes. On remarquera de plus que ce mode n'a plus de symétrie : il possède un extremum vers  $x = 0.35 \text{ m}$ .



**Figure 18.** Modes propres 1 et 2 à la coalescence. Les modes propres naturels 1 et 2 sont représentés pour comparaison

Par ailleurs, l'évolution temporelle des déplacements de la structure (figure 19) met en évidence un amortissement de ceux-ci pour  $M_\infty = 2.18$  et une amplification pour  $M_\infty = 2.19$ . On en conclut que le nombre de Mach critique  $M_{cr}^{num}$  est d'environ 2.19 ce qui est en bon accord avec la valeur théorique ( $M_{cr}^{th} = 2.11$  soit 3.79 % d'erreur). De plus, une transformée de Fourier du signal à  $M_\infty = 2.19$  indique que la fréquence flutter est de 43 Hz. L'écart entre les résultats théorique et numérique peut en partie être expliqué par le fait que la solution analytique résulte d'un modèle monodimensionnel simplifié (pas de prise en compte des effets de mémoire) alors que le code fluide prend en compte les effets bidimensionnels.

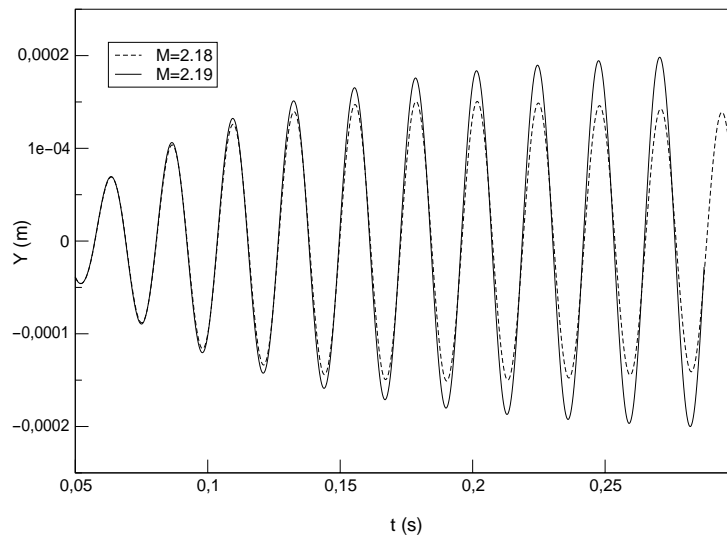
En dernier lieu, remarquons que des conclusions supplémentaires peuvent être tirées de ces calculs :

- les codes fluide précis au premier ordre ne sont pas adaptés pour prédire les conditions de flutter : ils sont trop diffusifs, ce qui retarde l'apparition du phénomène ( $M_{cr}^{num} = 2.26$  soit 7.11 % d'erreur) ;

- la suppression du limiteur effectuée par Lefrançois [LEF 98] afin de conserver la précision du schéma dans les zones de forts gradients, n'est pas applicable pour les

schémas TVD : les instabilités numériques générées ont conduit à une divergence des calculs.

NOTE. — Le schéma utilisé dans [LEF 98] est le schéma de Lax-Wendroff employant la correction de flux FCT, c'est cette correction qui est supprimée dans cette dernière étude ;



**Figure 19.** Evolution temporelle du déplacement vertical en  $x = 0.25 \text{ m}$

– l'utilisation d'un code TVD précis au second ordre en espace et en temps conduit à des résultats très proches de ceux obtenus avec un schéma WENO ( $M_{cr}^{num} = 2.20$  soit 4.26 % d'erreur) précis au cinquième ordre. Etant donné qu'un code fluide WENO du cinquième ordre en espace est beaucoup plus coûteux en temps de calcul (environ quatre fois plus cher) qu'un code TVD du second ordre et n'apporte pas de modification significative du nombre de Mach critique par rapport à ce dernier, nous estimons qu'un schéma au second ordre en espace et en temps est suffisant pour obtenir une bonne description des phénomènes aéroélastiques tels que le flutter. Ceci est en accord avec les résultats obtenus par différents auteurs [LEF 98, BLO 98a, PIP 95] avec des schémas précis au second ordre. Notons, toutefois, que l'utilisation d'un code WENO dans le cadre de cette étude se justifie par ses qualités dans des cas d'écoulements complexes (interaction d'ondes de choc, lignes de glissement, instabilités transitionnelles...) tels ceux présents dans les tuyères de moteur fusée [MOU 03]. Son utilisation n'est pas motivée par le couplage proprement dit. D'autre part, bien qu'un schéma de type WENO puisse être utilisé en accord avec une loi GCL adaptée à son schéma d'intégration, la précision du schéma couplé ne peut être au mieux qu'à l'ordre 2 [GUI 00]. De plus, il est très difficile de conserver la précision d'un schéma d'ordre élevé tel que le schéma WENO à proximité des frontières du domaine de calcul. Ceci explique les

faibles écarts entre les résultats des codes WENO et TVD pour ce type de problème et appuie notre précédente conclusion ;

– la prise en compte de la vitesse du maillage dans le code fluide dans ce cas d'étude du flutter n'est pas fondamentale (si celle-ci est annulée, le nombre de Mach critique reste pratiquement inchangé).

