

---

# Analyse du problème d'évolution élastoplastique en présence d'une loi non associée de contact avec frottement

Hichame Fihri Fassi\* — Lahbibe Bousshine\*\* — Gery de Saxcé\*\*\*  
Abderrahmane El Harif\*\*\*\* — Mohammed Kouam\*\*\*\*\*

\* CPRT, Département de mécanique, Farah2, Settat, Maroc  
h\_fihri@hotmail.com

\*\* Lab. LMSM, ENSEM, Casablanca, B.P. 8118, Maroc,  
lmsm@ensem-h2c.ac.ma

\*\*\* Faculté des Sciences de Lille I, Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq cedex  
Gery.desaxce@univ-lille1.fr

\*\*\*\* Laboratoire de mécanique, Faculté des sciences, Agdal Rabat, Maroc  
\*\*\*\*\* Rectorat de l'université Chouaib Eddokali, Eljadida, Maroc

---

*RÉSUMÉ.* Ce travail est consacré à l'analyse, par la simulation numérique, du comportement élastoplastique des métaux et du contact unilatéral avec frottement sec de Coulomb. Dans cet objectif nous présentons un algorithme de résolution du problème d'évolution élastoplastique en présence du contact unilatéral avec frottement sec de Coulomb. Cet algorithme consiste à déterminer une formulation incrémentale à partir des équations de comportement temporelles de l'élastoplasticité et celle du contact unilatéral avec frottement sec de Coulomb. Cette dernière est modélisée au moyen de la théorie du bipotentiel permettant d'établir une formulation variationnelle basée sur un seul principe de minimum. Pour pallier les difficultés mathématiques dues à la non-différentiabilité des lois de contact et de frottement, deux algorithmes sont utilisés : la pénalisation et le Lagrangien augmenté avec l'algorithme de projection d'Uzawa.

*ABSTRACT.* This work is devoted to the analysis, by numerical simulation, of the elastoplastic behaviour of metals and the unilateral contact with Coulomb's dry friction. With this objective, we present a solution algorithm for elastoplastic evolution, taking into account the unilateral contact with Coulomb's dry friction. This algorithm consists in an incremental formulation from temporal elastoplastic and unilateral contact laws. The latter is described by means of the bipotential theory. This allows us to use a variational formulation based on a minimum principle. To avoid the non-differentiability of the bipotential, two procedures are presented: the penalisation and the augmented Lagrangien method with the Uzawa's algorithm.

*MOTS-CLÉS :* méthode des éléments finis, bipotentiel, frottement, régularisation, Lagrangien augmenté.

*KEYWORDS:* finite element method, bipotential, friction, regularisation, augmented Lagrangien.

## 1. Introduction

L'un des grands problèmes rencontrés dans l'analyse des procédés de mise en forme des métaux par déformation plastique est la modélisation du phénomène de frottement à l'interface outil-pièce. L'approche classique est basée sur deux principes de minimum et sur deux inégalités variationnelles (Jean *et al.*, 1988). En pratique, cette méthode conduit à un algorithme de résolution alternatif de deux problèmes de minimisation avec contraintes. En utilisant le modèle des matériaux standards implicites (MSI) proposé par de Saxcé (de Saxcé *et al.*, 1991), le problème de contact avec frottement sera réduit à la résolution d'un seul principe de minimum. Le contact et le frottement sont couplés dans une seule fonction, appelée bipotentiel, déterminée à partir de la loi de contact avec frottement.

Le modèle des MSI est une classe de matériaux généralisant de manière simple les matériaux standards et inclut une large partie de comportements non standards (cas de la loi de frottement sec de Coulomb et des sols).

Autrement dit, l'approche des MSI permet l'extension de la notion de la loi de normalité aux comportements dissipatifs non associés, comme pour le cas du phénomène de frottement dans les interfaces.

Le comportement plastique et celui du contact avec frottement sont des phénomènes dissipatifs régis par des lois constitutives multivoques dont la résolution nécessite l'utilisation d'un schéma d'intégration adapté. Le schéma implicite introduit par Moreau (Moreau, 1965) et connu sous le nom de l'algorithme de rattrapage a montré sa bonne adaptation à ce type de problème. Les lois temporelles sont remplacées par des lois incrémentales où la variable temps a disparu.

La loi de frottement de Coulomb est similaire à la loi du matériau rigide plastique et présente des difficultés numériques causées par la non-différentiabilité du bipotentiel de contact en certains points. Pour remédier à ce problème nous présentons deux méthodes : une régularisation du bipotentiel de contact par une procédure de pénalisation classique et la méthode du Lagrangien augmenté avec l'algorithme de projection d'Uzawa. Dans la suite, nous considérons que le comportement du matériau est élastique parfaitement plastique obéissant au critère de Von Mises. L'hypothèse des petites déformations est prise en compte.

## 2. Approche classique

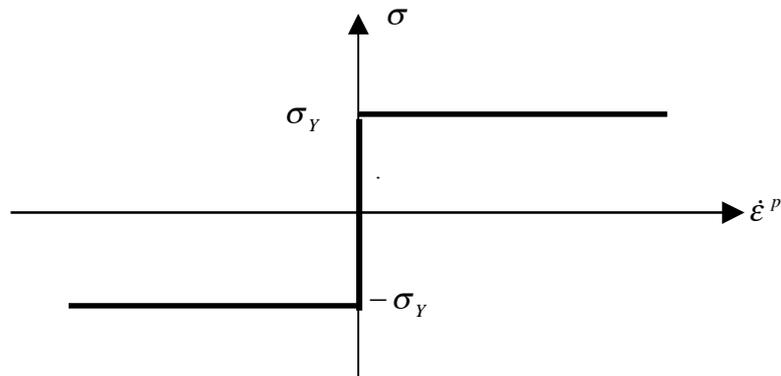
L'approche classique est basée sur des relations explicites ayant pour origine la loi de normalité décrivant le comportement des matériaux standards généralisés comme les métaux (Halphen, *et al.*, 1975). Dans le cas du contact avec frottement, cette approche consiste à étudier le contact sans frottement seul puis le frottement seul. Dans ce travail le matériau est supposé standard. Concernant le comportement

de l'interface, on présente dans cette section les éléments de base de l'approche implicite qui sera explicitée ultérieurement.

### 2.1. Plasticité parfaite des métaux

Considérons le comportement parfaitement plastique en chargement uniaxial. La loi d'écoulement plastique s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{si } |\sigma| < \sigma_y & \text{ alors } \dot{\epsilon}^p = 0 \\
 \text{si } \sigma = \sigma_y & \text{ alors } \dot{\epsilon}^p > 0 \\
 \text{si } \sigma = -\sigma_y & \text{ alors } \dot{\epsilon}^p < 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



**Figure 1.** Modèle parfaitement plastique

où  $\sigma_y$  désigne la limite élastique du matériau, et  $\dot{\epsilon}^p$  la vitesse de déformation plastique du matériau. La loi [1] peut s'écrire encore sous la forme de l'inclusion différentielle suivante :

$$\dot{\epsilon}^p \in \partial \psi_{I_y}(\sigma)
 \tag{2}$$

où  $I_y$  est l'intervalle des contraintes plastiquement admissibles défini par :

$$I_y = [-\sigma_y, \sigma_y],
 \tag{3}$$

et  $\psi_{I_y}$  est la fonction indicatrice définie par :

$$\psi_{I_y} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \in I_y \\ \infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le surpotentiel de dissipation plastique (Moreau, 1968) est calculé à partir de la puissance dissipée par :

$$V_p(\dot{\epsilon}^p) = \int_0^{\dot{\epsilon}^p} \sigma d\dot{\epsilon}^p = \sigma_y |\dot{\epsilon}^p| \quad [4]$$

Remarquons que la fonction  $V_p$  est convexe et homogène d'ordre 1. Ces deux propriétés seront utilisées ultérieurement. La loi multiaxiale peut être déduite de la loi uniaxiale en remplaçant la contrainte uniaxiale  $\sigma$  par la contrainte équivalente de Von Mises exprimée par :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s}, \quad [5]$$

où  $s$  est le tenseur déviateur des contraintes et  $s:s$  est le produit tensoriel contracté. La loi du matériau s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\dot{\epsilon}^p \in \partial \psi_I(\sigma_{eq}), \quad [6]$$

où  $\dot{\epsilon}^p$  est le déviateur de la vitesse de déformation plastique.

