

---

# Dimensionnement optimal des coques minces par l'approche statique de l'analyse limite et les algorithmes génétiques

**Mustapha Bideq\*** — **Lahbib Bousshine\*** — **Mohamed Kouam\*\***  
**Guy Guerlement\*\*\***

\* *Laboratoire de Mécanique des Structures et des Matériaux (LMSM), Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique BP. 8118, Casablanca, Maroc. bideq@hotmail.com*

\*\* *Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia, Université Hassan II Mohammedia. BP 145, Mohammedia, Maroc*

\*\*\* *Laboratoire de Mécanique des Matériaux et des Structures (LMMS), Faculté Polytechnique de Mons, 53 rue du Joncquois, 7000 Mons, Belgique*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article, nous avons posé le problème de l'optimisation dimensionnelle des structures en général et des coques minces axisymétriques de révolution en particulier. La formulation que nous avons proposée est basée sur l'utilisation de la théorie de l'analyse limite et les algorithmes génétiques (Holland, 1976). Cette approche permet de simplifier le problème de dimensionnement en se débarrassant des variables auxiliaires, introduites généralement par la discrétisation de la structure en éléments finis, pour ne garder que les variables design. Le problème de l'analyse limite est résolu par l'utilisation d'une méthode déterministe de la programmation mathématique (Bideq, 1998). Le problème de dimensionnement optimal est résolu en faisant appel aux algorithmes génétiques.*

*ABSTRACT. In this paper, the problem of the dimensional optimization of thin rotationally symmetric shells is examined. The formulation proposed is based on the utilization of the limit analysis theory and genetic algorithms (Holland, 1976). This approach allows to simplify the problem by eliminating the dummy variables which were introduced by the discretization of the structure into finite elements. The problem of the limit analysis is solved by the use of a determinist method of the mathematical programming (Bideq, 1998). The structural optimization problem is solved by using the genetic algorithms.*

*MOTS-CLÉS: dimensionnement optimal, coques minces, analyse limite, programmation mathématique, algorithmes génétiques.*

*KEYWORDS: optimization, thin shells, limit analysis, mathematical programming, genetic algorithms.*

---

## 1. Introduction

La qualité d'une structure dépend de plusieurs critères de nature physique, économique et esthétique. Il est difficile de définir avec précision ce que c'est qu'une structure optimale. Car, outre leur caractère subjectif, certains des critères retenus pour l'évaluation de la performance d'une structure sont souvent en conflit les uns avec les autres ; une structure agréable à voir n'est pas forcément économique et une structure facile à mettre en œuvre risque de ne pas être esthétique.

Le calcul optimal des structures a pour objectif de chercher « la meilleure » structure qui répond à une mise en service donnée et qui tient compte de tous les critères et contraintes de conception et de réalisation. Le coût global de la structure est l'un des paramètres les plus importants dont il faut tenir compte. Il englobe, entre autres, le coût de la conception (dessins et calculs), le coût de la réalisation (fabrication et assemblage) et le coût de la matière. La minimisation du coût global de la structure doit s'opérer simultanément lors de la conception et de la réalisation en concertation entre les différents intervenants (bureau d'étude et fabrication). Dans la phase de conception, la détermination des formes et des dimensions de la structure doit impliquer l'utilisation d'un minimum possible de matière. C'est l'objectif principal de l'optimisation des structures.

On distingue, en général, trois niveaux différents d'optimisation des structures : Dans le premier niveau, on cherche la meilleure structure parmi toutes celles qui satisfont les conditions de mise en service. Dans ce cas, les variables design sont tous les paramètres géométriques de la structure qui définissent sa topologie, sa forme et ses dimensions. Dans le second niveau de l'optimisation, la topologie de la structure est fixée, le problème de l'optimisation concerne la forme et les dimensions des éléments de la structure. Dans le troisième niveau, la topologie et la forme sont fixées, l'optimisation porte seulement sur les dimensions de la structure.

Bien entendu, le premier problème, celui qui concerne l'optimisation de la topologie de la structure, est le plus difficile à aborder. Cependant, la structure optimale est toujours obtenue du fait du grand nombre de possibilités. Ce genre d'optimisation reste toujours à ses débuts, bien que les premiers théorèmes dans ce domaine ont été émis par Maxwell en 1854. Les premiers travaux concernaient des structures monodimensionnelles pour lesquelles on cherche les meilleurs emplacements des axes et des nœuds pour obtenir un poids minimum (Maxwell, 1890). Mais les premières bases de cette théorie furent établies ultérieurement par Michell en 1904 (Michell, 1904). Actuellement, L'optimisation topologique connaît un vaste domaine d'application et de nouveaux algorithmes sont mis au point pour résoudre ce type de problèmes (Leung, 1994). Le second niveau concerne l'optimisation de la forme de la structure. Deux types de variables sont mis en jeu dans ce genre de problèmes : des variables qui définissent la forme de la structure et d'autres qui déterminent ses dimensions. Toute variation dans l'un ou l'autre type de ces variables entraînerait des modifications notables dans le comportement de la

structure. Certaines méthodes d'optimisation de forme transforment le problème en une suite de problèmes de dimensionnement optimal et utilisent les algorithmes de l'optimisation dimensionnelle qui existent déjà. Cependant, ils souffrent, dans la plupart, de problèmes d'instabilité. Quelques études se sont intéressées aux problèmes de sensibilité et de remaillage dans ce type de problèmes (Ding, 1986 ; Saka, 1991). Le troisième problème est celui du dimensionnement optimal dont les premiers travaux datent depuis plus d'une trentaine d'années (Vanderplaats, 1982). Il s'agit de chercher les sections et les inerties géométriques des éléments de la structure qui impliquent l'utilisation d'un minimum de matière.

Le souci d'économiser de la matière était toujours présent dans le domaine du calcul des structures. En résistance des matériaux classique, cela se traduisait par le calcul d'égale résistance. La structure obtenue doit présenter la même « réserve de résistance » en tout point. La plupart des problèmes de dimensionnement optimal des structures se ramènent à un problème de dimensionnement de poids minimum. Des théorèmes établis par Save (Save, 1972) montrent que, sous certaines conditions, le dimensionnement plastique de poids minimum pour des charges fixes données est un dimensionnement élastique d'égale résistance pour ces mêmes charges. Dans le cas de charges variables, chaque élément de la structure doit atteindre son seuil de résistance au moins dans un cas de charge, et le dimensionnement obtenu est toujours de poids minimum.

Le problème de dimensionnement de poids minimum des coques cylindriques a été abordé pour la première fois par Onat et Prager (Onat, 1956). L'approche utilisée dans ces travaux est basée sur le fait que la structure de poids minimum doit s'écrouler en un mécanisme de ruine comportant autant de degrés de liberté que de variables design impliquées par le problème de dimensionnement. Les auteurs ont étudié le cas d'une coque cylindrique soumise à une pression interne uniforme et supportant un effort axial. Ces travaux ont été repris par Shield (Shield, 1960) qui a étudié le dimensionnement de poids minimum des coques cylindriques à épaisseur continûment variable. Il a établi une condition d'optimalité pour les coques cylindriques Sandwich et étudié l'unicité des solutions ainsi obtenues (Hu, 1961).

Outre le dimensionnement d'égale résistance, il existe un autre type de dimensionnement basé sur l'approche variationnelle. Ce dimensionnement fait appel au concept de critère d'optimalité. Il offre l'avantage de donner une interprétation physique à la notion d'optimalité. En effet, Le minimum de poids est atteint quand la dissipation plastique par unité de volume est la même en tout point de la structure. Beaucoup de travaux se sont intéressés à l'élaboration de conditions d'optimalité des structures, particulièrement pour les poutres et les plaques (Lamblin *et al.*, 1975, 1977).

Avec le développement des algorithmes de la programmation mathématique et l'avènement des ordinateurs, le dimensionnement de poids minimum a pris un autre élan. Le problème est formulé sous la forme d'une fonction objectif qui n'est autre qu'une grandeur (ou plusieurs) dont la minimisation (ou la maximisation) présente

un intérêt du point de vue de la qualité de la structure (coût, poids, volume, etc.). Des fonctions contraintes qui traduisent les limites physiques et technologiques qu'il faut impérativement respecter pour obtenir un dimensionnement pratique. Ensuite, il faut choisir l'algorithme de programmation mathématique adéquat pour la résolution du problème ainsi formulé. L'algorithme choisi dépend de la nature du problème et des difficultés numériques qui en découlent. De nombreux travaux ont utilisé la programmation mathématique pour le dimensionnement optimal des plaques circulaires et des coques cylindriques (Lamblin *et al.*, 1978).

Aujourd'hui, malgré le développement considérable qu'a connu la modélisation des structures et les méthodes de programmation mathématique, des difficultés énormes persistent encore dans le domaine de l'optimisation des structures. Ces difficultés sont dues essentiellement à la complexité de plus en plus accrue des structures étudiées et aux conflits entre les différentes performances attendues de la structure. Pour surmonter ces difficultés il s'est avéré nécessaire d'utiliser des méthodes numériques qui permettent de gérer au mieux ces conflits.