## 6. Conclusion

Le but de cet article, destiné aux aérodynamiciens désireux d'étudier ce type d'interactions, est principalement de fournir une méthodologie simple visant à faciliter la mise en œuvre du couplage dit "faible". Ce type de couplage repose sur un dialogue entre deux codes dont l'un est dédié à la structure et l'autre au fluide. Très souple, il préserve la modularité de chacun des codes de calcul et permet de bénéficier des méthodes les plus performantes dans chacune des disciplines.

Deux étapes importantes dans la mise en œuvre de ce couplage ont été distinguées. La première consiste à adapter le code fluide aux domaines évolutifs alors que la seconde a pour objectif d'introduire dans chaque code les instructions nécessaires à leur dialogue.

La première section de cette étude a donc été consacrée aux méthodes numériques employées pour la mécanique des fluides en milieux évolutifs (techniques de changement de repère, techniques ALE...). Un intérêt particulier a été porté à la technique dite de "maillage dynamique" et à la loi de conservation géométrique (GCL) que celle-ci doit respecter. Par la suite, différentes méthodes permettant de faire évoluer le maillage en fonction de la position de l'interface (formulation à trois champs de Farhat, analogie des ressorts...) ont été évoquées. Plusieurs exemples de validation (compression dans un piston, écoulement bidimensionnel autour d'un projectile mobile) ont été présentés. Des codes fluide reposant sur des schémas robustes et précis, ont été adaptés aux milieux évolutifs et utilisés dans ces exemples.

La mise en pratique des transferts d'information entre les deux codes (*i.e.* la seconde étape de cette méthodologie) a fait l'objet de la section 4. Les principaux algorithmes de couplage faible (algorithmes décalés de type CSS, avec ou sans sous-cyclage...) ont été rappelés et une technique informatique simple utilisant les bibliothèques parallèles exposée. Enfin, la dernière section a été consacrée à la validation de l'outil de calcul couplé obtenu. Un cas-test classique en aéroélasticité, le flutter, a été utilisé. Ce test simple à réaliser nous a permis non seulement de valider l'algorithme de couplage choisi mais aussi d'investir des phénomènes physiques spécifiques aux interactions fluide-structure (coalescence de mode...). Comme nous l'avons vu, ce cas-test permet de plus d'étudier l'influence de plusieurs paramètres numériques sur l'apparition des conditions critiques de flutter. Ainsi, il est ressorti de nos calculs qu'un couplage utilisant un code TVD précis au second ordre en espace conduisait à une estimation des conditions de flutter proche de celle d'un schéma WENO précis au cinquième ordre.



La méthodologie précédente est à l'origine de nos codes de calcul couplé. Nos travaux futurs consisteront à appliquer ces outils à l'étude des charges latérales dans une tuyère souple. La validité de modèles de prédiction existants [PEK 93] [LEF 00] sera investie. Ces travaux feront l'objet d'une collaboration entre chercheurs de l'UTC (Compiègne) et du LMFN-CORIA (Rouen).

### Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre du programme ATAC (Aérodynamique des Tuyères et Arrière-Corps). Le premier auteur tient à remercier Dr. Alexei Kudryavtsev (ITAM, Russie) et Pr. Milovan Peric (CD adapco Group, Allemagne) pour leurs conseils. Les auteurs remercient le Centre de Ressources Informatiques de Haute-Normandie (CRIHAN) et l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) pour les moyens de calcul.

