

---

# Méthodes des éléments finis espace-temps et remaillage

**Lucas Adélaïde – Franck Jourdan – Claude Bohatier**

*LMGC, Université de Montpellier II  
case 048, Place Eugène Bataillon  
F-34095 Montpellier  
jourdan@lmgc.univ-montp2.fr*

---

*RÉSUMÉ. L'objectif de cet article est double. Dans un premier temps, il s'agit de présenter les méthodes d'éléments finis espace-temps que nous avons développées et de les comparer aux méthodes existantes. Ensuite, une technique de remaillage développée dans le cadre de ces méthodes d'éléments finis espace-temps sera présentée. Cette nouvelle méthode de remaillage est basée sur une notion de "front espace-temps". Elle permet d'adapter le maillage à la fois dans l'espace et dans le temps tout en gardant, au plus, le même nombre de degrés de liberté que celui obtenu dans le cas des méthodes de remaillage classiques.*

*ABSTRACT. The aim of this paper is double. Firstly, a space-time finite element method is presented and compared with the other existing methods. Then, a mesh adaptation method developed for this space-time finite element approach, is presented. This new re-meshing method is based on a "space-time frontal" solver. It allows to adapt the mesh in space and time, keeping linear system sizes as small as in the "classical" mesh adaptation methods.*

*MOTS-CLÉS : remaillage, éléments finis, espace-temps, contact, frottement.*

*KEYWORDS: re-meshing, finite elements, space-time, contact, friction.*

---

## 1. Introduction

Le remaillage, au sens de la méthode des éléments finis “classique”, apparaît comme indispensable dans la plupart des problèmes de mécanique et notamment en mise en forme des matériaux. Dans ces procédés, les déformations sont telles qu’il devient absolument nécessaire de développer des méthodes de maillage adaptatif. L’essentiel des techniques de remaillage développées jusqu’à présent sont basées sur des approches incrémentales. Le remaillage s’effectue à des pas de temps donnés. On peut citer les méthodes ALE et maillages dynamiques, (Donea *et al.*, 2001), (Chenot *et al.*, 1998), (Farhat *et al.*, 2002), (Lesoinne *et al.* 1996) qui apportent une réponse à l’adaptation du maillage en grandes déformations dans l’espace à des temps fixés. La méthode proposée ici est compatible avec ces approches et apporte en plus, la possibilité d’une adaptation du maillage dans le temps. Dans cet article, nous proposons une approche non incrémentale basée sur une méthode d’éléments finis espace-temps. Le maillage est évolutif à la fois dans l’espace et dans le temps.

La Méthode des Eléments finis Espace-Temps (STFEM) se distingue des autres méthodes d’éléments finis classiques par une interpolation de même nature sur l’espace et sur le temps.

Dans les premiers articles parus tels que (Oden, 1969), un effort de généralisation de la méthode des éléments finis sur le domaine espace-temps est réalisée, sans que l’on puisse parler réellement de STFEM. De nouvelles idées émergent en ce qui concerne l’intégration en temps. Les variables temps et espace sont interpolées par des fonctions différentes et séparées. La première approximation complètement et clairement espace-temps est réalisée pour un exemple de vibrations structurelles par Kaczkowski et Langer, (Kaczkowski *et al.*, 1975), (Kaczkowski *et al.* 1980). Dès lors, il est possible d’avoir des variables temps et espace interpolées par des fonctions dépendantes à la fois du temps et de l’espace. Ainsi nous pouvons parler d’une méthode qu’on appellera la Méthode des Eléments Finis Espace-Temps. La STFEM n’est pas une méthode très répandue. Elle peut être considérée comme une extension de la méthode des éléments finis “classique”. La STFEM est une méthode d’éléments finis un peu particulière, dans le sens où elle s’applique à un problème aux limites issu d’un problème d’évolution. Actuellement plusieurs approches existent on peut citer : la méthode à grands incréments de temps (LATIN), la méthode de “Galerkin Discontinue”, et la nôtre que l’on nommera “méthode de Galerkin Semi-Discontinue”. Dans la plupart des publications sur la méthode de Galerkin Discontinue (Li *et al.* 1998), (Karaoçlan *et al.*, 1997), (Brokken *et al.* 1998), les fonctions d’interpolation sont considérées comme étant le produit de fonctions d’espace et de temps. Nous montrerons que dans ce cas, et pour certains maillages espace-temps, utiliser la méthode de Galerkin Semi-Discontinue revient tout simplement à appliquer un schéma d’intégration numérique de type Newmark.

Nous verrons dans cette étude qu’une attention particulière sera portée à la non séparation des variables espace et temps. La raison de ce choix n’est pas motivée par des questions de précisions de résultats, mais plutôt par ce qui constitue le fond de notre

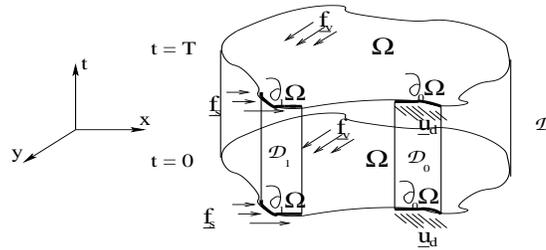
étude, à savoir le remaillage. Nous montrerons, en effet, que ce type d'interpolation est adapté au remaillage. Le remaillage espace-temps est basé sur la construction de maillages espace-temps non structurés.

Dans la plupart des articles sur la STFEM, écrits par C. Bajer et C. Bohatier, (Bajer, 1989), (Bajer *et al.*, 1995), des maillages structurés sont utilisés. Mais déjà, une notion de remaillage espace-temps est proposée, (Bajer *et al.*, 1993). Nous en présenterons dans cet article une généralisation.

Ce remaillage sera appliqué à différents problèmes mécaniques et notamment de contact avec frottement. Lors de problèmes de contact, il est nécessaire d'avoir un maillage fin autour de la zone de contact. Le plus souvent, cette zone de contact est évolutive. Ainsi pour gagner du temps de calcul, il apparaît nécessaire de construire un maillage évolutif qui suivrait la zone de contact.

**2. Méthode des éléments finis espace-temps**

Dans ce paragraphe, la formulation variationnelle du problème mécanique est présentée sous deux formes différentes. Dans la première, l'inconnue principale est le déplacement alors que dans la seconde, c'est la vitesse. Nous parlerons d'approche en déplacements et d'approche en vitesses. Pour chacune des approches, une discrétisation par éléments finis espace-temps est proposée.



**Figure 1.** Exemple d'un domaine espace-temps en 2D

Nous considérons le mouvement d'un corps élastique dans les hypothèses des petites perturbations (figure 1). Soit  $\Omega$  le domaine occupé par ce corps. Le corps est soumis à une densité volumique  $\underline{f}_v$ , à une densité surfacique  $\underline{f}_s$  sur  $\partial_1\Omega$  et à un déplacement  $\underline{u}_d$  sur  $\partial_0\Omega$ . Sur un intervalle de temps  $[0, T]$ , notons que  $\mathcal{D}$  est égale à  $\Omega \times ]0, T[$ ,  $\mathcal{D}_0$  à  $\partial_0\Omega \times ]0, T[$  et  $\mathcal{D}_1$  à  $\partial_1\Omega \times ]0, T[$ . Le problème dynamique local à résoudre est le suivant : trouver le déplacement  $\underline{u}$  et le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\underline{\sigma}(x, t)) + \underline{f}_v(x, t) = \rho \ddot{\underline{u}}(x, t) & \forall (x, t) \in \mathcal{D} \\ \underline{\sigma}(x, t) \underline{n}(x, t) = \underline{f}_s(x, t) & \forall (x, t) \in \mathcal{D}_1 \\ \underline{u}(x, t) = \underline{u}_d(x, t) & \forall (x, t) \in \mathcal{D}_0 \\ \underline{u}(x, 0) = \underline{u}_0(x) & \forall (x, t) \in \Omega \\ \dot{\underline{u}}(x, 0) = \underline{v}_0(x) & \forall (x, t) \in \Omega \\ \underline{\sigma}(x, t) = \underline{a} \underline{\varepsilon}(x, t) & \forall (x, t) \in \mathcal{D} \end{array} \right. \quad [1]$$

L'objectif de cette étude étant d'appliquer une méthode d'éléments finis, le problème d'évolution est à considérer comme un problème aux limites sur le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ . Dans ce problème aux limites, la condition sur la vitesse initiale (à  $t = 0$ ) et une éventuelle condition sur la vitesse finale (à  $t = T$ ), par exemple si le système est arrêté brutalement, sont considérées comme des conditions aux limites. Ces conditions peuvent mener à des discontinuités de vitesse où du point de vue dual à des impulsions. De la même manière que dans la méthode de Galerkin discontinue (Hughes *et al.*, 1988), (Karaoglan *et al.*, 1997) et que dans la méthode à grands incréments de temps (LATIN) (Boisser *et al.*, 1990), (Jourdan *et al.*, 2000), la formulation variationnelle est établie sur le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ .

### 2.1. Approche en déplacements

Dans cette approche, l'inconnue principale est le déplacement. La formulation variationnelle en déplacements peut s'écrire :

Trouver le déplacement  $\underline{u} \in U_{ad}$  tel que :

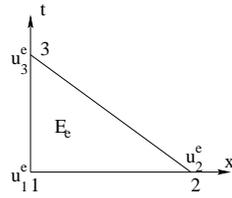
$$\int_0^T \int_{\Omega} (\rho \ddot{\underline{u}} \underline{u}^* + \underline{a} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) - \underline{f}_v \underline{u}^*) dx dt = \int_0^T \int_{\partial_1 \Omega} \underline{f}_s \underline{u}^* ds dt, \quad [2]$$

$$\forall \underline{u}^* \in U_{ad}^0$$

Afin de tenir compte, dans la formulation variationnelle, de la condition sur la vitesse initiale, le travail virtuel des quantités d'accélération est intégré par parties par rapport au temps. Ce qui donne,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho \ddot{\underline{u}} \underline{u}^* dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \rho \dot{\underline{u}} \dot{\underline{u}}^* dx dt + \int_{\Omega} [\rho \underline{v}_T(x) \underline{u}^*(x, T) - \rho \underline{v}_0(x) \underline{u}^*(x, 0)] dx \quad [3]$$

L'approximation proposée dans cette étude est de type Galerkin en temps et en espace. L'interpolation espace-temps est construite à partir de polynômes de Lagrange. Les éléments finis sont isoparamétriques. Sur un élément fini espace-temps  $E_{\xi}$  (figure 2), le déplacement vérifie :



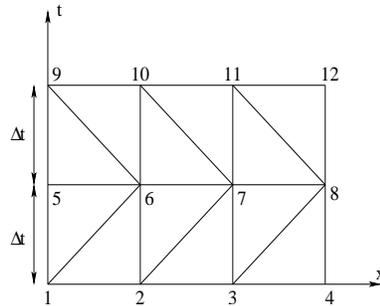
**Figure 2.** *Elément fini de référence en 2D espace-temps de type simplex*

$$\underline{u}(x, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i^e(x, t) u_i^e \tag{4}$$

où  $N$  est le nombre de nœuds de l'élément  $E_e$ ,  $\varphi_i^e$  sont les fonctions d'interpolation et  $u_i^e$  les déplacements nodaux. La même interpolation est utilisée pour les déplacements virtuels  $\underline{u}^*$ , ce qui constitue une variante par rapport aux approches développées par Bajer et Bohatier (Bajer *et al.*, 1993), (Bajer *et al.*, 1995). La discrétisation espace-temps de la précédente formulation variationnelle mène au système linéaire suivant :

$$([\widetilde{M}_u] + [\widetilde{K}_u])\{U\} = \{F_u\} + \{\Lambda\} \tag{5}$$

où  $[\widetilde{M}_u]$  est la matrice relative aux efforts d'inertie,  $[\widetilde{K}_u]$  la matrice relative aux efforts intérieurs,  $\{F_u\}$  le vecteur nodal relatif aux efforts extérieurs,  $\{\Lambda\}$  le vecteur nodal relatif aux conditions aux limites en vitesses et  $\{U\}$  le vecteur nodal des déplacements. En annexe, est donné le détail des calculs des matrices élémentaires, sur un maillage 2D espace-temps.



**Figure 3.** *Exemple d'un maillage 2D espace-temps*

Considérons un maillage espace-temps construit par couches successives d'éléments dans le temps. On pourra parler de maillage "stratifié". Si de plus les numéros

des nœuds qui ont les mêmes coordonnées temporelles sont proches les uns des autres (figure 3), alors le membre de gauche du système [5], se met sous la forme :

$$([\widetilde{M}_u] + [\widetilde{K}_u])\{U\} = [T]\{U\} =$$

$$\begin{pmatrix} [T_{11}] & [T_{12}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [T_{21}] & [T_{22}] & [T_{23}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{32}] & [T_{33}] & [T_{34}] & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & [T_{n/n-1}] & [T_{n/n}] & [T_{n/n+1}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [T_{n+1/n}] & [T_{n+1/n+1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{U_0\} \\ \{U_1\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{U_n\} \end{pmatrix}$$

Par exemple, pour le maillage espace-temps de la figure 3, on a :

$$\{U_0\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \{U_1\} = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} \text{ et } \{U_2\} = \begin{pmatrix} u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$$

En utilisant ce type de numérotation, la matrice totale  $[T]$  et les sous-matrices  $[T_{ij}]$  sont de type bande.

REMARQUES. — Le fait de choisir une interpolation de Lagrange pour les déplacements implique que les déplacements sont continus mais que les vitesses sont discontinues. Par conséquent l'intégration par parties [3] n'est pas exacte, il faut plutôt utiliser la formulation de la méthode de Galerkin discontinue, ce qui revient à écrire la dérivée de la vitesse au sens des distributions. Dans la suite nous conserverons la formulation [3], sachant que l'erreur commise est du même ordre que dans le cas d'éléments finis en espace classiques. En effet, avec une interpolation de Lagrange, le déplacement est continu alors que la déformation est discontinue. De plus, on peut montrer, dans le cas d'une interpolation linéaire, que la méthode de Galerkin discontinue et celle développée dans cet article donnent les mêmes résultats.

— Utiliser un maillage stratifié tel que nous l'avons défini permet de ne pas assembler la matrice totale  $[T]$ , mais seulement les sous-matrices  $[T_{ij}]$ . Ceci réduit considérablement la taille des systèmes à résoudre. En fait, la taille de ces systèmes linéaires est exactement la même que celle obtenue dans le cas des approches couplant les méthodes incrémentales de type différences finies en temps à la méthode d'éléments finis en espace. Ces approches seront appelées dans la suite : méthodes FD-FE.

— Ensuite, il convient de préciser que le vecteur nodal relatif aux conditions aux limites en vitesses  $\{\Lambda\}$  est de la forme :

$$\{\Lambda\} = (\{\Lambda_0\}, 0, \dots, 0, \{\Lambda_n\})^T$$

et que  $\{\Lambda_0\}$  est donné à partir des conditions sur la vitesse initiale, alors que  $\{\Lambda_n\}$  est inconnu. Par conséquent, la résolution du système [5] est effectuée de la manière suivante : le premier système d'équations,

$$[T_{11}]\{U_0\} + [T_{12}]\{U_1\} = \{F_0\} + \{\Lambda_0\},$$

donne  $\{U_1\}$ , les systèmes d'équations,

$$[T_{i/i-1}]\{U_{i-2}\} + [T_{i/i}]\{U_{i-1}\} + [T_{i/i+1}]\{U_i\} = \{F_{i-1}\} \quad 2 \leq i \leq n,$$

donnent les déplacements  $\{U_i\}$  et le dernier système d'équations,

$$[T_{n+1/n}]\{U_{n-1}\} + [T_{n+1/n+1}]\{U_n\} = \{F_n\} + \{\Lambda_n\},$$

donne  $\{\Lambda_n\}$ .

— Notons enfi n que les matrices de résolution  $[T_{i/i+1}]$  sont généralement non symétriques, alors que la matrice totale  $[T]$  est symétrique. Ainsi, pour l'algorithme présenté ci-dessus, il faut utiliser un solveur non symétrique. Cela peut paraître pénalisant en termes de temps de calcul. Cependant, comme l'objectif est d'utiliser cette approche pour traiter des problèmes de contact avec frottement et que la résolution non linéaire que nous avons développée (Adélaïde, 2002) est de type Gauss Seidel non linéaire, ces non-symétries n'affectent pas les temps de calcul.

## 2.2. Approche en vitesses

Dans cette approche, l'inconnue principale est la vitesse. La formulation variationnelle en vitesses peut s'écrire :

Trouver la vitesse  $\underline{v} \in V_{ad}$  telle que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\rho \dot{\underline{v}}^* + \underline{a} \underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}^*) - \underline{f}_v \underline{v}^*) dx dt = \int_0^T \int_{\partial_1 \Omega} \underline{f}_s \underline{v}^* ds dt, \quad [6]$$

$$\forall \underline{v}^* \in V_{ad}^0$$

Comme pour l'approche en déplacements, on utilise une interpolation de Lagrange pour les vitesses réelles et les vitesses virtuelles. Ceci implique que les vitesses de déformations sont discontinues. Une des diffi cultés de cette approche en vitesses est le calcul de la déformation  $\varepsilon$ . En effet, en HPP,  $\varepsilon$  est de la forme :

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 + \int_0^t \varepsilon(v(x, \tau)) d\tau \quad [7]$$

Pour calculer la déformation, il faut donc intégrer la vitesse de déformation sur l'intervalle de temps  $[0, t]$  et si cet intervalle de temps traverse plusieurs éléments finis

espace-temps, c'est-à-dire plusieurs zones de discontinuité de vitesses de déformations, le calcul devient techniquement compliqué à gérer. Ce cas de figure se rencontre lorsque le maillage espace-temps est constitué de "simplex de type 1", c'est-à-dire d'éléments finis linéaires.