Dans cet article, nous avons posé le problème de l'optimisation dimensionnelle des structures en général et des coques minces de révolution en particulier. La formulation que nous avons proposée est basée sur l'utilisation de la théorie de l'analyse limite. Le problème de dimensionnement est transformé en une série de problèmes d'analyse limite. Cette approche permet de simplifier le problème en se débarrassant des variables auxiliaires, introduites généralement par la discrétisation de la structure en éléments finis, pour ne garder que les variables design. Le problème de l'analyse limite est résolu par l'utilisation d'une méthode déterministe de la programmation mathématique (Bideq, 1998). Quand au problème de dimensionnement optimal, il est résolu en faisant appel aux algorithmes génétiques (Holland, 1976) pour contourner les problèmes numériques dus à la non-différentiabilité et à la non-convexité de la fonction objectif et des fonctions contraintes.

## **2. Les problèmes d'optimisation des structures**

Le concept d'optimisation est lié au désir d'exceller et d'atteindre le « parfait ». Dans le domaine des sciences et des techniques de l'ingénieur, ce désir se traduit par la volonté de créer le meilleur produit pour des ressources données.

La conception optimale d'une structure est une tâche complexe et résulte d'un compromis entre de nombreux facteurs très variés dont certains sont rationnels et quantifiables, tels que la résistance de la structure et d'autres moins rationnels et difficiles à quantifier tels que l'esthétique de la structure.

Le concepteur essaie de tenir compte de toutes ces considérations, il se trouve vite contraint à faire des compromis pour formaliser son problème. Le processus

d'optimisation sera subdivisé en plusieurs tâches dont certaines relèvent essentiellement de l'art de l'ingénieur tandis que d'autres peuvent être automatisées.

La formulation d'un problème d'optimisation commence par le choix d'une mesure d'efficacité. Cette mesure se présente sous la forme d'une fonction de plusieurs variables qui représente la fonction objectif. Les variables design sont soumises généralement à des conditions appelées contraintes technologiques. Résoudre un problème d'optimisation revient à chercher l'optimum (minimum ou maximum) de cette fonction en essayant de satisfaire toutes les contraintes.

Le problème type de l'optimisation des structures peut être établi de la façon suivante : minimiser le coût de la structure (poids, volume, prix...), soumis à des contraintes de comportement (résistance, rigidité) et éventuellement à des contraintes géométriques ou technologiques.

Les approches utilisées pour aborder les problèmes d'optimisation des structures sont divisées en deux catégories importantes selon la façon de formuler le problème :

- la méthode indirecte qui utilise un critère d'optimalité (optimum criteria) ;
- la méthode directe qui utilise la programmation mathématique.

Avant l'apparition de ces deux méthodes, la résolution des problèmes d'optimisation s'opérait par la méthode de l'essai et de l'erreur qui reste encore utilisée à nos jours dans le monde de l'industrie. Cette méthode est basée sur l'expérience de l'utilisateur : on définit une structure et on calcule sa réponse (en utilisant un code éléments finis). Si nécessaire, la structure est modifiée de façon plus ou moins arbitraire en faisant appel uniquement à l'intuition jusqu'à ce que l'on obtienne la réponse attendue.

Dans le cas où la réponse de la structure dépend de plusieurs paramètres (variables design), la tâche devient très difficile, et rien ne garantit qu'une modification de l'une ou l'autre de ces variables, dans un sens ou l'autre, entraînerait une augmentation de la performance de la structure. Il était donc nécessaire d'établir des critères d'optimalité sous forme d'une condition nécessaire voire même suffisante. Beaucoup de travaux se sont intéressés à l'élaboration de conditions d'optimalité des structures (Save, 1985). Le minimum de poids est atteint quand la dissipation plastique par unité de volume est la même en tout point de la structure.

Dans les deux dernières décennies, caractérisées par l'augmentation phénoménale de la capacité et de la vitesse de calcul des ordinateurs, l'optimisation des structures est devenue une tâche automatique et fait de moins en moins appel à l'intuition. C'est grâce aux algorithmes de la programmation mathématique que cela est devenu possible. Leur combinaison avec la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière a permis la résolution de problèmes d'optimisation de forme et d'optimisation dimensionnelle (Haslinger, 1988 ; Mota, 1987).

Pour résoudre un problème d'optimisation des structures en utilisant la programmation mathématique il convient, tout d'abord, d'analyser le problème et d'opérer un certain nombre de choix préalables :

- la fonction objectif : quels sont les objectifs à atteindre ?
- les variables : quels sont les paramètres intéressants à faire varier ?
- l'espace de recherche : dans quelles limites faire varier ces paramètres ?
- la méthode d'optimisation : quelle méthode choisir ?

Une fois effectués ces différents choix, la méthode retenue synthétise des solutions potentielles qui sont évaluées, puis éliminées jusqu'à obtention d'une solution acceptable. Si nécessaire, le problème peut être redéfini à partir des solutions déjà obtenues.

Les problèmes d'optimisation de poids minimum sont généralement exprimés par une fonction objectif scalaire représentant le poids de la structure. Dans le cas d'un matériau homogène, on parle simplement de volume minimal. A cela s'ajoutent des conditions qui expriment le niveau des contraintes ou des déplacements admissibles. Les problèmes d'optimisation des structures se présentent généralement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ g_i(x) \leq \bar{\sigma}_i & i = 1, \dots, n \\ g_i(x) \leq \bar{u}_i & i = n+1, \dots, m \\ x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \end{cases} \quad [1]$$

où  $f(x)$  mesure l'efficacité de la structure (coût, poids, volume...).

$x$  : dimensions de la structure ou variables design sur lesquelles porte l'optimisation et les variables auxiliaires du problème.

$g_i(x) \leq \bar{\sigma}_i$  : condition relative aux contraintes dans la structure.

$g_i(x) \leq \bar{u}_i$  : condition relative aux déplacements.

$\bar{\sigma}_i$  : limite élastique.

$\bar{u}_i$  : déplacement limite.

Généralement  $g_i(x)$  sont des fonctions non linéaires implicites ou à variables couplées. Leur évaluation est obtenue par la résolution d'un problème auxiliaire qui traduit le comportement de la structure et ce en minimisant son énergie potentielle.

Les contraintes technologiques d'inégalité sont écrites de telle façon qu'elles soient négatives ou nulles. Ceci facilite la généralisation des problèmes d'optimisation est n'est en rien limitatif car toute inégalité peut être ramenée sous cette forme à l'aide d'opérations algébriques élémentaires.

Le problème précédent est un problème de programmation mathématique non linéaire avec contraintes. Les contraintes imposées peuvent être de deux natures différentes : des contraintes physiques, liées à la nature du matériau utilisé en l'occurrence son état de contrainte limite. Et des contraintes géométriques imposées pour des raisons pratiques ou esthétiques.

Une fois définie la fonction à optimiser, il s'agit de choisir une méthode adaptée au problème posé. Les méthodes d'optimisation peuvent être classées de différentes manières : nous les classerons en méthodes déterministes et non déterministes.

Les méthodes déterministes sont généralement efficaces quand l'évaluation de la fonction est très rapide, ou quand la forme de la fonction est connue *a priori*. Les cas plus complexes (nombreux optima locaux, fonctions non dérivables, fonctions bruitées, fonctions non convexes...) seront souvent traités plus efficacement par des méthodes non déterministes.

### 3. Problème d'optimisation des coques minces de révolution

Il existe deux approches pour résoudre les problèmes d'optimisation des structures : l'approche cinématique et l'approche statique. Dans la première, on cherche le volume minimal de matière en faisant en sorte que la puissance de dissipation interne reste toujours inférieure à la puissance des efforts extérieurs. Cette méthode requiert une discrétisation en éléments finis cinématiquement admissibles. L'utilisation de cette méthode sous-entend qu'il y a formation de mécanismes de ruine et donc violation de la condition de plasticité. Les résultats obtenus peuvent être exploités dans de nombreuses applications dans le domaine de la mise en forme par déformation plastique des matériaux. Dans la deuxième approche, il s'agit de minimiser le volume de matière sous les conditions suivantes : la structure doit résister à un chargement imposé, sous l'action duquel les éléments de la structure doivent rester en équilibre et vérifier la condition de plasticité. L'approche statique, ainsi formulée, garantit la stabilité et la sécurité de la structure. C'est pour cette raison que nous avons adopté cette approche dans ce travail.

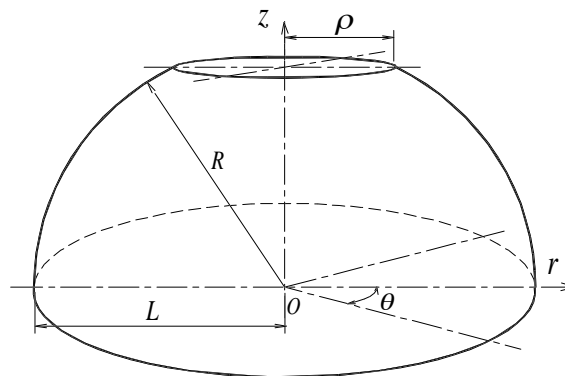
Les coques minces de révolution que nous avons étudiées sont obtenues par la rotation d'une génératrice de forme quelconque autour de l'axe  $(o, z)$  (figure 1).  $L$  est une longueur caractéristique de la coque et  $e$  son épaisseur. La coque peut présenter une ouverture de rayon  $\rho$  située dans sa partie supérieure. On travaille dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  (figure 2).

Le problème de dimensionnement optimal peut être exprimé de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } V \\ \text{Sous les conditions suivantes :} \\ \quad . P = P_0 \\ \quad . \text{Equations d'équilibre} \\ \quad . \text{Condition de plasticité} \\ \quad . \text{Contraintes technologiques} \end{array} \right. \quad [2]$$

$V$  est le volume de la matière qui constitue la coque. Dans le cas où l'épaisseur  $e$  de la structure est constante, le problème se ramène à une minimisation de cette dernière.  $P$  est la charge limite que peut supporter la structure et  $P_0$  la valeur imposée pour cette charge. Dans cette étude on suppose qu'il s'agit d'une pression interne uniformément répartie.