### 7. Bibliographie

- [ASH 56] ASHLEY H., ZARTARIAN G., « Piston Theory - A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician », *Journal of Aeronautical Sciences*, vol. 23, n° 12, 1956, p. 1109-1118.
- [BAT 90a] BATINA J. T., « Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes », *AIAA Journal*, vol. 28, 1990, p. 1381-1388.
- [BAT 90b] BATOZ J. L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis. Vol. 1 : solides élastiques*, Ed. Hermes, 1990.
- [BAT 90c] BATOZ J. L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis. Vol. 2 : poutres et plaques*, Ed. Hermes, 1990.
- [BLO 97] BLOM F. J., LEYLAND P., « Analysis of fluid-structure interaction on moving airfoils by means of an improved ALE method », *Proc. of the 4th Int. Symp. on Fluid-Structure Interaction, Aeroelasticity, Flow-Induced Vibrations and Noise, AIAA 97-1770*, 1997.
- [BLO 98a] BLOM F. J., « Investigation on computational fluide-structure interaction », Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique de Lausanne, 1998.
- [BLO 98b] BLOM F. J., LEYLAND P., « Consistency of Fluid-Structure Interaction Algorithms », *Proc. of ECCOMAS 98*, 1998.
- [BLO 00] BLOM F. J., « Considerations on the spring analogy », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 32, 2000, p. 647-668.
- [CEB 97] CEBRAL J. R., LOHNER R., « Conservative Load Projection and Tracking for Fluid-Structure Problems », *AIAA Journal*, vol. 35, n° 4, 1997, p. 687-692.
- [DEL 00] DE LANGRE E., HEMON P., PESEUX B., « Introduction aux Interactions Fluide-Structure », rapport, 2000, Cours IPSI, Paris -23-24 mai.
- [DEM 88] DEMIRDZIC I., PERIC M., « Space Conservation Law in finite volume calculations of fluid flow », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 8, 1988, p. 1037-1050.
- [DEM 90] DEMIRDZIC I., PERIC M., « Finite Volume Method for Prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 10, 1990, p. 771-790.

- [DON 82] DONEA J., GUILIANI S., HALLEUX J. P., « An Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element method for transient fluid-structure interactions », *Comput. Meths Appl. Mech. Engrg.*, vol. 33, 1982, p. 689-723.
- [EMA 86] EMANUEL G., *Gasdynamics : Theory and Applications*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1986.
- [FAR 90] FARHAT C., LIN T. Y., « Transient Aeroelastic Computations Using Multiple Moving Frames of References », *AIAA Paper No. 90-3053, AIAA 8th Applied Aerodynamics Conference*, 1990.
- [FAR 95] FARHAT C., LESOINNE M., MAMAN N., « Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems : Three fields formulation, geometric conservation and distributed solution », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 21, 1995, p. 807-835.
- [FAR 96] FARHAT C., « High Performance Simulation of Coupled Nonlinear Transient Aeroelastic Problems », *Ecole d'été*, 1996.
- [FEL 93] FELKER F. F., « Direct solution of two dimensional Navier-Stokes equations for static aeroelasticity problems », *AIAA Journal*, vol. 31, n° 1, 1993, p. 148-153.
- [FUN 58] FUNG Y. C., *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, Wiley and Son, New York, 1958.
- [GRE 01] GREFFET N., « Simulation Fluide-Structure couplée appliquée aux problèmes de stabilité non-linéaire sous écoulement », Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2001.
- [GUI 00] GUILLARD H., FARHAT C., « On the Significance of the Geometric Conservation Law for Flow Computations on Moving Meshes », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, 2000, p. 1467-1482.
- [GUR 90] GURUSWAMY G. P., « Unsteady Aerodynamic and Aeroelastic Calculations for Wings Using Euler Equations », *AIAA Journal*, vol. 28, 1990, p. 461-469.
- [HAG 00] HAGEMANN G., TERHARDT M., FREY M., REIJASSE P., ONOFRI M., NASUTI F., OSTLUND J., « Flow separation and side-loads in rocket nozzles », *Proc of the 4th International Symposium on Liquid Space Propulsion*, 2000.
- [IDR 02a] IDRIS, « La Lettre de l'IDRIS », septembre 2002, disponible sur le site web <http://www.idris.fr/>.
- [IDR 02b] IDRIS, « Supports de cours », 2002, disponible sur le site web <http://www.idris.fr/>.
- [JIA 96] JIANG G., SHU C.-W., « Efficient implementation of weighted essentially non-oscillatory schemes », *J. Comput. Phys*, vol. 126, 1996, p. 202-228.
- [KUD 98] KUDRYAVTSEV A. N., KHOTYANOVSKY D. V., « A numerical method for simulation of unsteady phenomena in high speed shear flows », *Proc. of ICMAR'98, Int. Conf. on Methods of Aerophysical Research*, 1998.
- [LAN 91] LANTÉRI S., « Simulation d'écoulements aérodynamiques instationnaires sur une architecture S.I.M.D massivement parallèle », Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1991.
- [LEF 98] LEFRANÇOIS E., « Modèle numérique de couplage fluide-structure pour l'étude des phénomènes aéroélastiques avec applications aux moteurs fusée », Thèse de doctorat, Université de Rouen, 1998.