La seconde difficulté liée à cette approche en vitesses concerne la gestion du contact. La loi de contact que nous avons adoptée est celle de Signorini et sa variable naturelle associée est le déplacement. On retombe sur le même type de problème que pour le calcul de la déformation. Cependant, dans le paragraphe suivant nous proposons des éléments de réponse.

La discrétisation espace-temps de la formulation variationnelle en vitesses, mène au système linéaire suivant :

$$([\widetilde{M}_v] + [\widetilde{K}_v])\{V\} = \{F_v\} + \{E_0\} \quad [8]$$

En utilisant un maillage espace-temps stratifié et le même type de numérotation qu'au paragraphe précédent, on obtient, sur chaque couche temporelle  $[t_i, t_{i+1}]$ , le système linéaire suivant :

$$[S]\{V\} = \{F_v\} + \{E_0\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} [S_{i/i}] & [S_{i/i+1}] \\ [S_{i+1/i}] & [S_{i+1/i+1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{V_i\} \\ \{V_{i+1}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F_{v_i}\} + \{E_{0_i}\} \\ \{F_{v_{i+1}}\} + \{E_{0_{i+1}}\} \end{pmatrix}.$$

Contrairement à l'approche en déplacements, le premier système d'équations ne sert pas au calcul de  $\{V_{i+1}\}$ , car la vitesse virtuelle  $\{V_i^*\}$  au temps  $t_i$  est supposée nulle. C'est donc le deuxième système d'équations qui donne  $\{V_{i+1}\}$ . Ensuite, avec la relation [7], on calcule la déformation au temps  $t_{i+1}$ , qui devient la déformation initiale, permettant ainsi de calculer le nouveau vecteur  $\{E_0\}$  et ainsi de suite.

REMARQUES . — L'algorithme précédent apparaît comme un algorithme sur un pas de temps, alors que celui de l'approche en déplacements est un algorithme sur deux pas de temps. Toutefois, à cause du calcul de la déformation, on montre dans le paragraphe suivant qu'il s'agit aussi d'un algorithme sur deux pas de temps.

— Notons aussi que le fait d'utiliser des maillages espace-temps stratifiés revient à appliquer une méthode incrémentale. Ne serait-il pas tout simplement une approche de type FD-FE ? Un des objectifs du paragraphe suivant est de répondre à cette question.

### 3. Comparaisons avec les méthodes de type FD-FE

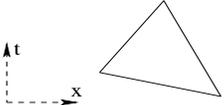
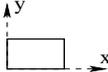
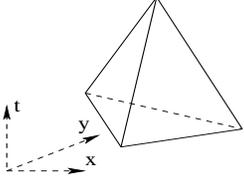
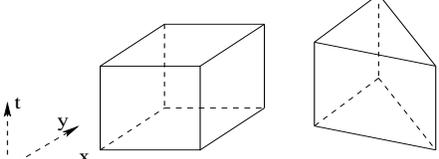
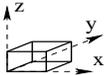
Les méthodes présentées dans le paragraphe précédent sont incrémentales dès que l'on utilise des maillages espace-temps stratifiés. La question est de savoir si elles ont un lien avec les méthodes incrémentales classiques de type FD-FE. Ces dernières sont

basées sur une séparation des variables espace et temps. Elles couplent la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale avec les méthodes de type différences finies pour la discrétisation temporelle.

Avant d’effectuer ces comparaisons et pour faciliter la présentation, proposons les terminologies suivantes :

- Nous appellerons “simplex de type  $n$ ”, un élément fini espace-temps admettant des fonctions d’interpolation polynomiale de degré  $n$ . Par exemple, un triangle à trois nœuds ou un tétraèdre à 4 nœuds sont des simplex de type 1 (figure 4).

- Nous appellerons “multiplex”, un élément fini espace-temps admettant des fonctions d’interpolation qui sont le produit d’une fonction du temps par une fonction de l’espace. Par exemple, un quadrangle à 4 nœuds ou un hexaèdre à 8 nœuds sont des multiplex (figure 4). Les éléments finis espace-temps 4D ne sont pas représentables.

Espace	Simplex	Multiplex
1D 		
2D 		
3D 	Non representable	Non representable

**Figure 4.** Exemples d’éléments finis espace-temps de type 1

- Nous appellerons maillage espace-temps “régulier”, un maillage stratifié dont le temps est constitué de strates identiques. Par exemple, les maillages des figures 5 et 6 sont des maillages espace-temps réguliers.

De plus, pour faciliter la lecture des résultats, rappelons l’algorithme d’intégration de Newmark. Il est défini comme suit :

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{U}_{i+1}\} + [K]\{U_{i+1}\} = 0 \\ \{\dot{U}_{i+1}\} = \{\dot{U}_i\} + \Delta t \left[ (1 - \delta) \{\ddot{U}_i\} + \delta \{\ddot{U}_{i+1}\} \right] \\ \{U_{i+1}\} = \{U_i\} + \Delta t \{\dot{U}_i\} + \Delta t^2 \left[ \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \{\ddot{U}_i\} + \theta \{\ddot{U}_{i+1}\} \right] \end{cases}$$

REMARQUE. — Selon l’approche utilisée, en déplacements ou en vitesses, la topologie du maillage peut avoir une influence sur les matrices élémentaires, par conséquent sur les matrices de résolutions. Quand l’approche utilisée est en vitesses, la topologie a une influence sur les calculs, ce qui n’est pas le cas en déplacements (voir annexe).

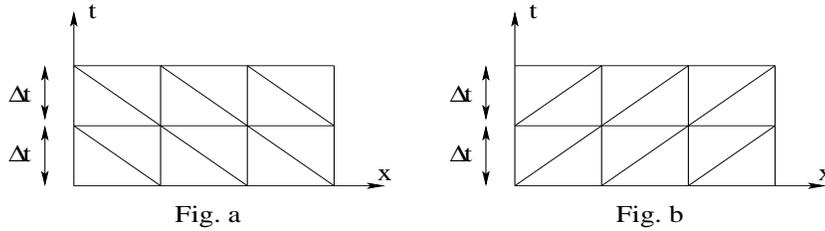


Figure 5. Maillages 2D espace-temps réguliers composés de simplex

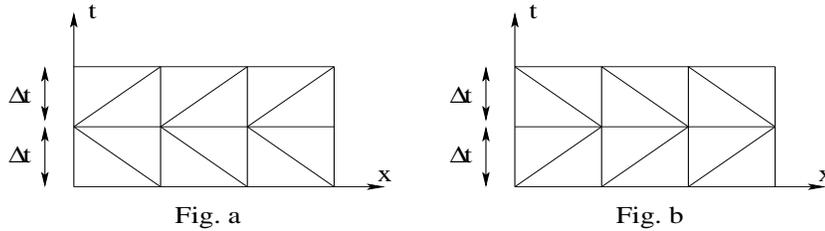


Figure 6. Maillages 2D espace-temps réguliers composés de simplex

### 3.1. Comparaisons pour l’approche en déplacements

En ce qui concerne l’approche en déplacements, on peut montrer qu’en utilisant un maillage espace-temps régulier, constitué de multiplex, l’algorithme présenté au paragraphe 2.1 est équivalente à une méthode FD-FE implicite de type Newmark avec  $\delta = \frac{1}{2}$  et  $\theta = \frac{1}{6}$ . Il s’agit de la méthode d’accélération linéaire. Ceci est vérifié quelle que soit la dimension du problème. Notons que ce schéma d’intégration est stable sous condition sur le pas de temps, (Dautray *et al.*, 1988).

Par contre, avec des éléments finis de type simplex, le résultat des comparaisons est moins intuitif. En effet, en 2D espace-temps  $(x, t)$ , pour un maillage régulier tel

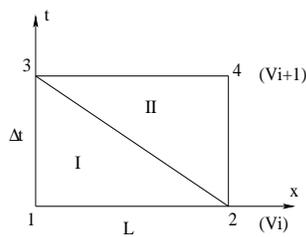
que ceux des figures 5 et 6, la STFEM devient une méthode explicite de Newmark avec  $\delta = \frac{1}{2}$  et  $\theta = 0$ . Il s'agit de la méthode des différences finies centrales avec matrice de masse diagonale. Si l'on augmente la dimension du problème, on ne retrouve pas d'équivalence avec les méthodes FD-FE. On constate tout de même que l'algorithme n'est pas totalement explicite. En effet, il existe des termes de la matrice  $[K_u]$  relative à la rigidité dans les matrices de résolution  $[T_{i/i+1}]$ . Néanmoins, les résultats numériques tendent à montrer que le pas de temps  $\Delta t$  doit être suffisamment petit pour assurer la stabilité de l'algorithme.