Le potentiel de dissipation plastique peut être calculé, en utilisant la transformée de Fenchel, par :

$$\begin{aligned} V_p(\dot{\epsilon}^p) &= \sup_s [s \cdot \dot{\epsilon}^p - \psi_I(\sigma_{eq}(s))] \\ &= \sup_{\sigma_{eq}(s) \leq \sigma_y} [s \cdot \dot{\epsilon}^p] \end{aligned} \quad [7]$$

Dans le cas du critère de Von Mises, la relation [7] conduit au résultat suivant :

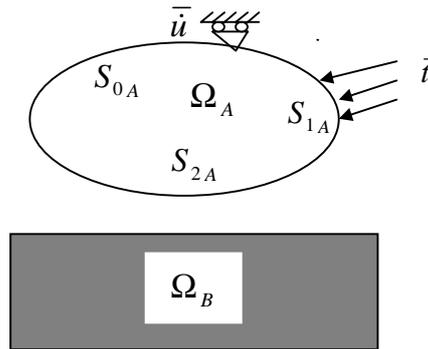
$$V_p(\dot{\epsilon}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \|\dot{\epsilon}^p\|, \quad [8]$$

et la loi complémentaire s'écrit comme suit :

$$\sigma \in \partial V_p(\dot{\epsilon}^p) \quad [9]$$

**2.2. Loi de contact unilatéral sans frottement**

Considérons une structure  $\Omega$  (figure 2) composée de deux solides disjoints  $\Omega_A$  et  $\Omega_B$  séparés par une interface  $S_2$ . Le système  $\Omega$  est supposé soumis à des forces de surface  $\bar{t}$  sur  $S_1$  et à des vitesses  $\bar{u}$  sur  $S_0$ .



**Figure 2.** Structure en contact

Soit  $n$  un vecteur unitaire normal, en un point  $M$  appartenant à  $S_2$ , dirigé de  $\Omega_A$  vers  $\Omega_B$ . Habituellement, on se sert de l'hypothèse considérant que la surface de contact  $S_2$  est approchée au point  $M$  par le plan tangent commun à  $\Omega_A$  et  $\Omega_B$ , noté  $\Gamma$ , orthogonal à  $n$ .

Les vecteurs vitesse relative  $\dot{u}$  et force de contact  $t$  peuvent être décomposés de manière unique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u}_t + \dot{u}_n n, \quad \dot{u}_t \in \Gamma \text{ et } \dot{u}_n \in \mathfrak{R} \\ t &= t_t + t_n n, \quad t_t \in \Gamma \text{ et } t_n \in \mathfrak{R} \end{aligned} \tag{10}$$

où  $\mathfrak{R}$  est l'ensemble des nombres réels. Les indices  $t$  et  $n$  désignent respectivement les composantes tangentielles et normales des vecteurs  $t$  et  $\dot{u}$ .

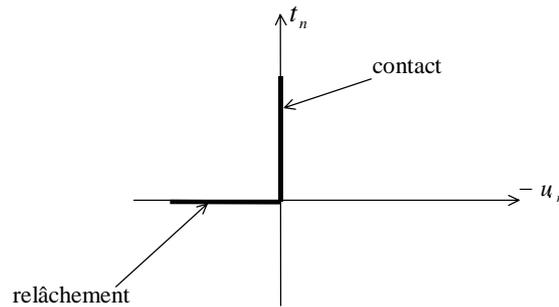
Les conditions de contact unilatéral, appelées aussi conditions de Signorini (Signorini, 1933), sont données par :

$$\dot{u}_n \geq 0, \quad t_n \geq 0 \text{ et } \dot{u}_n t_n = 0. \tag{11}$$

Sous forme conditionnelle, ces conditions sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} \text{si } \dot{u}_n > 0 \text{ alors } t_n = 0 \text{ relâchement,} \\ \text{si } \dot{u}_n = 0 \text{ alors } t_n \geq 0 \text{ compression.} \end{aligned} \quad [12]$$

Dans le plan  $(-\dot{u}_n, t_n)$ , cette loi est représentée graphiquement par la figure 3.



**Figure 3.** Représentation graphique de la loi de contact de Signorini

La loi de contact unilatéral est multivoque, on peut donc introduire comme potentiel, la fonction indicatrice de l'ensemble des nombres réels négatifs  $\mathfrak{R}_-$  :

$$\varphi_n(-\dot{u}_n) = \psi_{\mathfrak{R}_-}(-\dot{u}_n) \begin{cases} 0 & \text{si } -\dot{u}_n \in \mathfrak{R}_- \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases} \quad [13]$$

La loi de contact unilatéral et son inverse s'écrivent sous la forme sous-différentielle suivante :

$$t_n \in \partial_{-\dot{u}_n} \varphi_n(-\dot{u}_n) \quad [14]$$

$$-\dot{u}_n \in \partial_{t_n} \chi_n(t_n), \quad [15]$$

où  $\chi_n$  est le potentiel complémentaire de  $\varphi_n$ , défini comme étant la fonction indicatrice de l'ensemble des réels positifs  $\mathfrak{R}_+$  :

$$\chi_n(t_n) = \psi_{\mathfrak{R}_+}(t_n). \quad [16]$$

**2.3. Loi de frottement sec de Coulomb**

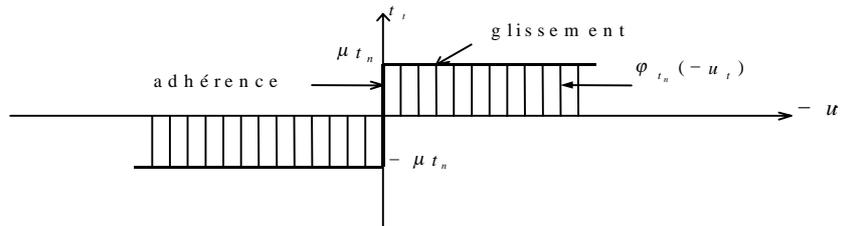
La loi de frottement de Coulomb est similaire à la loi de comportement rigide parfaitement plastique, dans ce sens que le critère de Coulomb pour le frottement est analogue à celui de plasticité et la loi de glissement à la règle d'écoulement plastique.

Rappelons que la loi de frottement sec de Coulomb s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \text{si } \|t_t\| < \mu t_n \text{ alors } \dot{u}_t = 0 \\
 (2) \quad & \text{si } \|t_t\| = \mu t_n \text{ alors } \dot{u}_t \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

(1) correspond à l'adhérence et (2) correspond au glissement

Dans le cas bidimensionnel, où le vecteur force tangentielle et celui de glissement sont définis, chacun, par une seule composante, cette loi peut être représentée graphiquement par la figure 4.



**Figure 4.** Les lois d'adhérence et de glissement

Le phénomène de frottement est un processus dissipatif. Pour cela, nous utilisons le concept du surpotentiel de dissipation introduit par J.-J. Moreau (Moreau, 1968).

Rappelons que le surpotentiel de dissipation est déterminé par la valeur de la puissance dissipée et s'exprime alors par :

$$\varphi_{t_n}(-\dot{u}_t) = \int_0^{-\dot{u}_t} t_t d\dot{u}_t = \mu t_n \|-\dot{u}_t\|
 \tag{18}$$

Introduisons la fonction suivante :

$$\chi_{t_n}(t_t) = \psi_{I_{t_n}}(t_t),
 \tag{19}$$

où  $I_{t_n}$  est l'intervalle des nombres réels défini par  $I_{t_n} = [-\mu t_n, \mu t_n]$ .

La loi de frottement et son inverse peuvent s'écrire sous la forme des inclusions différentielles suivantes :

$$t_t \in \partial_{-\dot{u}_t} \varphi_{t_n}(-\dot{u}_t). \quad [20]$$

$$-\dot{u}_t \in \partial_{t_n} \chi_{t_n}(t_t) \quad [21]$$

Nous remarquons que de point de vue énergétique, la loi de contact unilatéral avec frottement est décrite par deux surpotentiels duaux, l'un pour le contact et l'autre pour le frottement. Cette approche suppose que le frottement peut se produire sans contact. De ce fait, ce modèle peut conduire à des erreurs importantes. Le nouveau concept des matériaux standards implicites (MSI), introduit en premier par de Saxcé (de Saxcé et *al.*, 1991) permet, en partant des résultats précédents, de grouper le contact et le frottement dans une seule fonction appelée : bipotentiel.