Pour garantir la stabilité de la coque, les équations d'équilibre et la condition de plasticité doivent être respectées en tout point de la structure. Enfin, des contraintes technologiques qui rendent le dimensionnement pratique en fixant les valeurs minimale et maximale de  $e$ .



**Figure 1.** Coque mince de révolution

Les hypothèses de base que nous avons adoptées sont les suivantes :

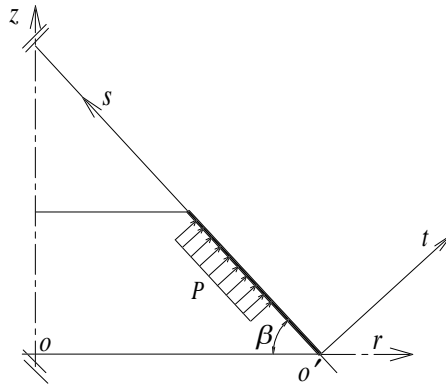
- les matériaux utilisés sont isotropes et possèdent un palier de plasticité suffisamment grand pour être considérés comme parfaitement plastiques (acier, aluminium...);
- la coque est mince et obéit à l'hypothèse de Kirchhoff-Love concernant la conservation des normales. Ce qui ramène l'étude de la coque à celle de sa surface moyenne;
- les déformations se passent dans des conditions isothermes;



- le chargement est suffisamment lent, on se trouve dans des conditions quasi statiques ; tout effet dynamique est exclu ;
- les déformations sont supposées petites ; l'expression infinitésimale des déformations est donc suffisante. On exclut tout effet d'instabilité géométrique ;
- les hypothèses générales de la théorie de la plasticité parfaite sont vérifiées.

#### 4. Equations d'équilibre

L'hypothèse de conservation des normales des sections planes des coques nous permet de décrire un mécanisme de ruine seulement en fonction des vitesses de déformation généralisées. Les contraintes généralisées associées sont définies par l'application du théorème des puissances virtuelles.



**Figure 2.** Tronc de cône, repères local et global

La discrétisation en éléments finis de la coque mince axisymétrique est basée sur les éléments finis tronconiques (figure 5). La définition de tels éléments passe à travers les équations d'équilibre et de compatibilité relatives aux coques minces coniques. Ces équations traduisent l'équilibre d'un petit tétraèdre dans les différentes directions (figure 3). Il est plus astucieux d'écrire ces relations en utilisant les variables généralisées adimensionnelles suivantes (Nguyen, 1985):

$$n = \frac{N_x}{N_p}, \quad n_\theta = \frac{N_\theta}{N_p}, \quad q = \frac{Q}{N_p},$$

$$m = \frac{M_x}{M_p}, \quad m_\theta = \frac{M_\theta}{M_p}, \quad P = \frac{P_0 L}{2N_p}, \quad [3]$$

$$h = \frac{M_p}{N_p L} = \frac{e}{4L} \text{ et } r = \frac{R}{L}.$$

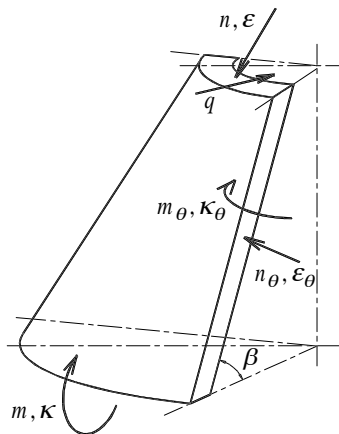
Les termes majuscules désignent les variables dimensionnelles.  $N$  et  $N_\theta$  sont les efforts normaux,  $Q$  l'effort tranchant et  $M$  et  $M_\theta$  sont les moments de flexion.

$M_p$  et  $N_p$  sont respectivement le moment et l'effort normal limite par unité de longueur :

$$M_p = \frac{\sigma_0 e^2}{4}, \tag{4}$$

et  $N_p = \sigma_0 e$ .

$\sigma_0$  est la limite élastique de traction du matériau.



**Figure 3.** Variables généralisées (contraintes et déformations)

Les équations d'équilibre de la coque conique, écrites en fonction des variables adimensionnelles dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , sont (Flugge, 1960 ; Hodge, 1963) :

$$\frac{d}{ds}(sn) - n_\theta = 0, \tag{5}$$

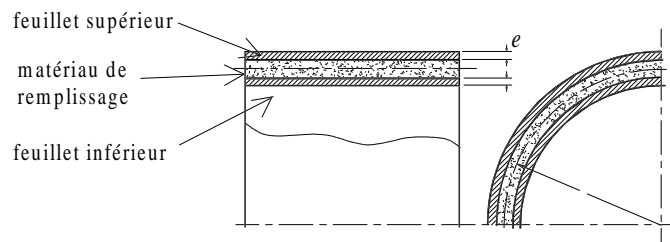
$$\frac{d}{ds}(sq) + n_\theta \operatorname{tg} \beta + 2sP = 0,$$

$$h \frac{d}{ds}(sm) - hm_\theta - sq = 0,$$

où  $m$  et  $m_\theta$  sont les moments de flexion,  $n$  l'effort normal axial,  $n_\theta$  l'effort normal circonférentiel et  $q$  l'effort tranchant adimensionnels. On précise que les efforts et les moments sont exprimés par unité de longueur,  $P$  est la pression interne adimensionnelle.

### 5. Critère de plasticité

On adoptera dans ce travail le critère de plasticité de Von Mises valable pour les coques « sandwich » (Hodge, 1963). De nombreux travaux ont montré que pour un poids équivalent, la coque sandwich admet une charge limite nettement supérieure à celle admise par la coque pleine (Ostwald, 1990). L'idée de départ consiste à remplacer le matériau homogène qui constitue la coque par un « sandwich idéal » constitué de deux feuillets métalliques séparés par un matériau de remplissage (figure 4).



**Figure 4.** Section de la coque Sandwich

Ce critère est exprimé par les deux inégalités suivantes (Hodge, 1963) :

– pour le feuillet supérieur :

$$(n_\theta - m_\theta)^2 - (n_\theta - m_\theta)(n - m) + (n - m)^2 \leq 1, \quad [6]$$

– pour le feuillet inférieur :

$$(n_\theta + m_\theta)^2 - (n_\theta + m_\theta)(n + m) + (n + m)^2 \leq 1. \quad [7]$$

Dans le cas des coques « Sandwich », il est préférable de remplacer les contraintes généralisées par les variables auxiliaires suivantes (Nguyen, 1985) :

$$\begin{aligned}
 \sigma_i &= (n + m), \\
 \sigma_s &= (n - m), \\
 \sigma_{\theta i} &= (n_\theta + m_\theta), \\
 \sigma_{\theta s} &= (n_\theta - m_\theta),
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

où  $i$  et  $s$  indiquent respectivement les feuillets inférieur et supérieur.

L'utilisation de ces variables auxiliaires permet de simplifier, de façon remarquable, l'expression de la fonction de charge et de la puissance de dissipation plastique. La condition de plasticité peut s'écrire sous la forme matricielle suivante (Biron, 1970) :

$$\begin{aligned}
 \{\sigma\}^T [D_1] \{\sigma\} &\leq 1, \\
 \{\sigma\}^T [D_2] \{\sigma\} &\leq 1,
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

où  $\{\sigma\}$  est le vecteur contraintes.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} n_\theta \\ m_\theta \\ n \\ m \end{Bmatrix}, [D_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } [D_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

## 6. Formulation du problème discrétisé

La structure est discrétisée en éléments finis tronconiques d'équilibre. Le concept d'élément d'équilibre a été proposé pour la première fois par F. De Veubeke en 1965 (Freijs, 1965). La première application de ce concept en plasticité est proposée par N. D. Hung (Nguyen, 1973, 1976). Les équations d'équilibre de la coque conique sont couplées, ce qui rend impossible toute tentative d'approcher les contraintes par une fonction de forme. La discrétisation retenue pour les contraintes comprend une partie qui satisfait l'équilibre homogène et une partie qui équilibre une pression uniforme le long de l'élément. Ainsi, on peut écrire le vecteur des contraintes sous la forme suivante :

$$\{\sigma\} = [M_1] \{a_1\} + [M_2] \{a_2\}, \tag{11}$$

$\{a_1\}$  et  $\{a_2\}$  sont deux systèmes de paramètres arbitraires.