**3.2. Comparaisons pour l'approche en vitesses**

De la même manière, on peut montrer qu'en utilisant un maillage espace-temps régulier, constitué de multiplex, l'algorithme présenté au paragraphe 2.2 n'est autre qu'une méthode FD-FE implicite de type Newmark avec  $\delta = \frac{2}{3}$  et  $\theta = \frac{1}{4}$ . Ceci est vérifié quelle que soit la dimension du problème. Ce schéma d'intégration est stable sous condition sur le pas de temps.

En ce qui concerne les maillages constitués de simplex, contrairement à l'approche en déplacements, en 2D espace-temps  $(x, t)$ , pour un maillage régulier tel que celui de la figure 5a, la STFEM devient une méthode implicite de Newmark avec  $\delta = \frac{7}{6}$  et  $\theta = \frac{2}{3}$ . Ce schéma d'intégration est inconditionnellement stable. Pour obtenir ce résultat, il faut que le calcul du déplacement et de la déformation soit effectué de la manière suivante :

On considère le problème d'une barre de longueur  $L$ , de section  $S$  et de module de Young  $E$ , encadrée en son extrémité gauche et libre en son extrémité droite. Pour fixer les idées, considérons le maillage espace-temps constitué de 2 simplex (figure 7). Le détail du calcul des matrices élémentaires I et II se trouve en annexe. Notons que ce maillage espace-temps est construit à partir d'un maillage espace constitué d'un seul élément à 2 nœuds. Le cas où le maillage espace-temps est constitué de plus d'un élément dans l'espace, se traite de la même manière.



**Figure 7.** Maillage 2D espace-temps élémentaire

Avec cette discrétisation, on obtient la matrice totale suivante :

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \rho L + \frac{1}{6} \frac{ES \Delta t^2}{L} & -\frac{1}{6} \frac{ES \Delta t^2}{L} & \frac{1}{6} \rho L & 0 \\ -\frac{1}{6} \frac{ES \Delta t^2}{L} - \frac{1}{6} \rho L & -\frac{1}{6} \rho L + \frac{1}{6} \frac{ES \Delta t^2}{L} & \frac{1}{6} \rho L & \frac{1}{6} \rho L \\ -\frac{1}{6} \rho L & -\frac{1}{6} \rho L & \frac{1}{6} \rho L + \frac{1}{3} \frac{ES \Delta t^2}{L} & \frac{1}{6} \rho L - \frac{1}{3} \frac{ES \Delta t^2}{L} \\ 0 & -\frac{1}{6} \rho L & -\frac{1}{3} \frac{ES \Delta t^2}{L} & \frac{1}{6} \rho L + \frac{1}{3} \frac{ES \Delta t^2}{L} \end{bmatrix}$$

et le second membre

$$\left[ \frac{1}{2} ES \Delta t \varepsilon_i, -\frac{1}{2} ES \Delta t \varepsilon_i, \frac{1}{2} ES \Delta t \varepsilon_i, -\frac{1}{2} ES \Delta t \varepsilon_i \right]^T$$

Sachant que les vitesses des nœuds 1 et 3 sont nulles, du système linéaire [8], on obtient l'équation suivante à résoudre :

$$-\frac{\rho L}{6} V_i + \left( \frac{\rho L}{6} + \frac{ES h^2}{3L} \right) V_{i+1} = -\frac{ES h}{2} \varepsilon_i \tag{9}$$

où  $V_i$  est la vitesse du nœud 2 (vitesse de l'extrémité droite de la barre au temps  $t_i$ ),  $V_{i+1}$  est la vitesse du nœud 4 (vitesse de l'extrémité droite de la barre au temps  $t_{i+1}$ ) et  $\varepsilon_i$  est la déformation dans la barre au temps  $t_i$ . Cette équation donne  $V_{i+1}$  et pour calculer  $\varepsilon_{i+1}$ , on utilise la relation [7] avec la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}_{II}$  de l'élément II. Ce qui donne,

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\varepsilon}_{II} d\tau = \varepsilon_i + \frac{h V_{i+1}}{L}.$$

Notons qu'il s'agit d'un choix de calcul pour la déformation. En procédant de la même manière pour le calcul du déplacement, on obtient les relations suivantes :

$$U_{i+1} = U_i + h V_{i+1}, \quad \varepsilon_i = \frac{U_i}{L}.$$

En posant  $\omega^2 = \frac{3ES}{\rho L^2}$ , l'équation [9] donne l'algorithme suivant :

$$\left(1 + \frac{2}{3} \omega^2 h^2\right) U_{i+1} = \left(2 - \frac{1}{3} \omega^2 h^2\right) U_i - U_{i-1}.$$

On peut montrer aisément qu'il s'agit du schéma de Newmark annoncé précédemment.

De plus, si l'on augmente la dimension du problème, on ne retrouve pas d'équivalence avec les méthodes FD-FE.

**3.3. Synthèse des résultats**

Les comparaisons présentées dans les deux précédents paragraphes sont résumées dans le tableau suivant :

	Approche en déplacements		Approche en vitesses	
Dimension	Simplex	Multiplex	Simplex	Multiplex
1D ( $t$ )	Accélération linéaire	Accélération linéaire	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$
2D ( $x, t$ )	Différences centrales	Accélération linéaire	Newmark $\delta = \frac{7}{6}, \theta = \frac{2}{3}$	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$
3D ( $x, y, t$ )	?	Accélération linéaire	?	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$
4D ( $x, y, z, t$ )	?	Accélération linéaire	?	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$

**Tableau 1.** Comparaisons entre la STFEM et les méthodes FD-FE

Au vu des résultats précédents (tableau 1), la STFEM peut apparaître comme une généralisation des méthodes FD-FE. Pour affirmer que la STFEM est une généralisation des méthodes FD-FE, il faut trouver, pour chaque schéma de différences finies, un maillage et une interpolation espace-temps donnant un algorithme équivalent.

Notons aussi que lorsque les maillages sont non réguliers, on ne retrouve pas les schémas de type FD-FE.

En ce qui concerne l'utilisation d'éléments finis plus riches, nous nous sommes limités à une comparaison numérique en 1D espace-temps (vibrations d'un oscillateur simple) utilisant une interpolation quadratique (figure 8). Dans ce cas, on constate (Adélaïde, 2001) que pour un même nombre de pas de temps, la STFEM donne des résultats numériques environ 10 fois plus précis que ceux obtenus par la méthode de l'accélération linéaire.

Enfin, on constate aussi qu'avec les multiplex, le schéma d'intégration est conservé quelle que soit la dimension du problème (tableau 1). Par contre, cette propriété n'est pas vérifiée par les simplex. Les résultats sont surprenants. En effet, pour l'approche en déplacements, on passe d'un schéma d'intégration implicite en 1D à un schéma d'intégration explicite en 2D. Pour l'approche en vitesses, on passe d'un schéma d'intégration implicite en 1D, conditionnellement stable à un schéma d'intégration implicite en 2D, inconditionnellement stable, (Dautray *et al.*, 1988). La raison essentielle de ces changements est que suivant la dimension du problème, les simplex ont des topologies différentes. En effet, sur une couche temporelle  $[t_i, t_{i+1}]$ , suivant la dimension du problème, on traverse une ou plusieurs zones de discontinuité (figure 9).

Par contre, avec les multiplex, sur une couche temporelle on traverse un seul multiplex, donc aucune zone de discontinuité (figure 9).