### 3. Approche implicite de la loi de contact complète

#### 3.1. Théorie des matériaux standards implicites (MSI)

En mécanique des solides, une large classe de comportements de matériaux peut être représentée par une relation explicite :

$$x = f(y), \quad [22]$$

où  $x$  et  $y$  peuvent désigner respectivement les vecteurs de contraintes et de déformations généralisées. Si la relation [22] est inversible, on peut également écrire :

$$y = g(x). \quad [23]$$

Une classe plus restreinte de matériaux, dits standards, obéit à ce type de lois. On suppose l'existence de deux potentiels, duaux l'un par rapport à l'autre, au sens de Legendre. Autrement dit, il existe des couples  $(x, y)$  de déformation et de contrainte, tels que :

$$V(x) + W(y) = x.y. \quad [24]$$

$x$  et  $y$  sont alors liés par la loi du matériau et forment un couple dit *extrémal*. Cette relation scalaire définit donc la loi énergétique du matériau. Le potentiel  $V$

représente l'énergie de déformation et  $W$  l'énergie complémentaire. Si  $V$  et  $W$  sont différentiables, la loi du matériau s'écrit sous forme vectorielle :

$$y = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \quad , \quad x = \frac{\partial W(y)}{\partial y} . \quad [25]$$

Ces deux dernières équations sont des cas particuliers de [22] et [23]. Pour les comportements dissipatifs tels que plasticité, viscoplasticité, et contact, le concept de pseudo-potential ou surpotential au sens de Moreau peut être introduit.  $V(x)$  et  $W(y)$  sont supposés convexes. L'inégalité de Fenchel s'écrit :

$$\forall x', y' \quad V(x') + W(y') \geq x'.y' \quad [26]$$

L'égalité est vérifiée quand  $x'$  et  $y'$  sont liés par la loi du matériau. Tenant compte de [24] et [25], la propriété de convexité de  $V$  et  $W$  peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \forall x' \quad V(x') - V(x) &\geq y.(x'-x), \\ \forall y' \quad W(y') - W(y) &\geq x.(y'-y). \end{aligned} \quad [27]$$

Autrement dit,  $x$  et  $y$  sont reliés par une loi sous différentielle :

$$y \in \partial V(x) \quad , \quad x \in \partial W(y) \quad [28]$$

On rencontre néanmoins, en mécanique des solides, de nombreux comportements qui échappent à cette classe fort utile de matériaux standards comme le cas des sols et le contact avec frottement. Ces comportements sont dits « non standards ».

Pour cela, une nouvelle classe de matériaux, dits matériaux standards implicites (*MSI*) a été introduite par de Saxcé (de Saxcé et *al.*, 1991).

La classe des (*MSI*) inclut les matériaux standards et non standards, et suppose l'existence d'une fonction  $b(x, y)$ , dite bipotentiel, telle que la loi du matériau s'écrive :

$$b(x, y) = x.y . \quad [29]$$

Si la fonction  $b$  est différentiable, la forme vectorielle de la loi du matériau est donnée par dérivation de l'égalité précédente :

$$y = \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} \quad , \quad x = \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} . \quad [30]$$

La dépendance de  $y$  par rapport à  $x$  est à présent implicite. Le couple  $(x, y)$  vérifiant la relation [30] est appelé couple extrémal. On peut noter que les matériaux standards correspondent à un cas particulier de [29] pour lequel le bipotentiel est séparable :

$$b(x, y) = V(x) + W(y). \quad [31]$$

D'une manière générale, on suppose que le bipotentiel est convexe par rapport à  $x$ , quand  $y$  reste constant, et convexe par rapport à  $y$  quand  $x$  reste constant. La fonction  $b$  à deux variables est dite bipotentiel si elle satisfait l'inéquation fondamentale suivante :

$$\forall x', y' \quad b(x', y') \geq x'.y', \quad [32]$$

où l'égalité est vérifiée quand  $x'$  et  $y'$  sont liés par la loi du matériau. La condition [32] est une simple généralisation de l'inégalité de Fenchel [26]. En retranchant l'égalité [29] de l'inégalité [32] membre à membre, nous obtenons une généralisation de [27] en termes du bipotentiel :

$$\begin{aligned} \forall x' \quad & b(x', y) - b(x, y) \geq y.(x' - x) \\ \forall y' \quad & b(x, y') - b(x, y) \geq x.(y' - y) \end{aligned} \quad [33]$$

Donc,  $x$  et  $y$  sont reliés par une loi de la forme sous différentielle implicite :

$$y \in \partial_x b(x, y) \quad , \quad x \in \partial_y b(x, y). \quad [34]$$

### 3.2. Bipotentiel de contact avec frottement

En combinant la loi de contact unilatéral et de frottement sec de Coulomb, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{si } t_n = 0 \quad \text{alors } -\dot{u}_n \leq 0 \\ 2) \quad & \text{si } t_n > 0 \quad \text{et } \|t_t\| < \mu t_n \quad \text{alors } \dot{u}_n = 0, \dot{u}_t = 0 \\ 3) \quad & \text{si } t_n > 0 \quad \text{et } \|t_t\| = \mu t_n \quad \text{alors } \dot{u}_n = 0, \text{ et } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } -\dot{u}_t = \lambda \frac{t_t}{\|t_t\|} \end{aligned} \quad [35]$$

Nous venons de définir les trois statuts du contact unilatéral et de frottement de manière dépendante :

- 1) relâchement
- 2) adhérence
- 3) glissement

On peut définir le cône de frottement de Coulomb, dit encore critère de frottement de Coulomb, par l'ensemble suivant :

$$K_\mu = \{(t_n, t_t) \text{ tels que } f(t_n, t_t) = \|t_t\| - \mu t_n \leq 0\}, \quad [36]$$

et la surface de glissement  $\partial K_\mu$  dans l'espace des tractions  $(t_n, t_t)$  par la frontière de l'ensemble  $K_\mu$ .

Pour un point régulier sur la surface de glissement représentée par la surface latérale du cône de frottement de Coulomb, la vitesse normale  $\dot{u}_n$  est nulle. Autrement dit, la vitesse relative instantanée  $\dot{u}$  est identique à sa composante tangentielle. En outre, la loi de frottement de Coulomb nous a informé que la vitesse de glissement  $-\dot{u}_t$  est toujours dirigée par la force tangentielle  $t_t$ . Par conséquent, la vitesse de glissement totale  $-\dot{u}$  est dirigée par la composante  $t_t$ . Cette vitesse n'est pas normale à la surface de glissement  $\partial K_\mu$  et, par conséquent, la loi de normalité classique ne peut pas s'appliquer. Compte tenu de ce qui précède, la loi de contact unilatéral avec frottement sec de Coulomb appartient aux comportements qualifiés de non standards ou non associés. Pour cette raison nous faisons appel au modèle des (MSI) qui a permis d'obtenir de meilleurs résultats dans le cas du contact (de Saxcé *et al.*, 1991) et (Fihri, 2002). Dans cette section nous calculons la fonction dite bipotentiel de contact et nous établissons les lois de contact sous forme implicite.

Rappelons que la puissance dissipée dans le contact avec frottement est exprimée par :

$$D = t \cdot (-\dot{u}) = -(t_n \dot{u}_n + t_t \dot{u}_t) \geq 0 \quad [37]$$

Introduisons la fonction à deux variables suivante :

$$b_c(-\dot{u}, t) = \mu t_n \|-\dot{u}_t\|, \quad [38]$$

et montrons qu'elle représente un bipotentiel pour le contact et le frottement.

$b_c(-\dot{u}, t)$  est convexe car les fonctions qui la composent le sont. Il reste alors à prouver que :

$$\forall t \in K_\mu \text{ et } \forall \dot{u} \text{ tel que } -\dot{u}_n \leq 0 \text{ on a : } \mu t_n \|-\dot{u}_t\| \geq -(t_n \dot{u}_n + t_t \dot{u}_t) \geq 0. \quad [39]$$

En tenant compte de  $t \in K_\mu$  et de l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on a :

$$\mu t_n \|\dot{u}_t\| \geq \|t_t\| \|\dot{u}_t\| \geq -t_t \dot{u}_t. \quad [40]$$

D'autre part,  $- \dot{u}_n \leq 0$  et  $t_n \geq 0$  (toujours parce que  $t \in K_\mu$ ). D'où :  $-t_n \dot{u}_n \leq 0$  donc on peut écrire :

$$\mu t_n \|\dot{u}_t\| \geq \|t_t\| \|\dot{u}_t\| \geq -t_t \dot{u}_t \geq -(t_t \dot{u}_t + t_n \dot{u}_n), \quad [41]$$

ce qui achève la démonstration.