L'équation 11 peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\{\sigma\} = [M] \{a\}, \quad [12]$$

$$\text{où } [M] = [M_1 \quad M_2],$$

$$\text{et } \{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}.$$

Pour déterminer les éléments de la matrice  $[M]$ , on fait des hypothèses sur les composantes du vecteur  $\{a\}$  et on pose (Morelle, 1983),

$$\begin{aligned} n_\theta &= a_1, \\ m_\theta &= a_2. \end{aligned} \quad [13]$$

Ces hypothèses permettent de découpler les équations d'équilibre ; leur intégration sera donc sans difficulté. Le remplacement dans les équations 5 et l'intégration par rapport à  $s$  fournissent alors trois autres constantes  $a_3, a_4$  et  $a_5$ . La sixième composante du vecteur  $\{a\}$  est la pression réduite  $P$  elle-même.

$$\begin{aligned} n &= a_1 + \frac{a_3}{s}, \\ q &= -tg\beta a_1 + \frac{a_4}{s} - sp, \\ m &= -\frac{tg\beta s}{2h} a_1 + a_2 + \frac{a_4}{h} + \frac{a_5}{s} - \frac{s^2}{3h} p, \end{aligned} \quad [14]$$

nous aurons donc :

$$\{a\} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad P]^T \quad [15]$$

$$\text{et } [M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{tg\beta s}{2h} & 1 & 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{s} & -\frac{s^2}{3h} \end{bmatrix} \quad [16]$$

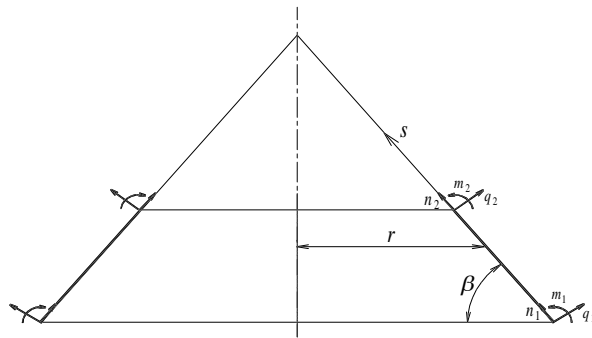
Un système de forces généralisées adéquat est fixé sur les facettes de l'élément de telle façon que la continuité des tractions de surface soit assurée. Ce système est constitué par les éléments de réduction.

$$\{g\} = [n_1 \quad q_1 \quad m_1 \quad n_2 \quad q_2 \quad m_2]^T \quad [17]$$

Une matrice de connexion  $[C]$  permet d'exprimer le vecteur  $\{g\}$  en fonction de  $\{a\}$

$$\{g\} = [C]\{a\} \quad [18]$$

$$\text{avec } [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{s_1} & 0 & 0 & 0 \\ -tg\beta & 0 & 0 & \frac{1}{s_1} & 0 & -s_1 \\ \frac{-tg\beta s_1}{2h} & 1 & 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{s_1} & \frac{-s_1^2}{3h} \\ 1 & 0 & \frac{1}{s_2} & 0 & 0 & 0 \\ -tg\beta & 0 & 0 & \frac{1}{s_2} & 0 & -s_2 \\ \frac{-tg\beta s_2}{2h} & 1 & 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{s_2} & \frac{-s_2^2}{3h} \end{bmatrix} \quad [19]$$



**Figure 5.** *Elément fini tronconique d'équilibre*

Le critère de plasticité que nous avons utilisé est non linéaire, il est constitué de deux inégalités :

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^T [D_1] \{\sigma\} &\leq 1, \\ \{\sigma\}^T [D_2] \{\sigma\} &\leq 1, \end{aligned} \quad [20]$$

L'expression (3.12) nous permet d'écrire ce critère en fonction du vecteur  $\{a\}$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \{a\}^T [K_1] \{a\} &\leq 1 \\ \{a\}^T [K_2] \{a\} &\leq 1 \end{aligned} \quad [21]$$

avec  $[K_1] = [M]^T [D_1] [M]$

et  $[K_2] = [M]^T [D_2] [M]$  [22]

Le problème de dimensionnement optimal discrétisé devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } h, \\ \text{sous les conditions suivantes :} \\ \quad \cdot P = P_0 \\ \quad \cdot \{g\} - [C] \{a\} = 0, \\ \quad \cdot \{a\}^T [K_1] \{a\} - 1 \leq 0, \\ \quad \cdot \{a\}^T [K_2] \{a\} - 1 \leq 0. \\ \quad \cdot h_{\min} \leq h \leq h_{\max} \end{array} \right. \quad [23]$$

A ces contraintes on ajoute les conditions aux limites imposées aux bords de la coque. La première condition du problème précédent traduit le fait que la pression interne est imposée, la deuxième exprime l'équilibre de la coque et les deux dernières la condition de plasticité. Ainsi, on est certain que le champ de contraintes sera tout à fait licite.

Les matrices  $[C]$ ,  $[K_1]$  et  $[K_2]$  sont des matrices globales obtenues par assemblage des matrices élémentaires correspondantes sur tous les éléments. De même pour les vecteurs  $\{a\}$  et  $\{g\}$ .

Le vecteur  $\{g\}$  est exprimé dans un système d'axes local. Pour assembler ce vecteur, il est nécessaire de l'exprimer dans un système d'axe global en lui appliquant la transformation adéquate.

## 7. Utilisation de la théorie de l'analyse limite

Le problème de dimensionnement optimal tel qu'il a été posé ci-dessus met en jeu plusieurs types de variables : des variables design telle que l'épaisseur de la structure  $h$ , les contraintes généralisées qui représentent les connecteurs dans chaque nœud de l'élément fini et les paramètres arbitraires introduits par la

construction de l'élément fini d'équilibre. Le vecteur des inconnues peut être écrit sous la forme suivante :

$$\{x\} = [h, n_1, q_1, m_1, \dots, n_N, q_N, m_N, a_1, a_2, \dots, a_{3N}, P]^T$$

En plus, les matrices élémentaires  $[C]$ ,  $[K_1]$  et  $[K_2]$  dépendent de l'épaisseur  $h$ .

L'idée de base de l'introduction de l'analyse limite dans le problème d'optimisation est de faire en sorte que les variables design soient séparées des autres variables dites auxiliaires. Ainsi, le problème de dimensionnement sera transformé en une série de problème d'analyse limite. Dans ce cas, le problème de dimensionnement sera formulé simplement de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } h, \\ \text{Sous la condition suivante:} \\ \quad P = P_0 \\ \quad h_{\min} \leq h \leq h_{\max} \end{array} \right. \quad [24]$$

$P$  dépend implicitement de  $h$ . Le problème de dimensionnement, proprement dit, ne compte plus qu'une seule variable design.

L'équation d'équilibre et la condition de plasticité se trouvent déplacées vers le problème d'analyse limite qui permet de calculer la charge limite  $P$  en appliquant le théorème de la borne supérieure. L'algorithme de résolution est le suivant :

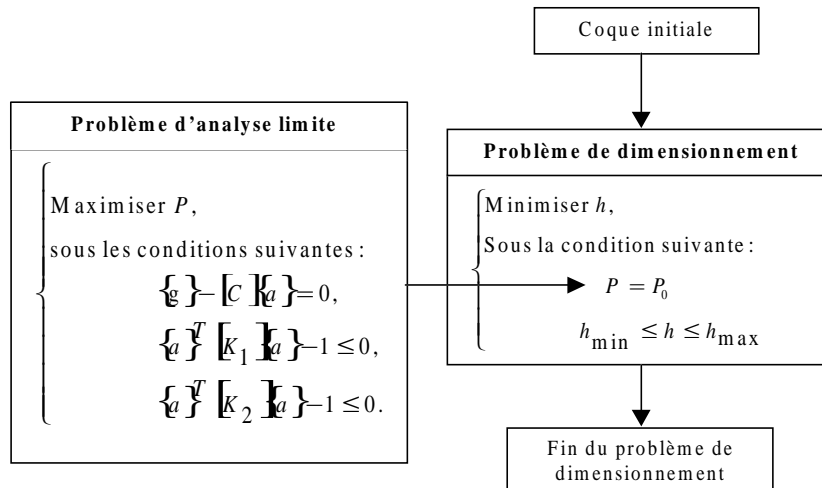


Figure 6. Algorithme de dimensionnement



A chaque fois que le problème de dimensionnement a besoin d'évaluer l'expression  $P - P_0$ , c'est le problème auxiliaire d'analyse limite qui fournit la valeur de  $P$  calculée en fonction de la variable design actuelle  $h$ .

## 8. Analyse limite des coques minces

Pour calculer la borne inférieure de la charge limite, il faut trouver un champ de contraintes en équilibre avec les charges externes telle que la condition de plasticité soit respectée en tout point de la structure. La recherche de cette borne est basée sur le théorème statique de l'analyse limite (Drucker, 1952), appelé aussi théorème de sécurité. En effet, la solution trouvée par application de ce théorème est toujours placée du côté de la sécurité. Le mot « sécurité » est utilisé pour signifier qu'une structure, étudiée de cette façon, présente une résistance au moins égale à celle impliquée par les calculs.

Il existe, en général, deux voies parallèles et complémentaires qui utilisent la méthode des éléments finis dans le calcul de l'état limite par ruine plastique :

- la méthode pas à pas ou incrémentale, où toute l'histoire de la déformation élasto-plastique est envisagée depuis la mise en charge jusqu'à la ruine. Une procédure d'itération de type Newton-Raphson est nécessaire pour rendre compte du comportement non linéaire et irréversible de la plasticité (Frey, 1978 ; Nyssen, 1979) ;
- la méthode « directe », objet de ce travail, associe la méthode des éléments finis et la programmation mathématique (Corradi, 1969 ; Kalandas, 1972 ; Guerlement, 1972 ; Bideq, 1998 ; Bousshine *et al.*, 2002) pour obtenir directement une estimation de l'état de ruine de la structure.

La formulation retenue débouche sur un problème de programmation mathématique qui consiste à maximiser le paramètre de charge  $P$  tout en veillant à ce que le critère de plasticité soit vérifié en tout point de la structure.