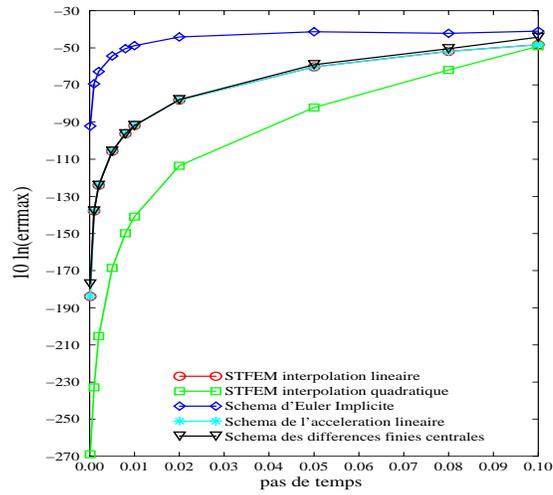


Figure 8. Erreur absolue maximum sur une période

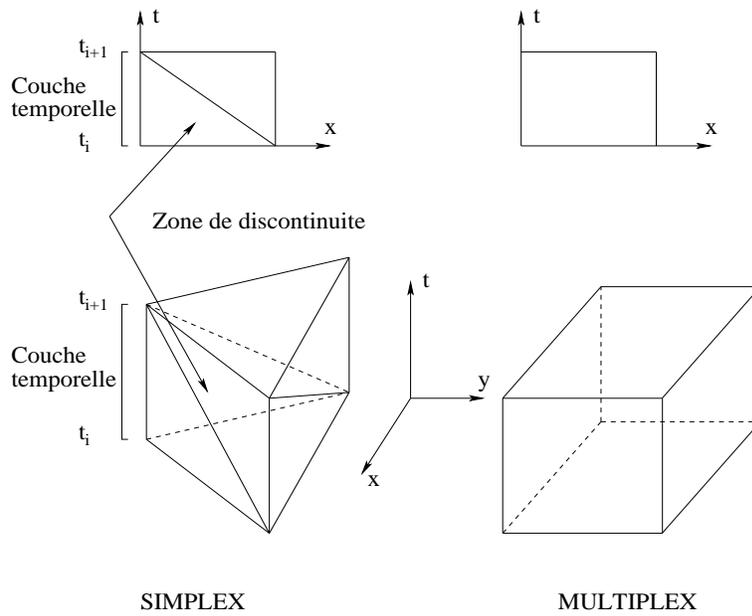


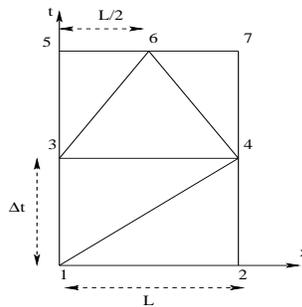
Figure 9. Zone de discontinuité

## 4. Remaillage

Dans ce paragraphe nous détaillons les techniques de remaillage espace-temps que nous avons développées. Dans la littérature, on trouve de nombreux articles sur le remaillage. Parmi ces papiers, un bon nombre parle de remaillage espace-temps. Ces derniers utilisent la méthode de Galerkin discontinue (Aubry *et al.*, 1999), (Li *et al.* 1998), (Feng *et al.*, 2000). Mais, dans la plupart, l'approche est incrémentale. C'est à dire que le remaillage s'effectue à des pas de temps donnés. Le plus souvent, les valeurs des inconnues du nouveau maillage sont obtenues par approximation ou interpolation de celles de l'ancien maillage, ce que nous appellerons reprojection. De plus, l'interpolation utilisée est de type multiplex. Dans la première partie de ce paragraphe, nous présentons une technique d'adaptation de maillage incrémentale en simplex, développée pour l'approche en déplacements. Cette technique ne nécessite pas de reprojections. Ensuite, nous proposerons une technique de remaillage non incrémentale, basée sur des maillages espace-temps non structurés.

### 4.1. Remaillage incrémental

Pour simplifier la présentation, la technique de remaillage est présentée sur un maillage espace-temps élémentaire. On considère les effets dynamiques d'une barre en traction-compression, discrétisée par un seul élément fini dans l'espace. Si l'on souhaite raffiner le maillage, en ajoutant un nœud dans l'espace, par exemple comme dans la figure 10,



**Figure 10.** Remaillage espace-temps élémentaire

le système linéaire [5] devient

$$\begin{pmatrix} [T_{11}] & [T_{12}] & 0 \\ [T_{21}] & [T_{22}] & [T_{23}] \\ 0 & [T_{32}] & [T_{33}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{U_0\} \\ \{U_1\} \\ \{U_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F_0\} + \{\Lambda_0\} \\ \{F_1\} \\ \{F_2\} + \{\Lambda_2\} \end{pmatrix} \quad [10]$$

où

$$\{U_0\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \{U_1\} = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \{U_2\} = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}$$

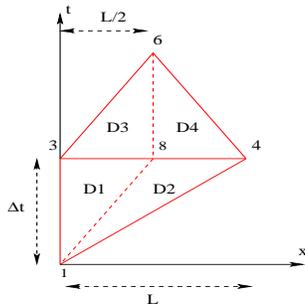
Le premier système d'équations :

$$[T_{11}]\{U_0\} + [T_{12}]\{U_1\} = \{F_0\} + \{\Lambda_0\}$$

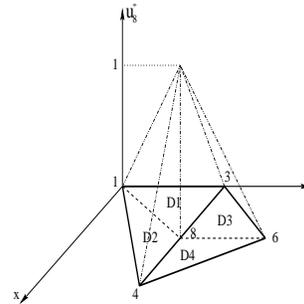
donne  $U_1$ . Le second système

$$[T_{21}]\{U_0\} + [T_{22}]\{U_1\} + [T_{23}]\{U_2\} = \{F_1\}$$

admet deux équations et trois inconnues  $u_5, u_6, u_7$ . Ainsi, il manque une équation pour déterminer  $\{U_2\}$ . Mais  $\{\Lambda_2\}$  est une inconnue et ses composantes apparaissent dans les trois dernières équations. Une façon de déterminer cette équation manquante, est d'utiliser la formulation variationnelle [2] avec une fonction virtuelle  $u_8^*$  associée au point supplémentaire 8 (figure 11). Cette fonction est choisie linéaire par morceaux sur les zones D1, D2, D3, D4 de la figure 11.



**Figure 11.** Support de la fonction virtuelle  $u_8^*$



**Figure 12.** Représentation de la fonction virtuelle  $u_8^*$

Cette fonction  $u_8^*$  vérifie :  $u_8^* = 1$  au point 8 et 0 aux nœuds 1, 3, 4, 6 (figure 12).

L'équation supplémentaire nécessaire pour calculer  $U_2$  est donnée par :

$$\sum_{i=1}^4 \left[ - \int \int_{D_i} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u_8^*}{\partial t} dx dt + \int \int_{D_i} ES \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u_8^*}{\partial x} dx dt \right] = 0$$

ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\{L_0\}^T \{U_0\} + \{L_1\}^T \{U_1\} + \{L_2\}^T \{U_2\} = 0$$

où  $\{L_0\}^T$ ,  $\{L_1\}^T$  sont des vecteurs de dimension 2 et  $\{L_2\}^T$  est un vecteur de dimension 3. Ce système d'équations supplémentaire donne  $\{U_2\}$ .

REMARQUES . — L'équation supplémentaire obtenue par la fonction virtuelle  $u_8^*$  permet de calculer l'accélération du nœud 6. Notons qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter une équation dans l'approche en vitesses.

— On peut aussi faire du remaillage sans ajouter de nœuds, seulement en les déplaçant. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de rajouter d'équations dans l'approche en déplacements, en élastodynamique. Par exemple, pour le maillage (figure 13), on raffine près du nœud 6, en déplaçant le nœud 5. Il y a alors autant d'équations que d'inconnues.

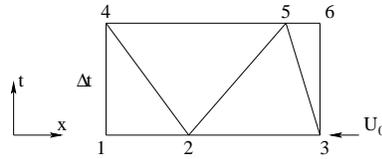


Figure 13. Un exemple de remaillage en déplaçant les nœuds

Intéressons nous maintenant au cas particulier du remaillage pour des applications 3D espace-temps avec contact et frottement. Pour simplifier la présentation, considérons le cas d'un seul nœud ajouté, par exemple le nœud numéro 12 de la figure 14. Dans ce cas, la fonction virtuelle  $u_{14}^*$ , permettant de calculer l'accélération du nœud 12, est linéaire par morceaux sur les zones D1, D2, D3, D4 définies sur la figure 14.

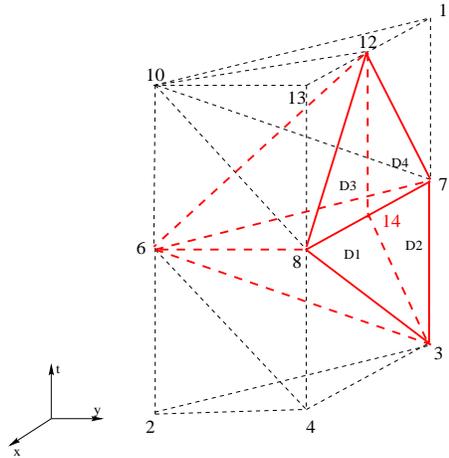


Figure 14. Support de la fonction virtuelle supplémentaire  $u_{14}^*$

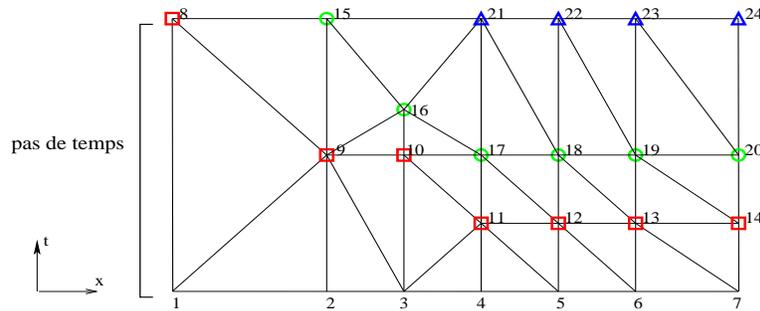
Pour ces problèmes avec contact et frottement, l'adaptation de maillage est activée par un estimateur d'erreurs basé sur les prédictions de pénétrations. Des exemples numériques illustrant notre technique de remaillage sont présentés au paragraphe 5.