La loi de contact complète et sa loi inverse peuvent s'écrire respectivement sous forme de lois de sous normalité implicite :

$$-\dot{u} \in \partial_t b_c(-\dot{u}, t) \quad [42]$$

$$t \in \partial_{-\dot{u}} b_c(-\dot{u}, t) \quad [43]$$

De ce qui précède nous pouvons conclure que le concept du bipotentiel permet de décrire, de façon claire et sans découplage entre les paramètres de contact et de frottement, le comportement aux interfaces des solides en contact.

#### 4. Problèmes d'évolution

##### 4.1. Surpotentiel élastoplastique incrémental

Le comportement plastique des métaux est régi par des lois temporelles multivoques. La résolution des équations relatives à ces lois nécessite l'utilisation d'un schéma d'intégration adapté.

La loi d'écoulement plastique est un problème quasi statique. Le facteur temps y joue le rôle d'un simple paramètre d'évolution. La formulation incrémentale, basée sur la méthode des différences finies, permet l'élimination de la variable temps en étudiant le problème dans un pas de temps constant.

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon^p &= \varepsilon_1^p - \varepsilon_0^p, & \Delta \varepsilon^e &= \varepsilon_1^e - \varepsilon_0^e, \\ \Delta \sigma &= \sigma_1 - \sigma_0, & \Delta \varepsilon &= \varepsilon_1 - \varepsilon_0, \end{aligned} \quad [44]$$

où  $\Delta \varepsilon^p$  et  $\Delta \varepsilon^e$  désignent respectivement les incréments de déformation plastique et de déformation élastique.

L'indice 0 (resp. 1) est relatif au début (resp. la fin) du pas.

Les lois incrémentales peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon^p &= (\varepsilon_1^p - \varepsilon_0^p) \in \partial_{\sigma} W_p(\sigma_0 + \Delta\sigma) - \varepsilon_0^p \\ \Delta\sigma &= (\sigma_1 - \sigma_0) \in \partial_{\varepsilon^p} V_p(\varepsilon_0^p + \Delta\varepsilon^p) - \sigma_0\end{aligned}\quad [45]$$

Le potentiel incrémental  $\Delta V$  et son dual  $\Delta W$  se calculent, en utilisant les lois constitutives [46], par intégration des équations suivantes :

$$\partial_{\Delta\varepsilon} \Delta V = \partial_{\varepsilon} V(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) - \sigma_0, \quad [46]$$

$$\text{et } \partial_{\Delta\sigma} \Delta W = \partial_{\sigma} W(\sigma_0 + \Delta\sigma) - \varepsilon_0 \quad [47]$$

On peut écrire alors :

$$\Delta V(\Delta\varepsilon) = V(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) - \sigma_0 \Delta\varepsilon - V(\varepsilon_0), \quad [48]$$

$$\text{et } \Delta W(\Delta\sigma) = W(\sigma_0 + \Delta\sigma) - \varepsilon_0 \Delta\sigma - W(\sigma_0) \quad [49]$$

Le problème numérique sera résolu par la méthode des éléments finis en déplacement. De ce fait, nous nous intéressons dans la suite que de l'énergie de déformation élastoplastique incrémentale  $\Delta V(\Delta\varepsilon)$ .

Pour déterminer le surpotentiel  $\Delta V(\Delta\varepsilon)$ , l'analyse du cas simple de chargement uniaxial facilite le passage au cas multiaxial.

#### 4.1.1. *Elastoplasticité en chargement uniaxial*

La loi élastique parfaitement plastique suppose que le surpotentiel incrémental est composé de deux surpotentiels ; l'un élastique noté  $\Delta V_e$ , et l'autre plastique noté  $\Delta V_p$ .

Le surpotentiel élastique  $\Delta V_e$  est déterminé par la loi élastique comme étant l'énergie de déformation élémentaire élastique définie par :

$$\begin{aligned}\Delta V_e(\Delta\varepsilon^e) &= \frac{1}{2} E (\Delta\varepsilon^e)^2 \\ &= \frac{1}{2} E (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p)^2\end{aligned}\quad [50]$$

Le surpotentiel incrémental de dissipation plastique est donné par :

$$\Delta V_p(\Delta\varepsilon^p) = \sigma_y |\Delta\varepsilon^p| - \sigma_0 \Delta\varepsilon^p. \quad [51]$$

Le concept de l'inf-convolution (Auliac et *al.*, 2000) permet de calculer le surpotentiel élastoplastique incrémental par l'expression suivante :

$$\Delta V(\Delta \varepsilon) = \text{Inf}_{\Delta \varepsilon^p} \left[ \frac{1}{2} E (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^p)^2 + \sigma_y |\Delta \varepsilon^p| - \sigma_0 \Delta \varepsilon^p \right]. \quad [52]$$

Nous remarquons, dans l'expression de  $\Delta V$ , que la fonction à minimiser n'est pas différentiable et que la non-différentiabilité se réduit à la seule valeur nulle de l'incrément de déformation plastique. Dans ce cas on a :

$$\Delta \varepsilon^p = 0, \quad \Delta \sigma = E \Delta \varepsilon. \quad [53]$$

La non-différentiabilité du surpotentiel  $\Delta V_p$  n'a plus d'effet sur le calcul du surpotentiel  $\Delta V$  grâce à la présence du surpotentiel différentiable  $\Delta V_e$ . Il est à rappeler que nous avons utilisé la propriété de régularisation du concept de l'inf-convolution. Le surpotentiel plastique est régularisé par le surpotentiel élastique.

En appliquant la condition de stationnarité, le surpotentiel  $\Delta V$  aura l'expression suivante :

$$\Delta V(\Delta \varepsilon) = \frac{1}{2} E (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^p)^2 + \sigma_y |\Delta \varepsilon^p| - \sigma_0 \Delta \varepsilon^p \quad [54]$$

Soit en développant [55] :

$$\Delta V(\Delta \varepsilon) = \frac{E}{2} (\Delta \varepsilon)^2 - E \Delta \varepsilon \Delta \varepsilon^p + \frac{E}{2} |\Delta \varepsilon^p|^2 + E (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^p) |\Delta \varepsilon^p| - \sigma_0 \Delta \varepsilon^p \quad [55]$$

Après simplification, il vient :

$$\Delta V(\Delta \varepsilon) = \frac{E}{2} \left( (\Delta \varepsilon)^2 - |\Delta \varepsilon^p|^2 \right). \quad [56]$$

#### 4.1.2. Elastoplasticité en chargement multiaxial

Tenant compte de la décomposition des tenseurs de déformation et de contraintes en partie sphérique et déviatorique et une déformation plastique incompressible (pour les métaux), on adopte comme variables d'état, variables internes et variables associées :

$$\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} e_m \\ e \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^p \equiv \begin{pmatrix} e_m^p \\ e^p \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ e^e \end{pmatrix}, \quad \sigma \equiv (s_m, s). \quad [57]$$

Les éléments  $e$  et  $s$  sont les composantes respectives des déviateurs de déformation et de contrainte,  $e_m$  et  $s_m$  sont les traces des tenseurs de déformations et de contraintes.

Le surpotentiel élastique  $\Delta V_e$  est déterminé par la loi élastique comme étant l'énergie de déformation élémentaire incrémentale définie par :

$$\Delta V_e(\Delta \varepsilon^e) = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon^e \cdot \Delta \sigma = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon^e \cdot S \cdot \Delta \varepsilon^e. \quad [58]$$

En termes des composantes  $\Delta e_m^e$  et  $\Delta e^e$  du tenseur de déformation, cette énergie prend la forme suivante :

$$\Delta V_e(\Delta \varepsilon^e) = \frac{1}{2} K_c (\Delta e_m^e)^2 + G \|\Delta e^e\|^2, \quad [59]$$

où  $K_c$  est le facteur de compressibilité, et  $G$  le module de cisaillement de Coulomb. En fonction du module d'Young  $E$  et du facteur de poisson  $\nu$

$$K_c = \frac{E}{3(1-2\nu)} \text{ et } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Rappelons que le surpotentiel de dissipation du modèle de Von Mises, est de la forme :

$$V_p(\dot{e}^p) = \sigma_y \dot{p}(\dot{e}^p) \quad [60]$$

$$\text{où : } \dot{p}(\dot{e}^p) = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{e}^p : \dot{e}^p}$$

Le surpotentiel plastique  $\Delta V_p$  sera déterminé par la dissipation plastique élémentaire sous forme incrémentale comme suit :

$$\Delta V_p(\Delta \varepsilon^p) = \sigma_y p(\Delta \varepsilon^p) - s_0 \cdot \Delta \varepsilon^p \quad [61]$$

En utilisant le concept de l'inf-convolution, on construit le surpotentiel incrémental  $\Delta V(\Delta \varepsilon)$  comme suit :

$$\begin{aligned}\Delta V &= \inf_{\Delta \varepsilon^p} \left[ \Delta V_e(\Delta \varepsilon^e) + \Delta V_p(\Delta \varepsilon^p) \right] \\ &= \frac{1}{2} K_c (\Delta e_m)^2 + \inf_{\Delta e^p} \left[ G \cdot (\text{tr}(\Delta e - \Delta e^p))^2 + \sigma_{y,p}(\Delta e^p) - s_0 \cdot \Delta e^p \right],\end{aligned}\quad [62]$$

Hormis pour le cas purement élastique qui est trivial, la fonction à minimiser est différentiable.