- [LEF 00] LEFRANÇOIS E., DHATT G., VANDROMME D., « Numerical Study of Aeroelastic Stability of an Overexpanded Rocket Nozzle », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 9, n° 6-7, 2000.
- [LES 98] LESOINNE M., FARHAT C., « Higher-Order Subiteration-Free Staggered Algorithms for Nonlinear Transient Aeroelastic Problems », *AIAA Journal*, vol. 36, n° 9, 1998, p. 1754-1757.
- [MOU 03] MOURONVAL A.-S., HADJADJ A., KUDRYAVTSEV A. N., VANDROMME D., « Numerical investigation of transient nozzle flow », *Int. Journal of Shock Waves*, vol. 12, n° 5, 2003, p. 403-411.
- [NAV 73] NAVE L. H., COFFEY G. A., « Sea-Level Side-Loads in High Area Ratio Rocket Engine », *AIAA Paper 73-1284*, , 1973.
- [PEK 93] PEKKARI L. O., « Aeroelastic Stability of Supersonic Nozzles with Separated Flow », *AIAA Paper 93-2588*, , 1993.
- [PIP 92] PIPERNO S., « Numerical Methods Used in Aeroelasticity Simulations », Rapport de recherche n° CERMICS-92-5, 1992, INRIA.
- [PIP 95] PIPERNO S., « Simulation Numérique des Phénomènes d'Interaction Fluide-Structure », Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 1995.
- [PIP 00] PIPERNO S., FARHAT C., « Energy Based Design and Analysis of Staggered Solvers for Nonlinear Transient Aeroelastic Problems », *AIAA Paper 2000-1447*, 2000.
- [ROE 81] ROE P. L., « Approximate Riemann solvers, parameters vectors and difference schemes », *J. Comp. Phys.*, vol. 43, 1981, p. 357-372.
- [SCH 73] SCHMUCKER R. H., « Side Loads and their Reduction in Liquid Rocket Engines », *Proc. of the 24th Int. Astron. Congress*, 1973.
- [SHU 88] SHU C.-W., OSHER S., « Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes », *J. Comput. Phys.*, vol. 77, 1988, p. 439-471.
- [spaa] « Arianespace Flight 157 : The Inquiry Board Submits its Findings », PRESS RELEASE, Tuesday, January 07, 2003, disponible sur le site <http://www.spaceref.com/>.
- [spab] « Arianespace to Continue with Launches of the Baseline Ariane 5 », PRESS RELEASE, Tuesday, January 07, 2003, disponible sur le site <http://www.spaceref.com/>.
- [THO 79] THOMAS P. D., LOMBARD C. K., « Geometric Conservation Law and its Application to Flow Computations on Moving Grids », *AIAA Journal*, vol. 17, 1979, p. 1030-1037.
- [TRU 61] TRULIO J. G., TRIGGER K. R., « Numerical solution of the one-dimensional hydrodynamic equations in an arbitrary time-dependent coordinate system », Rapport de recherche n° UCLR-6522, 1961, University of California, Lawrence Radiation Laboratory.
- [ZHA 93] ZHANG H., REGGIO M., TRÉPANIER J. Y., CAMARERO R., « Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in cfd schemes », *Computers Fluids*, vol. 22, n° 1, 1993, p. 9-23.

## 8. Annexes

### NOMENCLATURE

$a$	: célérité du son
$E$	: module d'Young
$\mathbf{F}$	: vecteur des flux eulériens
$\{F\}$	: vecteur sollicitations
$f$	: fréquence
$h$	: épaisseur de la structure
$J$	: jacobien
$[K]$	: matrice de rigidité
$[K_s]$	: matrice de rigidité aérodynamique
$L$	: opérateur spatial ou longueur
$M$	: nombre de Mach
$[M]$	: matrice masse
$N_b$	: nombre de surface appartenant au volume $\mathcal{V}$
$N_{fs}$	: nombre de pas de temps fluide pour un pas de temps structure
$\mathbf{n}$	: normale sortante
$P_s$	: pression statique transmise à la structure
$p$	: pression statique du fluide
$\mathbf{Q}$	: vecteur des variables conservatives
$\mathcal{S}$	: surface
$T$	: température
$u$	: vitesse du fluide suivant x ou déplacement de la structure
$\mathbf{u}_b$	: vitesse du maillage
$\mathcal{V}$	: volume d'une cellule de contrôle
$v$	: vitesse du fluide suivant y
$\{W\}$	: vecteur de variables nodales de la structure
$w$	: composante normale du déplacement de la structure
$\mathbf{x} = (x, y)$	: vecteur position
$\Delta t$	: pas de temps
$\Delta t_f$	: pas de temps fluide
$\Delta t_s$	: pas de temps structure
$\rho$	: masse volumique du fluide
$\rho_s$	: masse volumique de la structure
$\nu$	: coefficient de Poisson de la structure
$\xi$	: variables mixtes
$\omega$	: pulsation

### Abréviations

CSS	: Conventional Serial Staggered
GCL	: Geometric Conservation Law
GCSS	: Generalized Conventional Serial Staggered
ISS	: Improved Serial Staggered
SCL	: Surface Conservation Law
TVD	: Total Variation Diminishing
VCL	: Volume Conservation Law
WENO	: Weighted Essentially Non-Oscillatory