#### 4.2. Remaillage non incrémental

L'objectif de ce paragraphe est de proposer une technique de calcul sur des maillages espace-temps non structurés et en particulier non stratifiés. Certaines équipes se sont déjà penchées sur ce problème. On peut citer les travaux de Hugues et Hulbert (Hughes *et al.*, 1988) et plus récemment ceux de Idesman *et al.* (Idesman *et al.* 2000). Ils utilisent la méthode de Galerkin discontinue. Dans les deux approches, le calcul s'effectue sur tout le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ . Ainsi, pour un domaine  $\Omega$  de dimension  $d$  et un nombre total  $N$  de nœuds du maillage espace-temps, la dimension du problème linéaire à résoudre est  $d \times N$ , ce qui devient vite grand lorsque  $d = 2$  ou  $d = 3$ . Une solution pour diminuer le temps de résolution est d'utiliser le calcul parallèle. C'est l'option choisie dans (Idesman *et al.* 2000).

Dans ce paragraphe nous proposons une solution non incrémentale, qui substitue à la notion de pas de temps, celle de "front espace-temps". L'idée est de réduire la taille du problème, par l'emploi d'une résolution frontale originale.

Pour fixer les idées, prenons  $d = 1$  et considérons le maillage non structuré figure 15.



**Figure 15.** Fronts espace-temps

Pour calculer les valeurs des nœuds du maillage, on procède par fronts espace-temps. Cela consiste à calculer les déplacements des nœuds à partir des déplacements des nœuds du front espace-temps précédent. Pour illustrer cette démarche, nous utilisons le maillage 2D espace-temps figure 15. Sur ce maillage, on peut distinguer trois fronts espace-temps. Le premier front espace-temps est constitué des nœuds (8,9,10,11,12,13,14). Leurs déplacements sont calculés à partir de ceux des nœuds de l'instant  $t = 0$ . Le deuxième front espace-temps est constitué des nœuds (15,16,17,18,19,20) et le troisième, des nœuds (21,22,23,24). Les déplacements des

nœuds du front  $k + 1$  sont calculés à partir de ceux du front espace-temps  $k$ , jusqu'à l'obtention de tous les déplacements à l'instant final.

L'avantage de cette approche est de diminuer la taille des systèmes linéaires à résoudre. Le premier système est de dimension 7, le second de dimension 6, etc. Par contre, dans une approche directe, telle que proposée dans (Hughes *et al.*, 1988), il faut résoudre un système de dimension 17. Évidemment, sur un exemple aussi petit, le gain de temps de calcul et de place mémoire n'est pas significatif, mais pour des applications plus compliquées (3D et 4D espace-temps) le gain est considérable.

Pour illustrer cette méthode de calcul, nous avons traité un problème de remaillage élémentaire sur le maillage espace-temps non structuré figure 16b.

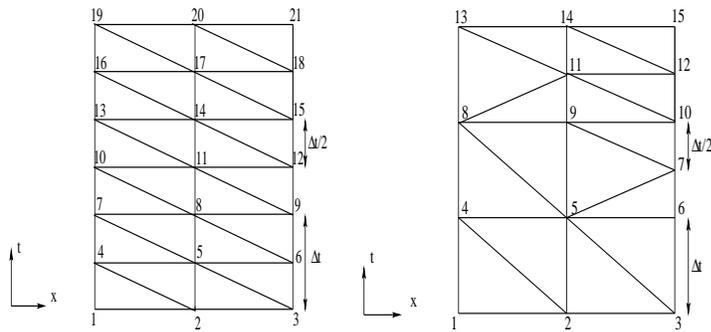


Fig a. Maillage espace-temps régulier et stratifié

Fig b. Maillage espace-temps non régulier et non stratifié

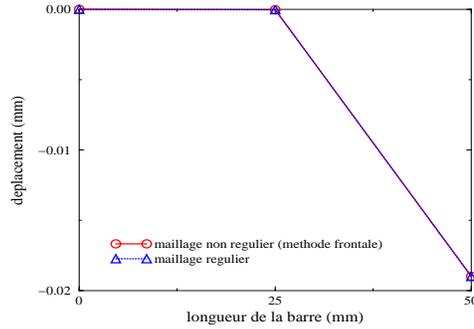
**Figure 16. Maillage espace-temps**

Les résultats numériques obtenus par cette méthode frontale, sur l'exemple du paragraphe 5.1, d'une barre en vibration, ont été comparés à ceux obtenus avec le maillage régulier plus fin, figure 16a.

La différence relative maximum entre les valeurs des déplacements pour les deux simulations (figure 16) est d'environ  $4 \cdot 10^{-3} \%$  (figure 17). Cet exemple tend à montrer que cette technique de remaillage frontale n'entraîne pas de perte de précision. L'exemple est cependant trop petit pour mettre en évidence le gain de temps de calcul. Faute d'automatisation de cette méthode frontale, nous ne pourrions pas aller plus loin dans nos investigations. Toutefois, l'approche apparaît très prometteuse.

**5. Simulations numériques**

Dans ce paragraphe sont rassemblés des exemples numériques concernant la technique de remaillage présentée au paragraphe précédent. Le premier exemple traite du remaillage dans le cas de propagation d'ondes dans une barre. Le second, traite du remaillage dans le cas du contact avec frottement. Les résultats numériques ont été

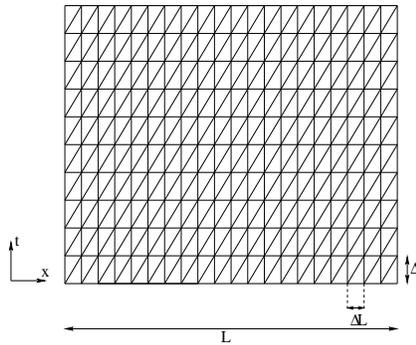


**Figure 17.** Déplacement des nœuds issus des maillages figure 16 à l’instant  $3\Delta t$

obtenus par le logiciel “EFET”, développé au Laboratoire de Mécanique et Génie Civil.

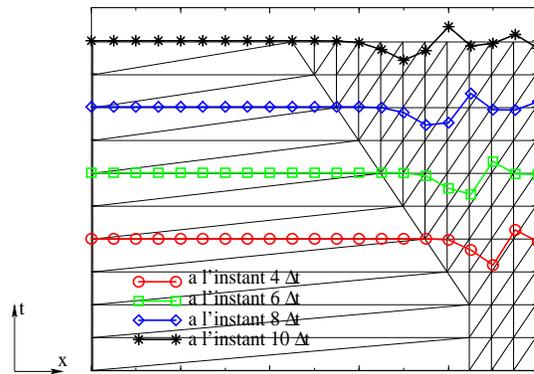
**5.1. Propagation d’ondes et remaillage**

On considère le problème d’une barre encastree en son extrémite gauche et admettant un déplacement imposé à  $t = 0$  en son extrémite droite. Son module de Young  $E$  est égale à  $210000 MPa$ , sa section  $S$  à  $3,14 mm^2$ , sa masse spécifique  $\rho$  à  $2,46 \cdot 10^{-5} Kg/mm$  et sa longueur  $L$  à  $100 mm$ . Le maillage espace-temps est constitué de simplex (figure 18 et 19).



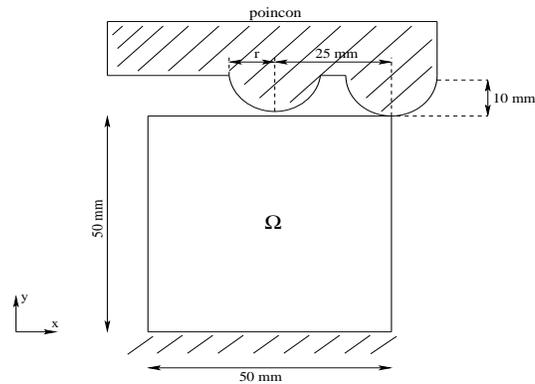
**Figure 18.** Maillage espace-temps régulier

L’idée de cette application est de construire un maillage espace-temps qui suivrait la propagation de l’onde élastique. Ce maillage non régulier est représenté figure 19.