Tenant compte des résultats précédents et par la même procédure suivie dans le cas uniaxial, on obtient finalement le surpotentiel élastoplastique en termes de déformations, pour un matériau obéissant au critère de Von Mises, par l'expression suivante :

$$\Delta V(\Delta \varepsilon) = \frac{1}{2} K_c (\Delta e_m)^2 + G \left\{ \|\Delta e\|^2 - \|\Delta e^p\|^2 \right\} \quad [63]$$

Enfin, les lois constitutives du comportement plastique s'écrivent :

$$\Delta \varepsilon = \frac{\partial \Delta W(\Delta \sigma)}{\partial \Delta \sigma}, \quad [64]$$

$$\Delta \sigma = \frac{\partial \Delta V(\Delta \varepsilon)}{\partial \Delta \varepsilon} \quad [65]$$

où  $\Delta W$  est le dual du surpotentiel  $\Delta V$ .

#### 4.2. Bipotentiel incrémental de contact

L'objectif de cette section est la formulation de la loi incrémentale du problème de contact unilatéral avec frottement sec de Coulomb. Pour cela, le schéma d'intégration implicite est utilisé (Moreau, 1965). Notons par 0 et 1 le début et la fin du pas, le schéma d'intégration consiste à évaluer l'incrément de déplacement à la fin du pas et conduit à :

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_1 - u_0 = \Delta \pi i_1, \\ \Delta t &= t_1 - t_0,\end{aligned}$$

où  $\Delta \tau$  est le pas de temps choisi toujours supérieur à zéro.

Les lois incrémentales s'écrivent :

$$-\Delta u \in \Delta \tau \partial_t b_c \left( -\frac{\Delta u}{\Delta \tau}, t_0 + \Delta t \right), \quad [66]$$

$$\Delta t \in \Delta \tau \partial_{-\Delta u} b_c \left( -\frac{\Delta u}{\Delta \tau}, t_0 + \Delta t \right) - t_0 \quad [67]$$

Rappelons que le bipotentiel  $b_c$  est convexe et homogène d'ordre 1. Cette dernière propriété permet l'élimination du pas de temps  $\Delta \tau$ .

Le bipotentiel incrémental se calcule par intégration de l'équation [68] et peut être exprimé par :

$$\begin{aligned} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t) &= b_c(-\Delta u, t_0 + \Delta t) - (-t_0 \Delta u) \\ &= + t_{n0} \Delta u_n + t_{t0} \Delta u_t + \mu(t_{n0} + \Delta t_n) \|\Delta u_t\| \end{aligned} \quad [68]$$

Pour montrer que  $\Delta b_c$  est un bipotentiel, il suffit de suivre la même démarche suivie pour  $b_c$ .

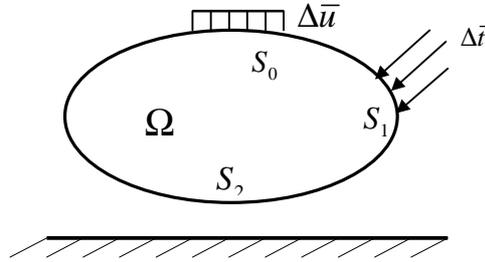
La loi de contact et son inverse deviennent :

$$\begin{aligned} -\Delta u &\in \partial_{\Delta t} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t) \\ \Delta t &\in \partial_{-\Delta u} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t) \end{aligned} \quad [69]$$

Comparé au schéma d'intégration explicite, évaluant les variables incrémentales au début du pas, le schéma implicite est caractérisé par une bonne stabilité de la convergence numérique. Le schéma explicite peut conduire à des erreurs graves. En effet, si le critère de frottement est vérifié au début du pas, rien ne le garantit à la fin du pas. Le même problème se pose pour le critère de plasticité.

## 5. Principes variationnels

On considère une structure  $\Omega$  (figure 5) de frontière  $S$ , soumise à des incréments de tractions  $\Delta \bar{t}$  sur  $S_1$ , et à des incréments de déplacement imposés  $\Delta \bar{u}$  sur  $S_0$ . La partie  $S_2 = S - S_0 \cup S_1$  est une zone candidate au contact.



**Figure 5.** Structure avec contact

Un champ des incréments de déplacement est cinématiquement admissible (C.A), si les équations de compatibilité suivantes sont satisfaites :

$$\Delta \varepsilon(\Delta u^c) = \nabla_s \Delta u^c \text{ dans } \Omega, \Delta u^c = \Delta \bar{u} \text{ sur } S_0 \quad [70]$$

Un champ des incréments de contrainte est dit statiquement admissible (S.A) si les équations d'équilibre suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Delta \sigma^s) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \Delta t(\Delta \sigma^s) &= \Delta \sigma^s \cdot n = \Delta \bar{t} \text{ sur } S_1 \end{aligned} \quad [71]$$

Introduisons la bifonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \beta(\Delta u, \Delta \sigma) &= \int_{\Omega} \Delta V(\Delta \varepsilon(u)) d\Omega - \int_{S_1} \Delta \bar{t} \cdot \Delta u dS + \int_{\Omega} [\Delta W(\Delta \sigma)] d\Omega - \\ &\int_{S_0} \Delta t(\Delta \sigma) \cdot \Delta \bar{u} dS + \int_{S_2} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t) dS \end{aligned} \quad [72]$$

On peut alors, prouver que le champ des couples  $(\Delta u, \Delta \sigma)$ , solution exacte du problème aux limites, est simultanément solution des principes variationnels suivants :

$$\begin{aligned} \operatorname{Inf}_{\Delta u^c \text{ C.A}} \Delta \beta(\Delta u^c, \Delta \sigma) \quad \text{et} \quad \operatorname{Inf}_{\Delta \sigma^s \text{ S.A}} \Delta \beta(\Delta u, \Delta \sigma^s) \end{aligned} \quad [73]$$

Nous avons choisi la formulation en déplacements, donc la fonction qui sera utilisée dans les calculs numériques se réduit à :

$$\Delta\Phi(\Delta u) = \int_{\Omega} \Delta V(\Delta \varepsilon(u)) d\Omega - \int_{S_1} \Delta \bar{t} \cdot \Delta u dS + \int_{S_2} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t) dS \quad [74]$$

Le problème à résoudre se réduit à :

$$\begin{aligned} & \text{Inf} \Delta\Phi(\Delta u^c) \\ & \Delta u^c \in C.A \end{aligned} \quad [75]$$

## 6. Discrétisation éléments finis

Pour les applications numériques, la méthode des éléments finis en déplacements est utilisée.