### 8.1. Application du théorème de la borne inférieure (théorème statique)

En se référant au théorème statique (Drucker, 1952), le problème de l'analyse limite se réduit au problème de la programmation mathématique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } P, \\ \text{sous les conditions suivantes :} \\ \quad - \{g\} - [C] \{a\} = 0, \\ \quad - \{a\}^T [K_1] \{a\} - 1 \leq 0, \\ \quad - \{a\}^T [K_2] \{a\} - 1 \leq 0. \end{array} \right. \quad [25]$$

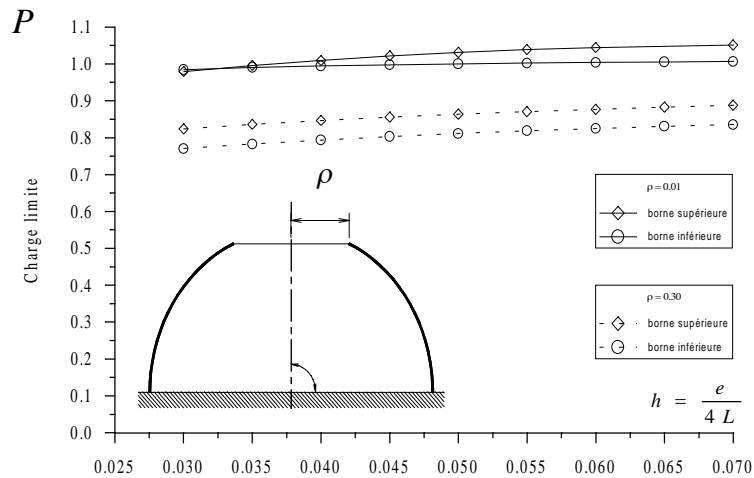
à ces contraintes on ajoute les conditions aux limites imposées aux bords de la coque. Le problème relève donc de la programmation mathématique non linéaire.

Le problème de programmation mathématique précédent est résolu par une méthode déterministe car il est convexe et ne présente pas de difficulté particulière. Le programme MINOS utilise la méthode du lagrangien augmenté pour la résolution de ce genre de problèmes (Murtagh, 1987).

### 8.2. Etude de la coque sphérique

Pour valider le module d'analyse limite, nous avons comparé les résultats obtenus par ce module à ceux qui existent dans la littérature, notamment à ceux de Chwala et Biron (Chwala, 1969) et à ceux de N. D. Hung (Nguyen, 1985). La méthode d'optimisation adoptée par ces auteurs est la technique séquentielle de minimisation non-contrainte (SUMT) (Fiacco, 1968). Pour  $h = 0.02$  et  $\alpha = 90^\circ$  on a :

Chwala et Biron	N. D. Hung	Présente étude
0.9863	0.9976	0.9996



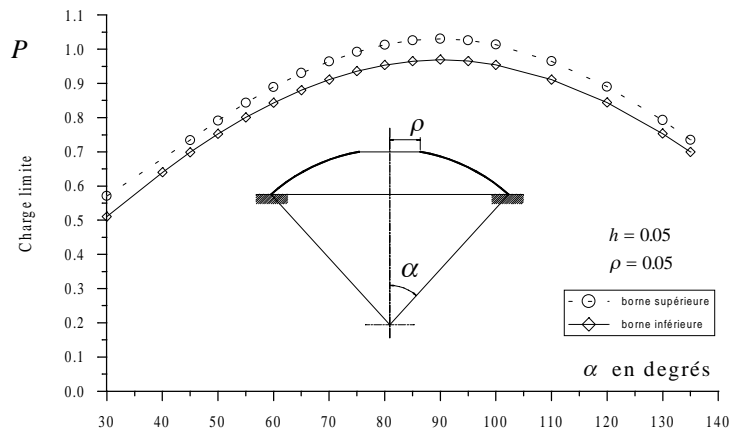
**Figure 7.** Comparaison des bornes supérieure et inférieure de la charge limite

La figure 7 montre une parfaite concordance entre les résultats obtenus par la méthode cinématique (borne supérieure) (Bideq, 1998) et ceux obtenus par la méthode statique.

### 8.3. Etude de la calotte sphérique

La coque est discrétisée en éléments finis tronconiques. Le tableau ci-dessous permet de comparer les résultats obtenus par cette méthode avec ceux qui se trouvent dans la littérature (Chwala, 1969 ; Nguyen, 1985 ; Bideq, 1998).

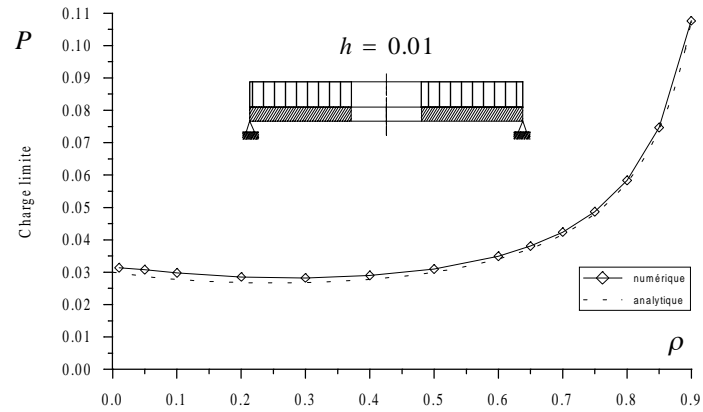
Auteur	Chwala et Biron	N. D. Hung	Présente étude
$\alpha = 12^\circ, h = 0.03$	0.2339	0.2316	0.2329
$\alpha = 38^\circ 50', h = 0.03189$	0.6388	0.6294	0.6421



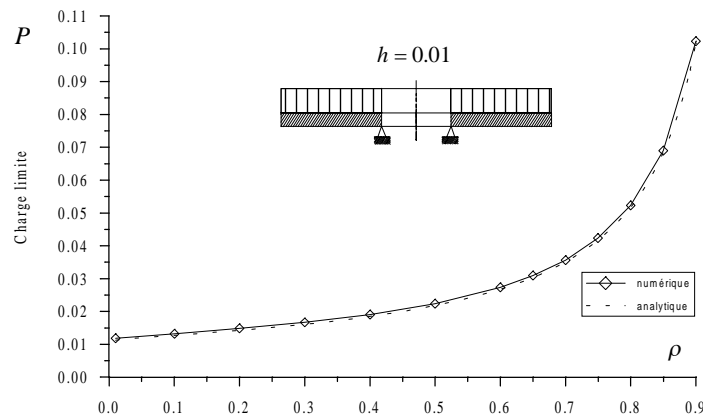
**Figure 8.** Borne supérieure et borne inférieure de la charge limite

### 8.4. Etude des plaques circulaires

L'étude des plaques circulaires nous offre l'opportunité de valider notre programme. En effet, le problème des plaques circulaires admet une solution analytique dans certains cas (Guerlement, 1972, Save, 1972). Nous avons étudié la plaque simplement appuyée au contour extérieur dont la solution analytique est donnée par Guerlement. Dans notre étude, La plaque est discrétisée en éléments finis tronconiques d'équilibre avec un angle d'inclinaison  $\beta = 0$ . Les figures 9 et 10 illustrent la parfaite concordance entre la solution analytique et la solution numérique proposée.



**Figure 9.** Comparaison des solutions analytique et numérique



**Figure 10.** Comparaison des solutions analytique et numérique de la charge limite

L'étude précédente montre, à travers les différents exemples que nous avons étudiés, que le module d'analyse limite que nous avons utilisé pour le dimensionnement des coques minces est fiable.

### 9. Utilisation des algorithmes génétiques

Dans le domaine industriel, il est très fréquent de rencontrer des problèmes d'optimisation où l'on possède peu d'informations sur la fonction objectif ou sur les contraintes technologiques et leurs dérivées. Avec les méthodes dites déterministes,

la résolution de ce genre de problèmes rencontre des difficultés insurmontables. En dehors de la programmation linéaire ou convexe, le risque de confondre un optimum local avec un optimum global est majeur.

Dans le problème d'optimisation des coques minces axisymétriques, tel que nous l'avons posé ci-dessus, la charge limite  $P$  est une fonction implicite de la variable design  $h$  du fait qu'elle est obtenue par la résolution d'un autre problème de programmation mathématique. Il est donc difficile de s'assurer de sa différentiabilité et de sa convexité dans le domaine de recherche. Pour éviter le risque de tomber dans un minimum local ou les difficultés numériques que peut poser la non-différentiabilité nous avons opté pour l'utilisation des algorithmes génétiques (AG) pour la résolution de ce problème.

Les AG diffèrent des méthodes déterministes d'optimisation (gradient conjugué, méthode de la plus grande pente, méthode des directions conjuguées...) par les trois aspects suivants :

1) Ils ne nécessitent pas le calcul d'un gradient et se contentent seulement de l'information fournie par la fonction objectif. Ce qui les rend particulièrement efficace dans le cas de problèmes mal conditionnés où la fonction objectif ou au moins l'une des fonctions contraintes est non différentiable.

2) Ils traitent une population dans son ensemble plutôt qu'un seul individu qui évoluerait vers l'optimum. Ce qui permet d'explorer l'ensemble des solutions possibles et de fournir un optimum global. Ils sont donc mieux armés pour éviter l'écueil des minimums locaux.

3) Ils font intervenir des opérateurs aléatoires. De ce fait, ils sont capables d'optimiser des fonctions multimodales, non convexes, non différentiables.

Les algorithmes génétiques ont été mis au point par John Holland dans les années soixante-dix (Holland, 1976). Leurs utilisations dans le domaine de la recherche et de l'industrie sont multiples : optimisation de fonctions numériques difficiles (discontinues, multimodales, bruitées...), traitement d'image (alignement de photos satellites, reconnaissance de suspects...), optimisation d'emplois du temps, optimisation de design, contrôle de systèmes industriels (Beasley, 1993b), apprentissage des réseaux de neurones (Renders, 1995), etc.