**Figure 19.** Maillage espace-temps non régulier

Le pas de temps  $\Delta t$  est égale à  $1, 10^{-6}$  s. Les déplacements des nœuds à différents instants sont représentés figure 19. Ils donnent des informations sur la propagation de l'onde élastique. Notons que la vitesse de remaillage  $\Delta L/\Delta t$  est de  $5, 10^3 m.s^{-1}$  alors que la vitesse de propagation d'onde  $\sqrt{ES/\rho}$  est d'environ  $5, 1 10^3 m.s^{-1}$ . Cependant, le remaillage précède l'onde avec une confortable avance, ce qui lui permet d'atteindre l'extrémité gauche de la barre avant l'onde élastique. La différence relative maximum, obtenue entre les déplacements des nœuds du maillage régulier (figure 18) et de ceux du maillage non régulier (figure 19) est d'environ 0,5 %. Ainsi, pour un maillage contenant 2,5 fois moins de nœuds, la différence est négligeable.



**Figure 20.** Poinçonnage d'un lopin carré

## 5.2. Remaillage avec contact et frottement

L'objet de l'exemple numérique suivant est d'illustrer notre technique de remaillage sur un problème de contact frottant. On considère une structure carrée, en déformations planes, bloquée sur un de ses côtés et soumise à des conditions de contact, par un poinçon sur son côté opposé (voir figure 20). Les côtés sont de longueur  $L = 50 \text{ mm}$ . Le module de Young  $E$  est égale à  $210\,000 \text{ MPa}$ , sa masse volumique  $\rho$  à  $7,8 \cdot 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$  et le coefficient de frottement  $\mu$  à  $0,15$ .

Le pas de temps  $\Delta t$  est égale à  $5, \cdot 10^{-5} \text{ s}$ . L'ajout de nœuds sur la zone de contact est effectué par prédiction de pénétration du poinçon. Le remaillage est effectué à partir du maillage espace initial, grossier de la figure 21b. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par un maillage espace initial, plus fin (figure 21a), qui prévoit dès le départ la pénétration du poinçon.

La différence relative maximum en réaction de contact est de seulement  $0,1 \%$  (figure 22). Cet exemple numérique est élémentaire par rapport à ceux présentés dans le cadre de problèmes industriels (Coupez, 2000), (Lin *et al.*, 1998),.... Toutefois, on peut trouver des applications numériques plus complexes dans (Adélaïde, 2001) et (Adélaïde, 2002) ainsi que des compléments sur le traitement du contact frottant que nous avons développé.

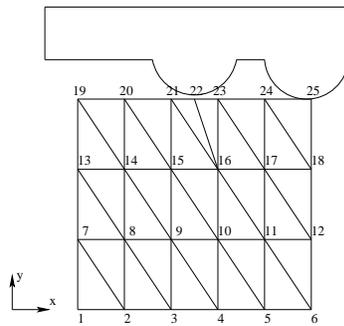


Fig a. Maillage fin

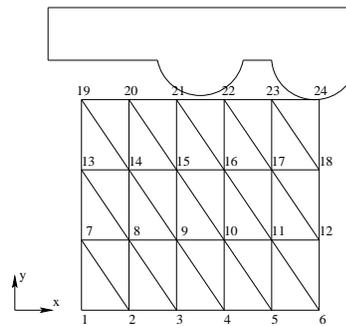
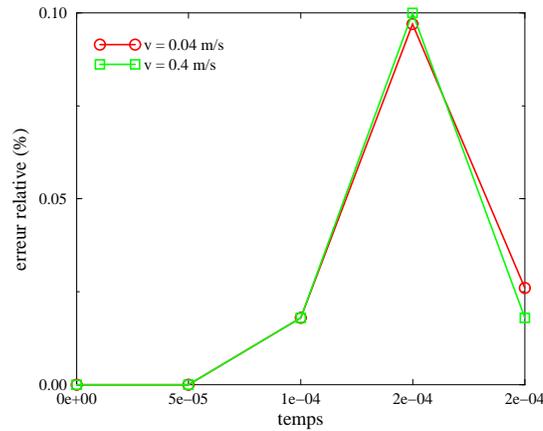


Fig b. Maillage grossier initial avant remaillage

**Figure 21.** Maillages espaces



**Figure 22.** Erreur relative sur la norme de la réaction avec un pas de temps  $\Delta t$  égale à  $5, 10^{-5}$  s et différentes vitesses de poinçon  $v$

## 6. Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une nouvelle méthode d'éléments finis espace-temps. Il s'agit d'une alternative à la méthode de Galerkin discontinue. Une attention particulière a été portée à la non-séparation des variables espace et temps. L'étude a montré qu'avec certaines discrétisations (maillages espace-temps réguliers), la ST-FEM apparaissait comme une méthode incrémentale de type Newmark.

Une technique de remaillage incrémentale a été développée et illustrée sur des exemples élémentaires d'élasto-dynamique et de contact avec frottement en HPP.

De plus, une technique "frontale" de remaillage, basée sur des maillages espace-temps non réguliers, permettant d'adapter le maillage à la fois dans l'espace et dans le temps, a été proposée. Elle permet de garder des dimensions des systèmes linéaires du même ordre de grandeur que dans le cas des approches incrémentales, permettant de gagner de la place mémoire et du temps de calcul. Cette technique apparaît très prometteuse.

Finalement, notons que nous ne sommes qu'au début d'une étude plus complexe. Des travaux d'automatisation de la méthode frontale et de généralisation aux grandes déformations élasto-plastiques sont actuellement en cours.

## 7. Bibliographie

ADÉLAÏDE L., Méthode des éléments finis espace-temps : adaptation du maillage en cours d'évolution avec contact, Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, 2001.

- ADÉLAÏDE L., JOURDAN F., BOHATIER C., « New results on mesh adaptation in Space-Time Finite Element Method », *ETCE 2002 conference Engineering Technology Conference on Energy, Structural dynamics and vibration, Experimental and analytical analysis*, 4-5 février, 2002, Houston, Référence STRUC-29042.
- AUBRY D., LUCAS D., TIE B., « Adaptive strategy for transient/ coupled problems Applications to thermoelasticity and elastodynamics », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 176, 1999, p. 41-50.
- BROKKEN D., AL., « Numerical modelling of the metal blanking process », *Materials Processing Technology*, vol. 83, 1998, p. 192-199.
- BAJER C., « Adaptive mesh in dynamic problem by the space-time approach », *Comput. And Struct.*, vol. 33, n° 2 1989, p. 319-325.
- BAJER C., BOHATIER C., « The soft way method and the velocity formulation », *Comput. And Struct.*, vol. 55, n° 6 1993, p. 1015-1025.
- BAJER C., BOHATIER C., « Kinematic approach to dynamic contact problems, the geometrical soft way method », *Eng. Transactions, Polish Scientific Publishers*, vol. 43, n° 1-2, 1995, p. 101-111.
- BOISSER P., AL., « A new approach in non linear mechanics : the Large Time INcrement method », *Int. J. for Num. Meth. Eng.*, vol. 29, 1990, p. 647-663.
- CHENOT J-L., BAY F., « An overview of numerical modelling techniques », *Journal of materials Processing Technology*, vol. 80-81, 1998, p. 8-15.
- COUPEZ T., « Génération et Adaptation de maillage par optimisation locale », *Revue Européenne des éléments finis*, vol. 9, n° 4, 2000, p. 403-423.
- DAUTRAY R., LIONS J-L., « Evolution : numérique, transport », *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, vol. 9, p. 921-922.
- DONEA R., HUERTA A., SARRATE J., « Arbitrary Lagrangian-Eulerian for fluid-rigid body interaction », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, 2001, p. 3171-3188.
- FARHAT C., DEGAND C., « A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes », *Computers and Structures*, vol. 80, 2002, p. 305-316.
- FENG Y. T., PERIC D., « A time-adaptive space-time finite element method for incompressible Lagrangian flows with free surfaces : computational issues », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, 2000, p. 499-518.
- HUGHES T. J. R., HULBERT G., « Space-time finite element methods for elastodynamics : formulations and error estimates », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 66, 1988, p. 339-363.
- IDESMAN A., NIEKAMP R., STEIN E., « Continuous and discontinuous Galerkin methods with finite elements in space and time for parallel computing of viscoelastic deformation », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, 2000, p. 1049-1063.
- JOURDAN F., BUSSY P., « Large time increment method in dynamic regularization : sheet cutting simulations », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, 2000, p. 1245-1259.
- KACZKOWSKI L., « The method of space time elements in dynamics of structures », *Journal of Technical Physics*, vol. 16, n° 1, 1975, p. 69-84.
- KACZKOWSKI L., LANGER J., « Synthesis of the space-time finite element method », *Arch. Inż. Lad.*, vol. 26, n° 1, 1980, p. 11-17.

KARAOGLAN L., K. NOOR A., « Space-time finite element methods for sensitivity analysis of contact/impact response of axisymmetric composite structures », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 144, 1997, p. 371-389.