L'approximation du champ des incréments de déplacements est définie par la relation :

$$\Delta u(x) = N(x)\Delta U, \quad [76]$$

où  $\Delta U$  est le vecteur des incréments de déplacements nodaux inconnus et  $N(x)$  est la matrice des fonctions de forme polynomiales.

$$\Delta \varepsilon = B(x)\Delta U, \quad [77]$$

avec

$$B(x) = \text{grad}_s(N(x))$$

Introduisons le vecteur des incréments de forces généralisées :

$$\Delta F = \int_{S_1} N^T \Delta t dS \quad [78]$$

La fonction [75] prend la forme discrétisée suivante :

$$\Delta\Phi(\Delta U) = \int_{\Omega} V(B\Delta U) d\Omega - \Delta F^T \Delta U + \int_{S_2} \Delta b_c(-N\Delta U, \Delta t) dS \quad [79]$$

Dans ce cas, les incréments de contraintes sont non discrétisés, mais peuvent être déduits à partir de la valeur des incréments de déplacements par les équations :

$$\Delta\sigma = \frac{\partial V(B\Delta U)}{\partial \Delta\varepsilon} \quad [80a]$$

$$\Delta t \in \partial_{-\Delta u} \Delta b_c(-N\Delta U, \Delta t) \quad [80b]$$

Les intégrales sont calculées par la méthode de Gauss. Le problème de minimisation est résolu en utilisant le code d'optimisation MINOS (Murtagh, et *al.*, 1987) de Stanford University. Les difficultés dues à la non-différentiabilité du bipotentiel de contact sont surmontées par l'un ou l'autre des algorithmes numériques qui seront présentés dans les sections qui suivent.

## 7. Procédures numériques

### 7.1. Régularisation du bipotentiel de frottement

Le bipotentiel  $\Delta b_c$  calculé au paragraphe précédent est non différentiable et par suite posera des problèmes pour le calcul des réactions en certains points de l'interface. Pour remédier à ce problème, on procède à une régularisation de la loi de Coulomb. Le bipotentiel régularisé est différentiable, donc on peut déduire les réactions de contact par simple dérivation.

La loi de frottement de Coulomb est analogue à la loi rigide plastique. Le potentiel plastique est régularisé par nature par le potentiel élastique. Dans le cas du contact avec frottement nous introduisons la fonction différentiable suivante (Fihri, 2002) :

$$\Delta b' = \frac{k_t}{2} (-\Delta u_t + \Delta u_t^f)^2 + \frac{k_n}{2} (-\Delta u_n + \Delta u_n^f)^2 \quad [81]$$

où  $k_n$  et  $k_t$  sont des facteurs de pénalisation,  $\Delta u_t$  et  $\Delta u_n$  sont les composantes tangentielle et normale de l'incrément de déplacement total analogue au vecteur de déformation totale, et  $\Delta u_n^f$  et  $\Delta u_t^f$  les composantes normales et tangentielles de l'incrément de déplacement irréversible analogue à la partie plastique.

Il est facile de montrer que la convergence vers la solution exacte est atteinte quand les facteurs  $k_n$  et  $k_t$  prennent des valeurs très grandes.

En utilisant le concept de l'inf-convolution, le bipotentiel incrémental  $\Delta b_c(\Delta u, \Delta t)$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t) = \underset{-\Delta u^f}{\text{Inf}} [ & +t_{n0}\Delta u_n + t_{t0}\Delta u_t + \mu(t_{n0} + \Delta t_n) \|\Delta u_t\| \\ & + \frac{k_t}{2}(-\Delta u_t + \Delta u_t^f)^2 + \frac{k_n}{2}(-\Delta u_n + \Delta u_n^f)^2 ] \end{aligned} \quad [82]$$

## 7.2. Méthode du Lagrangien augmenté avec l'algorithme d'Uzawa

A fin d'éviter les potentiels non différentiables que l'on rencontre en mécanique non linéaire, comme dans le cas des problèmes de contact, on peut utiliser la méthode du Lagrangien augmenté (Minoux, 1983). Dans ce qui suit nous utiliserons cette méthode en adoptant l'algorithme de projection d'Uzawa (de Saxcé *et al.*, 1991).

Supposons  $\alpha$  un coefficient positif dont la valeur est choisie dans un certain intervalle pour assurer la convergence numérique.

Dans le cas d'un comportement standard, l'inégalité de convexité [27b] peut être facilement réécrite sous la forme suivante.

$$\forall y' \quad \alpha W(y') - \alpha W(y) + [y - (y + \alpha x)](y' - y) \geq 0 \quad [83]$$

On appelle  $y$  le proximal des contraintes augmentées  $(y + \alpha x)$  par rapport à la fonction  $\alpha W$  et on le note par :

$$y = \text{prox}(y + \alpha x, \alpha W) \quad [84]$$

L'algorithme d'Uzawa permet la résolution de cette équation par une procédure de prédiction correction. Supposons  $(x_i, y_i)$  une approximation à l'itération  $i$ , le calcul de  $y_{i+1}$  se compose de deux étapes :

$$\textbf{prédiction} \quad \hat{y}_{i+1} = y_i + \alpha x_i \quad [85]$$

$$\textbf{correction} \quad y_{i+1} = \text{prox}(\hat{y}_{i+1} + \alpha W) \quad [86]$$

Pour appliquer cet algorithme aux MSI, il faut étendre la méthode du Lagrangien augmenté au bipotentiel. L'inégalité de convexité [33] est réécrite comme suit :

$$\forall y' \quad \alpha b(x, y') - \alpha b(x, y) + [y - (y + \alpha x)](y' - y) \geq 0 \quad [87]$$

Donc,  $y$  est le proximal des contraintes augmentées par rapport à la fonction  $\alpha b(x, \cdot)$  où le point désigne l'argument variable,  $x$  est considérée constante :

$$y_{i+1} = \text{prox}(\widehat{y}_{i+1} + \alpha b(x, \cdot)) \quad [88]$$

L'algorithme d'Uzawa conduit à un processus itératif :

$$\text{prédiction} \quad \widehat{y}_{i+1} = y_i + \alpha x_i \quad [89]$$

$$\text{correction} \quad y_{i+1} = \text{prox}(\widehat{y}_{i+1} + \alpha b(x, \cdot)) \quad [90]$$

Dans le cas du contact, l'application de proximité s'identifie à la projection orthogonale sur le cône de Coulomb et conduit à la prédiction-correction suivante :

**prédiction**

$$\begin{aligned} \Delta \widehat{t}_n^{i+1} &= \Delta t_n^i - \alpha (\Delta u_n(\Delta t_n^i, \Delta t_t^i) + u_{n0} + \mu \|\Delta u_t(\Delta t_n^i, \Delta t_t^i)\|) \\ \Delta \widehat{t}_t^{i+1} &= \Delta t_t^i - \alpha \Delta u_t(\Delta t_n^i, \Delta t_t^i) \end{aligned}$$

**correction**

$$\Delta t^{i+1} = \text{proj}(\Delta \widehat{t}^{i+1}, \Delta K_\mu)$$

où  $\Delta \widehat{t}^{i+1}$  désigne la prédiction de la réaction de contact à l'itération  $i+1$ .

En résumé, nous avons développé jusqu'à présent tous les éléments nécessaires au traitement numérique du problème de l'évolution élastoplastique en présence du contact avec frottement sec de Coulomb. La résolution se réduit à la minimisation de la bifonctionnelle discrétisée [80]. Les difficultés mathématiques dues à la non-différentiabilité du bipotentiel de contact ont été surmontées par l'utilisation de l'un ou l'autre des deux algorithmes présentés : la procédure de régularisation et la méthode de prédiction-correction d'Uzawa.

## 8. Applications

### 8.1. Indentation d'un milieu semi-infini

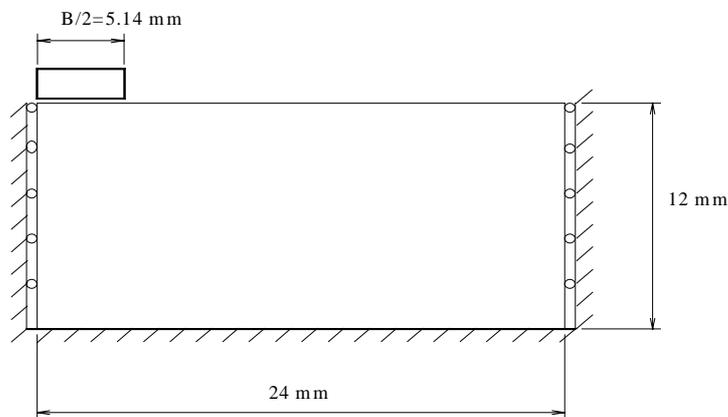
On considère l'exemple d'indentation d'un milieu semi-infini, en état plan de déformation, envisagé pour la première fois par Prandtl (Prandtl, 1921) et repris par la suite par plusieurs auteurs, on cite Hill (Hill, 1950) par la méthode des lignes de glissement et Chaaba (Chaaba, 2001) par la théorie de l'analyse limite. L'expression de la charge limite par unité de longueur, associé au mécanisme de ruine imaginé par Prandtl est donnée par :

$$P = B \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} (2 + \pi),$$

où,  $B$  est la largeur du poinçon et  $\sigma_y$  est la contrainte limite de traction.