Les AG peuvent être utilisés pour contrôler un système évoluant dans le temps (système économique, chaîne de production, centrale nucléaire...) car la population peut s'adapter à des conditions changeantes. En particulier, ils supportent bien l'existence de bruit dans la fonction à optimiser. Depuis quelques années, les AG ont fait leur émergence dans le domaine du design des structures (Jenkins, 1991, 1994 ; Rajeev, 1992 ; Wang, 1996 ; Groenwold, 1999) où ils ne cessent de gagner du terrain et de prouver leur efficacité et leur robustesse.

Un algorithme génétique est un procédé qui permet de trouver une solution à un problème à partir d'un ensemble d'éléments choisis au hasard dans un espace de solutions potentielles. Sa connaissance du problème à résoudre se résume à une

fonction d'évaluation qui mesure la qualité d'un élément en tant que solution au problème. La règle veut que dans les algorithmes génétiques le problème soit posé comme la recherche d'un maximum contrairement à ce que l'on trouve habituellement dans les problèmes de programmation mathématique. Le problème [24] sera écrit de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(h) = -h, \\ \text{Sous la condition suivante :} \\ \quad P - P_0 = 0 \end{array} \right. \quad [26]$$

Les algorithmes génétiques traitent des problèmes de programmation mathématique sans contraintes. Dans le cas où les variables design sont subordonnées à des contraintes d'égalité, il est judicieux d'adjoindre les contraintes à la fonction objectif et de transformer le problème initial en un problème sans contraintes en utilisant une méthode de pénalité (Fiacco, 1968).

$$\left\{ \text{Maximiser } f(h) = -(h + r(P - P_0)^2) \right. \quad [27]$$

où  $r$  est le coefficient de pénalité ( $r > 0$ ).

Ou en utilisant la fonction de Lagrange  $L(h, \lambda)$ .

$$L(h, \lambda) = h + \lambda(P - P_0) \quad [28]$$

Le problème devient alors :

$$\left\{ \text{Maximiser } -L(h, \lambda) = -(h + \lambda(P - P_0)) \right. \quad [29]$$

$\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange ( $\lambda \geq 0$ ) qui est considéré comme une variable du problème.

Soit  $h_1$  la valeur de  $h$  parmi plusieurs valeurs choisies, dans un premier temps, au hasard et qui donne la plus grande valeur de  $f$ ,  $h_1$  sera considéré comme le maximum de  $f$  dans l'ensemble de départ, appelé génération 1.

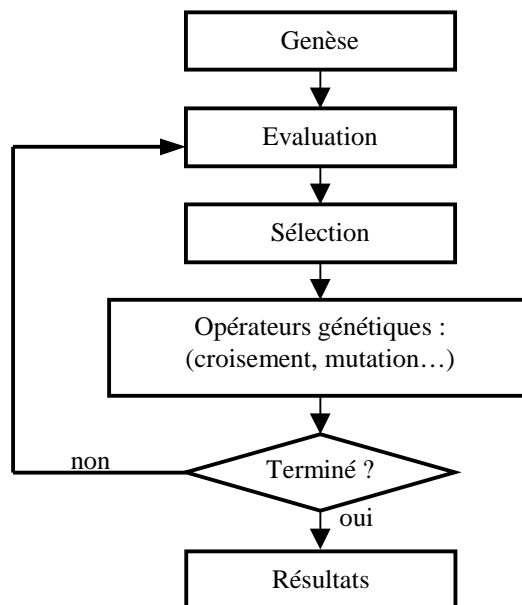
La qualité de ce maximum est très médiocre puisqu'il a été choisi au hasard. Cependant, l'algorithme génétique va tirer parti des meilleurs éléments à sa disposition pour générer un nouvel ensemble d'éléments répondant en moyenne de mieux en mieux au problème.

Pour passer de l'ancien au nouvel ensemble, les éléments sont sélectionnés aléatoirement et proportionnellement à leur qualité en tant que solution au problème. Ainsi, la valeur de  $h$  que nous avons considérée comme maximum aura plus de chances d'être sélectionnée que les autres éléments. S'il est retenu, il contribuera à

améliorer les éléments du nouvel ensemble. Dans le cas contraire, il est irrémédiablement perdu pour les ensembles futurs.

Les éléments sélectionnés sont ensuite combinés à de nouveaux éléments grâce à des méthodes inspirées de phénomènes naturels, comme le croisement génétique ou la mutation. L'algorithme génétique travaille ensuite par générations successives jusqu'à un critère d'arrêt :

- soit le temps imparti est écoulé (nombre de générations),
- soit le meilleur élément de la dernière génération atteint un seuil de qualité fixé au départ.



**Figure 11.** *Algorithme génétique (simple)*

### 9.1. Représentation binaire des chromosomes

L'algorithme génétique que nous avons utilisé repose sur la représentation binaire. Un des avantages du codage binaire est que l'on peut facilement coder toutes sortes d'objets tels que des réels, des entiers, des valeurs booléennes, des chaînes de caractères... Cela nécessite simplement l'usage de fonctions de codage et décodage pour passer d'une représentation à l'autre. Ce choix rend les AG applicables à tous les problèmes dont les solutions sont transposables en binaire.

L'espace des solutions potentielles doit être transposé dans un espace de solutions binaires en entrée de l'algorithme (codage), et la solution obtenue en sortie

doit être reconvertie en une solution réelle (décodage), qui est la valeur de l'épaisseur de la coque, afin d'être évaluée. Pour coder les variables réelles en binaire, nous discrétisons l'espace de recherche.

On commence tout d'abord par fixer le nombre de booléens qui vont servir au codage. Une chaîne binaire constituée de 32 bits se présente sous la forme suivante :

$$\underbrace{1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0}_{32 \text{ bits}}$$

Le premier site de la chaîne correspond au poids le plus faible  $2^0$ , le deuxième site  $2^1$ , le troisième  $2^2$ , ... etc.

Cette chaîne représente un nombre entier  $g_i$  tel que :

$$g_i = 1 \times 2^{31} + 0 \times 2^{30} + 1 \times 2^{29} + \dots + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$g_i = \sum_{j=0}^{31} b_j 2^j \quad [30]$$

$b_j$  est le bit qui se trouve dans la position  $j$  ( $b_j = 0$  ou  $1$ ).

Chaque variable est représentée par un entier codé sur 32 bits (par exemple).

A chaque valeur réelle  $h_i$  de  $h$  on associe donc un entier  $g_i$ , les deux relations suivantes permettent de passer d'une représentation à l'autre :

$$\text{Codage : } g_i = \frac{h_i - h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}} g_{\max} \quad [31]$$

$$\text{Décodage : } h_i = h_{\min} + \frac{h_{\max} - h_{\min}}{g_{\max}} g_i \quad [32]$$

## 9.2. Evaluation, sélection-élimination

La première étape de l'algorithme est la genèse ou le choix de la population initiale, c'est-à-dire la désignation des variables de départ qui vont subir une évolution au cours du temps. On pourrait prendre des individus régulièrement répartis dans l'espace des solutions, ce qui permet une exploration des solutions potentielles. Néanmoins, une initialisation aléatoire est plus simple à réaliser : les valeurs  $g_i$  des gènes sont tirées au hasard selon une distribution uniforme. Notons qu'on peut, si nécessaire, introduire des individus déjà calculés. Nous discuterons



plus loin de la taille  $N$  de cette population, mais nous pouvons déjà dire qu'elle résultera d'un compromis entre temps de calcul et qualité de la solution.

La performance d'un individu appartenant à une population  $P(t)$  décide de sa survie. Ne pourront survivre et se reproduire que les individus jugés robustes. L'évaluation des individus représente donc une étape très importante dans un AG.

On définit la performance moyenne d'une population de la façon suivante :

$$\bar{f}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N f(h_i)}{N} \quad [33]$$

où  $f$  est la fonction d'adaptation (fonction objectif) et  $N$  le nombre d'individus de la population.

A chaque individu on associe une performance normalisée par la performance moyenne de la population qui représente également la probabilité de sélection de cet individu :

$$p(h_i, t) = \frac{f(h_i)}{\bar{f}(t)} \quad [34]$$

Plus la valeur de  $p$  correspondant à un individu est grande plus la chance de le voir dans la génération suivante est plus importante.

### 9.3. Sélection

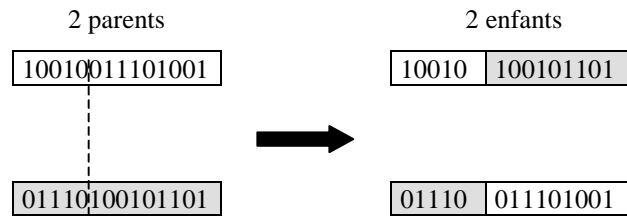
La méthode de sélection que nous avons utilisée dans ce travail est celle du tournoi. Deux individus sont choisis au hasard, ils combattent pour accéder à la génération intermédiaire (on compare leurs fonctions d'adaptation). Cette étape est répétée jusqu'à ce que la génération intermédiaire soit remplie ( $N/2$  individus). Il est tout à fait possible que certains individus participent à plusieurs tournois : s'ils gagnent plusieurs fois, ils auront donc le droit d'être copiés plusieurs fois dans la génération intermédiaire, ce qui favorisera la pérennité de leurs gènes. Nous avons également prévu la possibilité d'associer à cette méthode une procédure d'élitisme : si par hasard l'individu le plus adapté (le meilleur gène) n'a pas été sélectionné, il est copié d'office dans la génération intermédiaire à la place d'un individu choisi aléatoirement.