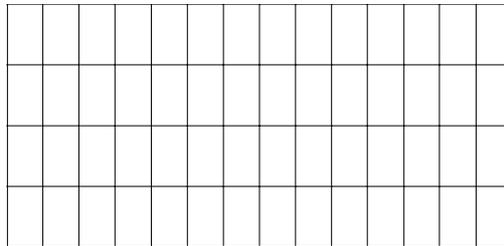
Le matériau est supposé élastique parfaitement plastique obéissant au critère de plasticité de Von Mises. Le contact est considéré sans frottement. Les propriétés mécaniques du matériau sont :

- Module d'Young :  $E = 210000$  MPa
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$
- Contrainte limite de traction :  $\sigma_y = 300$  MPa

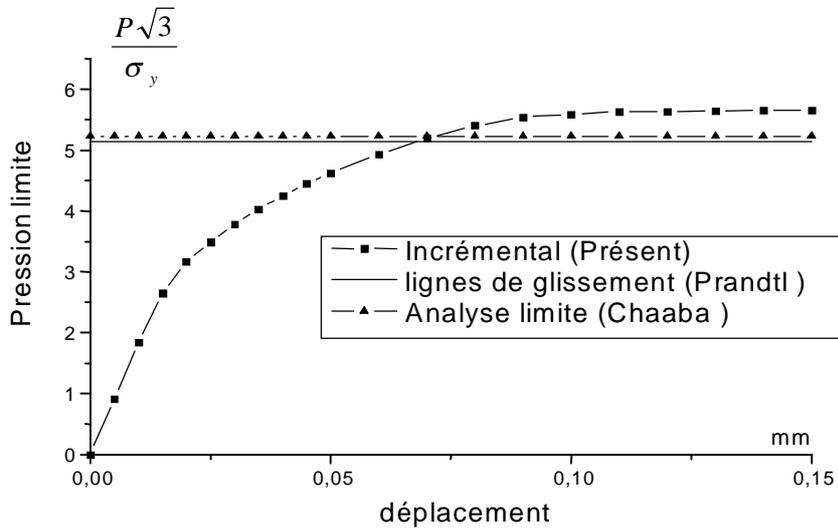


**Figure 6.** Géométrie et conditions aux limites

Le maillage utilisé pour cette application est constitué par 56 éléments rectangulaires isoparamétriques à huit nœuds.



**Figure 7.** Maillage



**Figure 8.** Comparaison avec différentes approches

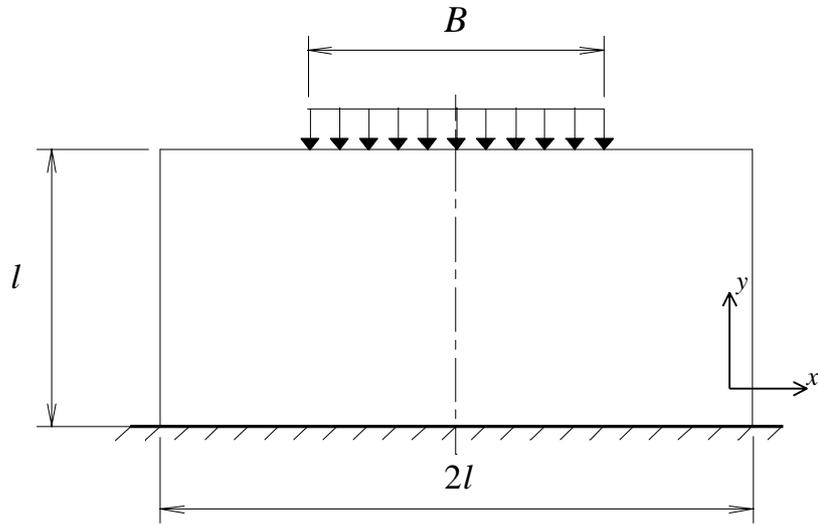
Les courbes de la figure 8 montrent une bonne cohérence entre les résultats du présent travail et ceux obtenus par d'autres auteurs. Un raffinement de maillage est souhaitable pour améliorer la précision des résultats.

### 8.2. Poinçonnement en état plan de déformation

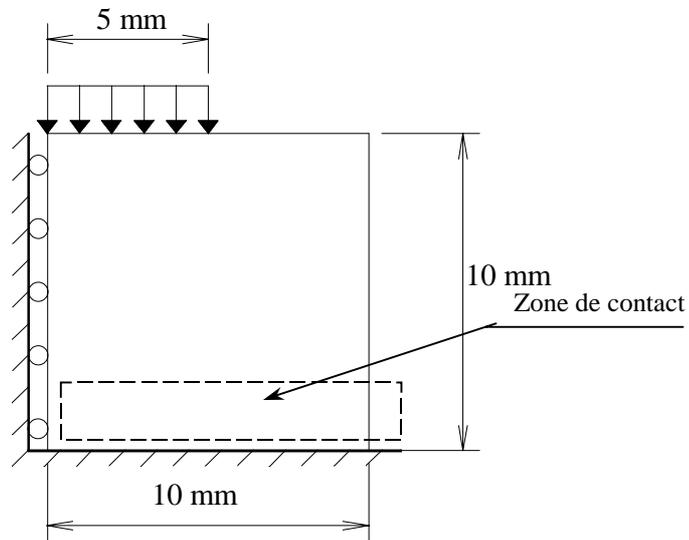
Dans cette section, on analyse un exemple de poinçonnement de matériau métallique élastique parfaitement plastique obéissant au critère de Von Mises. Le contact avec frottement sec de Coulomb est pris en compte.

Les caractéristiques mécaniques du matériau sont :

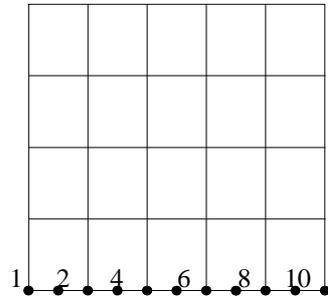
- module d'Young  $E = 210000$  MPa
- limite élastique  $\sigma_y = 300$  MPa
- coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$



**Figure 9.** Géométrie et conditions aux limites



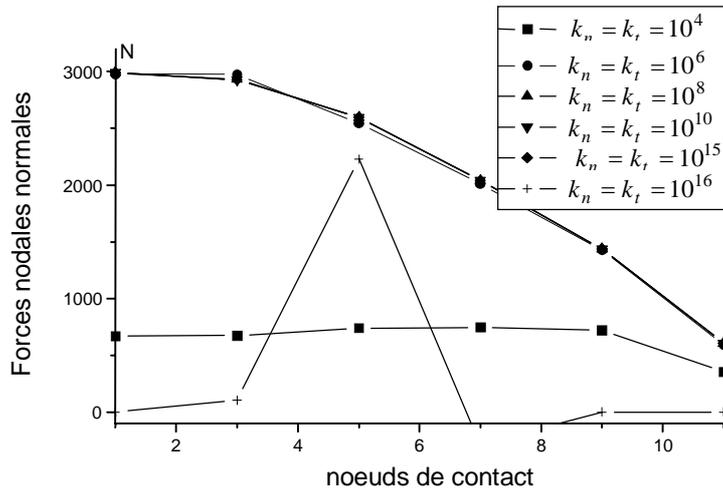
**Figure 10.** Moitié de la structure et conditions aux limites



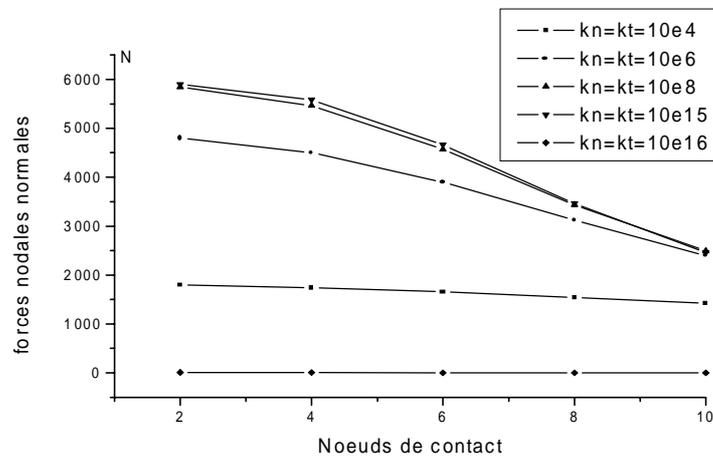
**Figure 11.** Maillage de 20 éléments

8.2.1. Etude de la convergence de la méthode de pénalisation

Dans cette section, on illustre l'effet de la valeur des facteurs de pénalisation sur la convergence numérique. Pour cela nous représentons les courbes de variation des forces nodales normales de contact (figures 12 et 13) pour un maillage de 20 éléments et nous donnons un tableau des valeurs concernant des maillages de 40 et 60 éléments. Pour des raisons de clarté, nous avons choisi de tracer les courbes pour les valeurs des forces aux nœuds sommet puis aux nœuds du milieu de chaque élément. Le coefficient de frottement est pris égal à 0.05.



**Figure 12.** Courbes des forces normales nodales sur les nœuds de sommets



**Figure 13.** Courbes des forces normales nodales sur les nœuds du milieu ( $\mu=0.05$ )

Pour un maillage de 20 éléments rectangulaires les courbes des figures 12 et 13 montrent que la convergence est atteinte pour des valeurs des facteurs de pénalisation comprise entre  $10^8$  et  $10^{15}$ . Le problème diverge dans les cas extrêmes des très petites et très grandes valeurs.

Le tableau suivant (figure 14) montre une comparaison entre les valeurs de pénalisation assurant la convergence pour trois maillages différents.

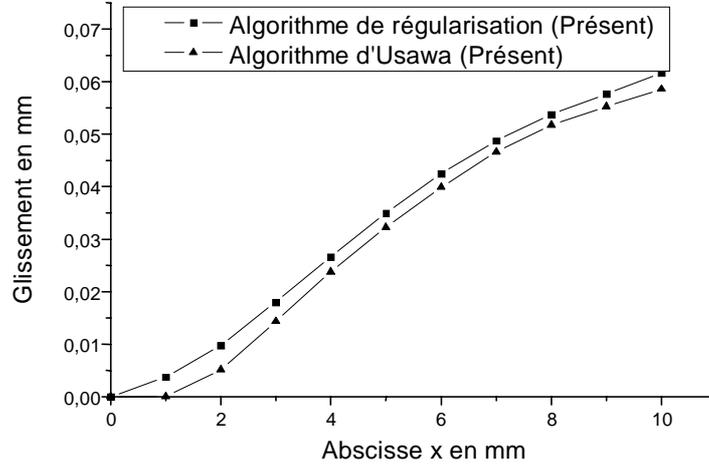
Maillage	Valeur des facteurs de pénalisation
20 éléments	De $10^8$ à $10^{15}$
40 éléments	De $10^6$ à $10^{12}$
60 éléments	De $10^5$ à $10^8$

**Figure 14.** Intervalles des facteurs de pénalisation

## 8.2.2. Comparaison des deux algorithmes

### 8.2.2.1. Glissement des nœuds de contact

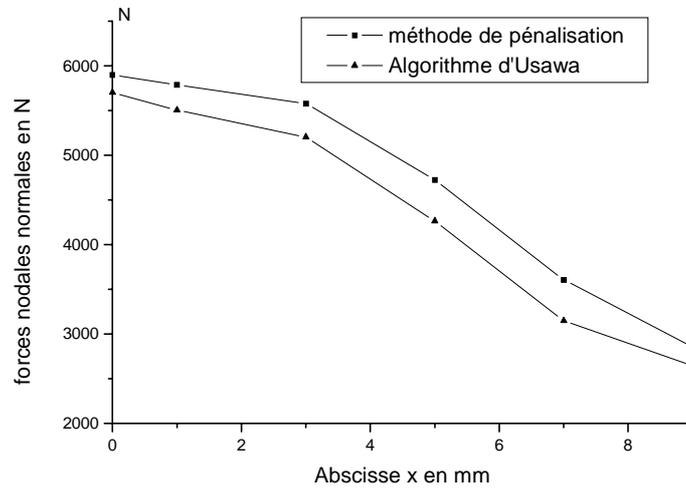
Sur les courbes de la figure 15, on présente la variation du glissement des points de la surface de contact entre le bloc du matériau et la fondation rigide.



**Figure 15.** Courbes de comparaison des glissements ( $\mu=0.1$ )

8.2.2.2. Distribution des forces nodales normales

Pour alléger la présentation, nous présenterons, dans la suite, seulement les forces nodales appliquées sur les nœuds de milieu des éléments finis.



**Figure 16.** Courbes de comparaison des réactions normales ( $\mu=0.1$ )

Les calculs sont effectués sur un processeur Pentium III 450MHZ. Une comparaison du temps de calcul entre les deux méthodes est présentée sur le tableau de la figure 17

Méthode	Temps de calcul CPU
Régularisation	25s
Uzawa	30min

**Figure 17.** *Temps de calcul CPU*

Les courbes présentées sur les figures 15 et 16 montrent une bonne concordance entre les résultats obtenus par l'algorithme de projection d'Uzawa et ceux obtenus par l'algorithme de régularisation.

En comparant les deux algorithmes nous pouvons dire, au niveau du temps de calcul, que la méthode de pénalisation est plus rapide que l'algorithme d'Uzawa. L'algorithme de régularisation permet un calcul direct des réactions par simple dérivation, ce qui justifie sa rapidité mais nous résolvons dans ce cas un problème approché et pas le problème réel, par contre l'algorithme d'Uzawa résout le problème réel mais nous devons faire plusieurs opérations de prédiction-corrrection pour atteindre la convergence.

L'algorithme d'Uzawa nécessite l'utilisation d'un système d'exploitation efficace et une machine de grande capacité. De plus, son efficacité n'apparaît que dans le cas des problèmes complexes. Pour les exemples quasi statiques du contact entre un corps déformable et une fondation rigide, les méthodes de pénalisation restent les plus optimales.

## 9. Conclusion et perspectives

Un algorithme de résolution du problème d'évolution élastoplastique en présence du contact avec frottement sec de Coulomb a été présenté.

L'outil théorique du bipotentiel a été utilisé pour modéliser le comportement non standard des interfaces de contact.

Deux méthodes numériques : la pénalisation et le Lagrangien augmenté avec l'algorithme d'Uzawa, ont été programmées et testées dans ce travail. La comparaison faite entre les deux procédures a montré les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles.

Pour aborder des exemples plus complexes de la mise en forme des métaux, il est nécessaire d'introduire le phénomène de l'érouissage et les grandes déformations. Ces aspects sont en cours de développement.

## 10. Bibliographie

- Auliac G., Avignat J. et Azoulay E., *Techniques mathématiques pour la physique*, Ellipses, 2000.
- Chaaba A., Analyse limite des métaux et des matériaux granulaires par la théorie du bipotentiel, Thèse de Doctorat en sciences appliquées. ENSEM, Casablanca, 2001.
- De Saxcé G., Feng Z.Q., “New inequality and functional for contact with friction: The implicit standard material approach”, *Mec. Struct. Mach.* 19, 1991, p. 301-325.
- Fihri Fassi H., Simulation numérique des procédés de formage à froid des métaux en présence d’une loi non associée du contact avec frottement, Thèse de doctorat, Université Mohammed V, Rabat, Maroc, 2002.
- Halphen B., Nguyen, Q.S. « Sur les matériaux standards généralisés », *J. de mécanique*, vol. 14, 1975, p. 39-63.
- Hill R., *The Mathematical Theory of plasticity*, Clarendon Press, 1950, Oxford.
- Jean M., Touzot G., “Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformation problems”, *Journal of theoretical and applied mechanics*, Special issue, supplement n° 1 to vol. 7, 1988.
- Minoux M., *Programmation mathématique*, vol. 1, Dunod 1983.
- Moreau J.-J., « Proximité et dualité dans un espace Hilbertien », *Bull. Soc. Math.*, France, 93, 1965, p. 273-299.
- Moreau J.-J., « La notion de surpotentiel et les liaisons unilatérales en élastoplasticité », *C. R.Acad. Sc. Paris*, t. 267. 16 Décembre 1968.
- Murtagh B.A., Saunders M.A., Minos 5.1 User’s guide, Standford university, 1987.
- Prandtl L., “On the penetration hardness of plastic materials and the hardness of indenters”, *Zeits. Ang. Math. Mech.*, vol. 1, 1921, p. 15.
- Signorini A., « Sopra alcune questioni di elastica, Atti della Societa », *Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.