### 9.4. Opérateur croisement

Une fois la génération intermédiaire à moitié remplie après sélection, les individus sont aléatoirement répartis en couples prêts à se reproduire. Les

chromosomes (ensembles de paramètres) des parents sont alors copiés et recombinaés de façon à former deux descendants possédant des caractéristiques issues des deux parents. On forme ainsi la génération  $t + 1$ .

On choisit au hasard un point de croisement, pour chaque couple (figure 12). Notons que le croisement s'effectue directement au niveau binaire, et non pas au niveau des gènes. Un chromosome peut donc être coupé au milieu d'un gène.



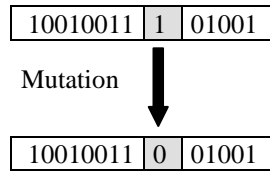
**Figure 12.** Représentation schématique du croisement en 1 point

Dans un algorithme génétique simple le croisement s'opère généralement en un seul point. Des études ont montré que l'utilisation de points de croisement multiples donne de meilleurs résultats car il accélère l'échange de gènes entre les individus (Potts, 1994 ; Srinivas, 1994). Cet opérateur est généralement considéré comme plus efficace que le précédent (Beasley, 1993a).

### 9.5. Opérateur mutation

La mutation est l'inversion d'un bit dans un chromosome (figure 13). Cela revient à modifier aléatoirement la valeur d'un paramètre du dispositif. Les mutations jouent le rôle de bruit et empêchent l'évolution de se figer. Elles permettent d'assurer une recherche aussi bien globale que locale, selon le poids et le nombre de bits mutés. De plus, elles favorisent mathématiquement que l'optimum global soit atteint.

D'autre part, une population trop petite peut s'homogénéiser à cause des erreurs stochastiques : les gènes favorisés par le hasard peuvent se répandre au détriment des autres. Cet autre mécanisme de l'évolution, qui existe même en l'absence de sélection, est connu sous le nom de dérive génétique. Du point de vue optimisation, cela signifie que l'on risque d'aboutir à des solutions qui ne seront pas forcément optimales. Les mutations permettent de contrebalancer cet effet en introduisant constamment de nouveaux gènes dans la population (Beasley, 1993b).

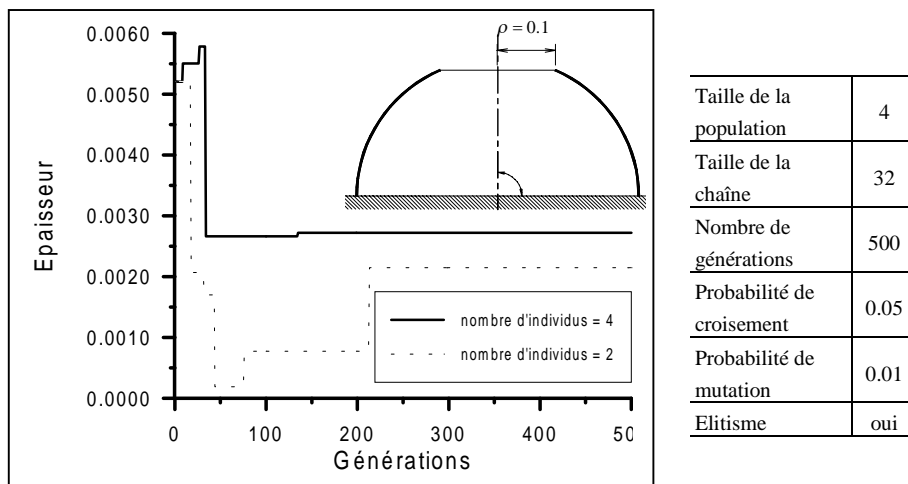


**Figure 13.** Représentation schématique d’une mutation dans un chromosome

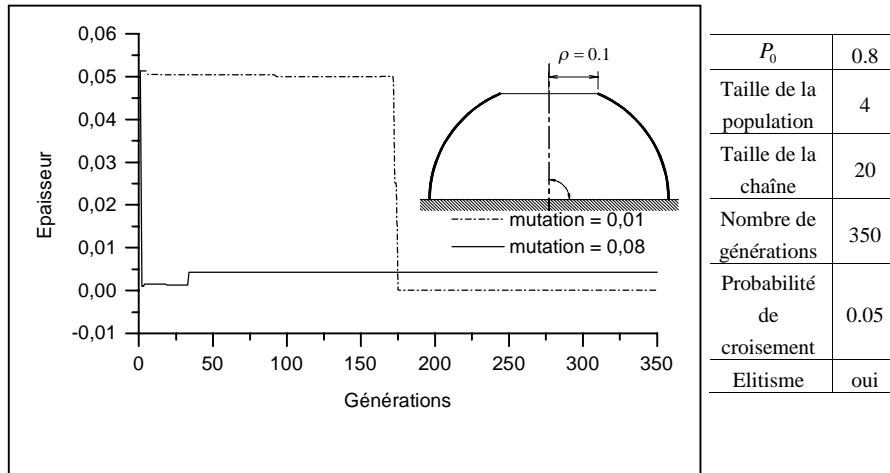
De nombreuses méthodes existent pour réaliser cet opérateur sur les AG. Souvent la probabilité de mutation  $p_m$  par bit et par génération est fixée entre 0,001 et 0,05. On peut prendre également  $p_m = \frac{1}{l}$  où  $l$  est le nombre de bits composant un chromosome.

**10. Résultats numériques**

La figure 14 montre l’évolution de l’épaisseur aux cours des générations dans le cas d’une coque hémisphérique comportant un trou de rayon 0,10. La charge limite imposée est  $P_0 = 0,2$  (adimensionnelle). La courbe montre une convergence rapide de la solution dans le cas d’un nombre d’individus plus grand, mais le temps de calcul est plus important dans ce cas.

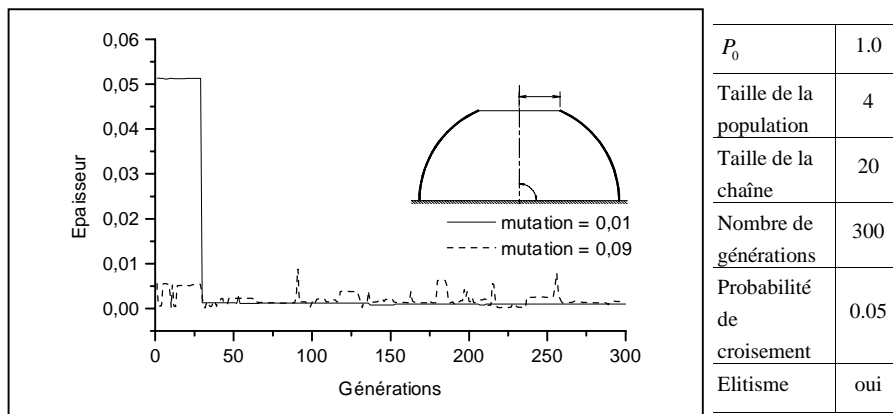


**Figure 14.** Evolution de l’épaisseur en fonction des générations



**Figure 15.** Influence de la probabilité de mutation

La figure 15 montre qu'une probabilité de mutation de l'ordre de 0,08 favorise l'exploration de l'espace des solutions et le problème converge après une cinquantaine de générations. Une valeur plus grande de ce paramètre engendre des oscillations de la solution comme le montre la figure 16.

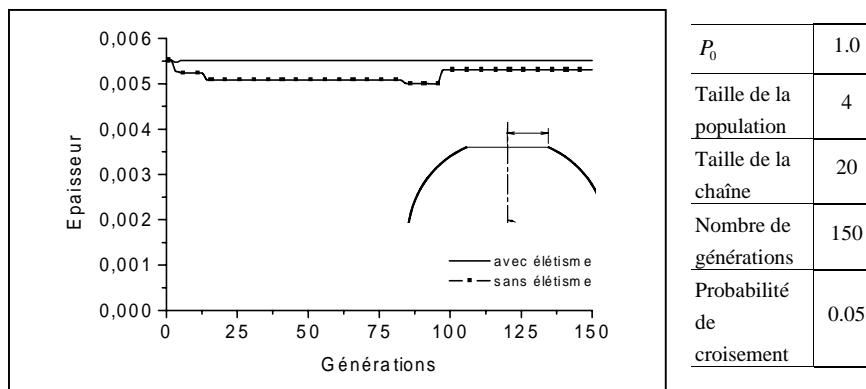


**Figure 16.** Influence de la probabilité de mutation

Ces oscillations sont dues probablement au type de codage choisi. En effet, deux éléments qui possèdent des chromosomes peu différents ne codent pas nécessairement deux éléments proches dans l'ensemble d'état. Ainsi les nombres

binaires 100000 et 000000 qui ne diffèrent qu'au niveau d'un seul bit codent respectivement deux nombres éloignés (0 et 32). Cela peut poser des problèmes lorsque la probabilité de mutation est importante. Un codage plus adapté donnera des résultats meilleurs.

La figure 17 montre que l'utilisation de la technique de l'élitisme améliore nettement le temps de calcul et la qualité de la solution obtenue.



**Figure 17.** Influence de l'utilisation de la technique de l'élitisme

## 11. Conclusion

Un algorithme de dimensionnement optimal des coques minces de révolution a été proposé. Il combine la théorie de l'analyse limite et les algorithmes génétiques. Le problème de dimensionnement est transformé en une série de problèmes d'analyse limite. L'utilisation de cette théorie permet d'obtenir des structures qui travaillent à leur limite de résistance. Pour résoudre le problème d'analyse limite, nous avons utilisé l'approche statique qui garantit la stabilité et la sécurité de la structure. La méthode statique de l'analyse limite impose que le champ de contraintes soit licite en tout point de la structure. L'utilisation d'un élément fini tronconique d'équilibre permet de respecter de manière rigoureuse cette condition. La méthode utilisée aboutit à un problème de programmation mathématique convexe qui a été résolu en utilisant une méthode déterministe qui s'avère efficace dans ce cas.

Le problème de dimensionnement optimal est basé sur l'utilisation d'un algorithme génétique. L'utilité de l'AG pour la résolution de ce problème réside dans le fait que l'on possède peu d'informations sur les contraintes technologiques et leurs dérivées, le risque de confondre un optimum local avec un optimum global est majeur. L'AG permet de contourner cette difficulté.

Pour le problème qui nous intéressait et avec les moyens de calcul dont nous disposons, nous avons pu constater qu'une population de 4 individus donne de bons résultats. Mais il faut être conscient que cette taille de population dépend de la puissance de calcul dont on dispose, des méthodes utilisées (sélection, opérateurs génétiques...), du nombre de variables considérées et de la fonction d'adaptation. Si la fonction à optimiser comporte peu d'optima locaux et un optimum global net, la population nécessaire sera plus petite que dans le cas d'une fonction comportant de nombreux optima locaux. Une probabilité de mutation de l'ordre de 0.08 et l'utilisation de la technique de l'élitisme donnent de meilleurs résultats.

## 12. Bibliographie

- Beasley D., Bull D.R., Martin R.R., "An Overview of Genetic Algorithms : Part 1, Fundamentals", *University Computing*, vol. 15, n° 2, 1993a, p. 58-59.
- Beasley D., Bull D.R., Martin R.R., "An Overview of Genetic Algorithms : Part 2, Research Topics", *University Computing*, vol. 15, n° 4, 1993b, p. 170-181.
- Bideq M., Analyse limite des coques minces axisymétriques de révolution par la méthode des éléments finis et la programmation mathématique, Thèse présentée en vue de l'obtention du Diplôme d'Etudes Supérieures es Sciences Physiques, Université Mohamed V, Faculté des Sciences de Rabat, n° 1656, 1998.
- Biron A., Chwala U. S., "Numerical method for limit analysis of rotationally symmetric shells", *Bull. Acad. Polon. Sci.* 18, 1970, p. 25-41.
- Bousshine L., Bideq M., Kouam M., Guerlement G., « Analyse limite des coques cylindriques à plusieurs tronçons par les méthodes cinématique et statique », *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 11, n° 1, 2002, p. 9-37.
- Chwala U. S., Biron A., Limit analysis of shells of revolution of arbitrary shape under pressure, Rapport N°1775, Lab. de Rech. et d'Essais de Matériaux, Ecole Polytechnique de Montréal, 1969.
- Corradi L., Maier G., "A matrix theory of elastic-locking structures", *Meccanica* 4, 1969.
- Ding Y. L., "Shape optimization of structures : a literature survey", *Compt. Struct.*, 24, 1986, p. 985-1004.
- Drucker D. C., Prager W., Greenberg H. H., "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media", *Q. Appl. Math* 9, 1952.
- Fiacco A. V., McCormick G. P., *Non-linear programming, sequential unconstrained minimization techniques*, Wiley, New-York, 1968.
- Flügge W., *Stress in shells*, Springer, Berlin, 1960.
- Freijs de Veubeke B., *Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method. Stress Analysis*, ed. Zienkiewicz, Wiley and Sons, 1965.

- Frey F., Analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique, Thèse de doctorat, Lab. de Mec. Mat. et Stat. des Const., Université de Liège, 1978.
- Groenwold A. A., Stander N., Snyman A., "A regional genetic algorithm for the discrete optimal design of truss structures", *I.J.N.M.E.*, vol. 44, 1999, p. 749-766.
- Guerlement G., Lamblin D. O., « Analyse limite des plaques circulaires avec la condition de plasticité de Von Mises », *Bull. tech. Suisse romande*, 98<sup>e</sup> année, n° 1, Lausanne, 1972.
- Haslinger J., Neittaanmäki P., *Finite element approximation for optimal shape design : theory and applications*, John Wiley, New York, 1988.
- Hodge Jr. P. G., *Limit analysis of rotationnally symmetric plates and shells*, Prentice Hall, New York, 1963.
- Holland J. H., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, The University of Michigan Press, 1976.
- Hu T. C., Shield R. T., "Uniqueness in the optimum design of structures", *J. Appl. Mech.*, 1961.
- Jenkins W.M., "Structural optimisation with the genetic algorithm. In the Structural Engineer", *Institution of Structural Engineers*, vol. 69 of 24, December 1991, p. 418-422.
- Jenkins W.M., "A space condensation heuristic for combinatorial optimization", edited by B.H.V. Topping & M. Papadrakakis, *Advances in structural optimization*, 1994, p. 215-224.
- Kalandas, Cyras A., "The finite element method in the analysis of problems of rigid-plastic cylindrical shells", *Lietuvog Mechanikos Rinkinys* 2, 1972.
- Lamblin D., Analyse et dimensionnement plastique de coût minimum de plaques circulaires, Thèse de Doctorat en sciences appliquées, Faculté Polytechnique de Mons, 1975.
- Lamblin D., Guerlement G., Cinquini C., "Variational formulation of the optimal plastic design of circular plates", *Comput. Math. Appl. Mech. Engn.* 11, 1977, p. 19-30.
- Lamblin D., Guerlement G., Cinquini C., "Application of linear programming to the optimal plastic design of circular plates subject to technological constraints", *Computer methods in Appl. Mech. and Eng.*, vol. 13, n° 2, 1978, p. 233-243.
- Leung M., Nevill G. E., "Genetic algorithms for preliminary 2-D structural design", *Proc. 35 th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Dyn. Mater. Conf.*, 1994, p. 2287-2291.
- Maxwell J. C., "On reciprocal figures, frames and diagrams of force", in *Scientific Papers*, vol. 2, University Press, Cambridge, 1890, p. 161-207.
- Michell A. G. M., "The limits of economy in frames-structures", *Philos. Mag.* 8, 1904, p. 589-597.
- Morelle P., Nguyen D. H., « Etude numérique de l'adaptation plastique des coques de révolution par les éléments finis d'équilibre », *J. Mec. Théorique et Appliquée*, vol. 2, n° 4, 1983.

- Mota C. A., Leal R. P., Chio K. K., "Boundary elements in shape optimal design of structural components", *In computer aided optimal design. Struct. & mech. syst.*, Springer, 1987, p. 605-631.
- Murtagh B. A., Saunders M. A., MINOS 5.1 Users Guide, Technical Report Sol 83-20R, Stanford University, 1987.
- Nguyen D. H., « Analyse limite rigide-plastique par une méthode quasi directe, Sciences et Techniques de l'Armement », *Mémorial de l'Artillerie Française*, 2nd facc, 1973.
- Nguyen D. H., "Direct limit analysis via rigid-plastic finite element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* », vol. 8, n° 1, 1976.
- Nguyen D. H., « Sur la plasticité et le calcul des états limites par éléments finis », *Collection des publications de la Faculté des Sciences Appliquées*, n° 98, Liège, Belgique, 1985.
- Nyssen C., Modélisation par éléments finis du comportement non linéaire de structures aérospatiales, Thèse de doctorat, Lab. Aéronautique, Université de Liège, 1979.
- Onat E. T., Prager W., "Limits of economy of materials in cylindrical shells", *De Ingenieur*, vol. 67, 1956, p. 46-49.
- Ostwald M., "Optimum weight design of sandwich cylindrical shells under combined loads", *Computers & structures*, vol. 37, n° 3, 1990, p. 247-257.
- Potts J. C., Giddens T. D., Yadav S. B., "The development and evaluation of an improved genetic algorithm based on migration and artificial election", *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, 24, 1994, p. 73-86.
- Rajeev S., Krishnamoorthy C.S., "Discrete optimization of structures using genetic algorithms", *In Journal of structural Engineering, Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, vol. 118 of 5, May 1992, p. 1233-1250.
- Renders J.M., *Algorithmes génétiques et réseaux de neurones*, Paris: Hermès, 1995.
- Saka M. P., "Optimum geometry design of roof trusses by optimality criteria method", *Comput. Struct.*, 38, 1991, p. 83-92.
- Save M. A., Massonnet Ch., *Calcul plastique des constructions*, vol. 2, 2<sup>e</sup> édition, Centre Belgo-Luxembourgeois d'Information de l'Acier, Bruxelles, 1972.
- Save M. A., "Some aspects of minimum-weight design", *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ Press, 1985.
- Shield R. T., "On the optimum design of shells", *J. Appl. Mech.*, 1960, p. 316-322.
- Srinivas M., Patnaik L. M., "Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms", *IEEE Trans. Systems Man Cybernet* 24, 1994, p. 656-666.
- Vanderplaats G. N., "Structural optimization-past, present and future", *AIAA J.*, 20, 1982, p. 992-1000.
- Wang Bo P., Chen Jahau L., "Application of genetic algorithm for the support location optimization of beams", *Computers & Structures*, volume 58 of 4, p. 797-800, 1996.