LESOINNE M., FARHAT C., « Geometric conservation laws for fbw problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 134, 1996, p. 71-90.

LI X. D., WIBERG N.-E., « Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 156, 1998, p. 211-229.

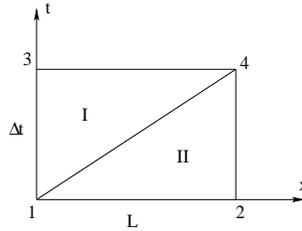
LIN J., BALL A.; A., ZHENG J. J., « Surface modelling and mesh generation for simulating superplastic forming », *J. of Material Processing Technology*, vol. 80-81, 1998, p. 613-619.

ODEN J.T., « A general theory of finite elements. I. Topological considerations, II. Applications », *Int.J. Num. Meth. Eng.*, 1969, p. 205-221, 247-259.

**Annexe**

**Calcul des matrices élémentaires par une approche en déplacements**

Considérons le maillage espace-temps (figure 23).



**Figure 23.** Maillage constitué de 2 simplex

Les fonctions d'interpolation sur l'élément *I* sont décrites de la sorte :

$$N_I(x, t) = [N_1(x, t), N_2(x, t), N_3(x, t)] = \left[ 1 - \frac{t}{\Delta t}, \frac{x}{L}, \frac{t}{\Delta t} - \frac{x}{L} \right]$$

A partir de ces fonctions d'interpolation, on décrit le champ des déplacements qui est :

$$u(x, t) = N_I U_I = [N_1, N_2, N_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_4 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Le champ des déplacements virtuels est donné par :

$$u^*(x, t) = N_I U_I^*$$

où  $U_I$  et  $U_I^*$  sont les vecteurs déplacements nodaux réels et virtuels sur l'élément  $I$ .

On pose :

$$\begin{aligned} M_I &= -\rho \int \int_{E_I} \left( \frac{\partial N_I}{\partial t} \right)^T \frac{\partial N_I}{\partial t} dx dt \\ &= -\rho \int \int_{E_I} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta t} \\ 0 \\ \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta t}, 0, \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} dx dt \\ &= -\rho \frac{L}{2h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_I &= ES \int \int_{E_I} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x} \right)^T \frac{\partial N_I}{\partial x} dx dt \\ &= ES \int \int_{E_I} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, \frac{1}{L}, -\frac{1}{L} \end{bmatrix} dx dt \\ &= \frac{ES\Delta t}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où  $M_I$  et  $K_I$  sont respectivement les matrices relatives aux termes d'inertie et aux efforts intérieurs sur l'élément  $I$ .

Les fonctions d'interpolation sur l'élément  $II$  sont :

$$N_{II}(x, t) = [N_1(x, t), N_2(x, t), N_3(x, t)] = \left[ 1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} - \frac{t}{\Delta t}, \frac{t}{\Delta t} \right]$$

Ainsi, on note :

$$M_{II} = -\rho \int \int_{E_{II}} \left( \frac{\partial N_{II}}{\partial t} \right)^T \frac{\partial N_{II}}{\partial t} dx dt$$

$$\begin{aligned}
 &= -\rho \int \int_{E_{II}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\Delta t} \\ \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, -\frac{1}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} dx dt, \\
 K_{II} &= ES \int \int_{E_{II}} \left( \frac{\partial N_{II}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial N_{II}}{\partial x} dx dt \\
 &= ES \int \int_{E_{II}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}, \frac{1}{L}, 0 \end{bmatrix} dx dt,
 \end{aligned}$$

Soient

$$M_{II} = -\rho \frac{L}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_{II} = \frac{ES\Delta t}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

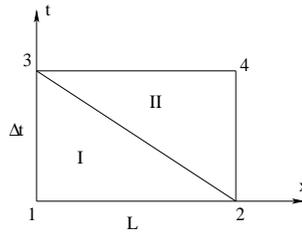
où  $M_{II}$  et  $K_{II}$  sont respectivement les matrices relatives aux termes d'inertie et aux efforts intérieurs sur l'élément  $II$ .

Après assemblage, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 M &= M_I + M_{II} = -\rho \frac{L}{2h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 K &= K_I + K_{II} = \frac{ES\Delta t}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 M + K &= \begin{bmatrix} -\rho \frac{L}{2h} + \frac{ES\Delta t}{2L} & -\frac{ES\Delta t}{2L} & \rho \frac{L}{2h} & 0 \\ -\frac{ES\Delta t}{2L} & -\rho \frac{L}{2h} + \frac{ES\Delta t}{2L} & 0 & \rho \frac{L}{2h} \\ \rho \frac{L}{2h} & 0 & -\rho \frac{L}{2h} + \frac{ES\Delta t}{2L} & -\frac{ES\Delta t}{2L} \\ 0 & \rho \frac{L}{2h} & -\frac{ES\Delta t}{2L} & -\rho \frac{L}{2h} + \frac{ES\Delta t}{2L} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dans le cas, où le maillage est choisi comme sur la figure 24, on obtient les matrices et les seconds membres élémentaires suivants :

$$M_I = -\rho \frac{L}{2h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_I = \frac{ES\Delta t}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



**Figure 24.** Maillage constitué de 2 simplex

où  $M_I$  et  $K_I$  sont respectivement les matrices relatives aux termes d'inertie et aux efforts intérieurs sur l'élément  $I$ .

$$M_{II} = -\rho \frac{L}{2h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } K_{II} = \frac{ES\Delta t}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

où  $M_{II}$  et  $K_{II}$  sont respectivement les matrices relatives aux termes d'inertie et aux efforts intérieurs sur l'élément  $II$ .

Après assemblage, nous obtenons :

$$M = M_I + M_{II} = -\rho \frac{L}{2h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = K_I + K_{II} = \frac{ES\Delta t}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M + K = \begin{bmatrix} -\rho \frac{L}{2h} + \frac{ES\Delta t}{2L} & -\frac{ES\Delta t}{2L} & \rho \frac{L}{2h} & 0 \\ -\frac{ES\Delta t}{2L} & -\rho \frac{L}{2h} + \frac{ES\Delta t}{2L} & 0 & \rho \frac{L}{2h} \\ \rho \frac{L}{2h} & 0 & -\rho \frac{L}{2h} + \frac{ES\Delta t}{2L} & -\frac{ES\Delta t}{2L} \\ 0 & \rho \frac{L}{2h} & -\frac{ES\Delta t}{2L} & -\rho \frac{L}{2h} + \frac{ES\Delta t}{2L} \end{bmatrix}$$

REMARQUE. — Quelle que soit la topologie, on obtient la même matrice totale. Par conséquent, les matrices  $[T_{ij}]$  sont les mêmes lorsque le maillage est régulier et stratifié.

**Calcul des matrices et des seconds membres élémentaires par une approche en vitesses**

Considérons le maillage espace-temps de la figure 23.

Sur l'élément I, le champ des vitesses vérifie :

$$v(x, t) = N_I V_I = [N_1, N_2, N_3] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Le champ des vitesses virtuelles est donné par :

$$v^*(x, t) = N_I V_I^*$$

où  $V_I$  et  $V_I^*$  sont les vecteurs vitesses nodales réelles et virtuelles sur l'élément I. On pose :

$$\begin{aligned} M_I &= \rho \int_0^L \int_{\frac{(\Delta t)x}{L}}^{\Delta t} (N_I)^T \frac{\partial N_I}{\partial t} dx dt \\ &= \rho \int_0^L \int_{\frac{(\Delta t)x}{L}}^{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 - \frac{t}{\Delta t} \\ \frac{x}{L} \\ \frac{t}{\Delta t} - \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta t}, 0, \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} dx dt \\ &= \rho \frac{L}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Sachant que la déformation vérifie  $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x} d\tau$ , on note

$$\begin{aligned} K_I &= ES \int_0^L \int_{\frac{(\Delta t)x}{L}}^{\Delta t} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x} \right)^T \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^t N_I dt \right] dx dt \\ &= ES \int_0^L \int_{\frac{(\Delta t)x}{L}}^{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, \frac{t}{L}, -\frac{t}{L} \end{bmatrix} dx dt \\ &= \frac{ES\Delta t^2}{3L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E_{0I} &= -ES \int_0^L \int_{\frac{(\Delta t)x}{L}}^{\Delta t} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x} \right)^T \varepsilon_0 dx dt \\
&= -ES \int_0^L \int_{\frac{(\Delta t)x}{L}}^{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \varepsilon_0 dx dt \\
&= -\frac{ES\Delta t}{2} \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

où  $M_I$  et  $K_I$  sont respectivement les matrices relatives aux termes d'inertie et aux efforts intérieurs et  $E_{0I}$  le vecteur second membre relatif aux « déformations initiales » pour l'élément  $I$ .

De la même façon, on obtient, pour l'élément II :

$$\begin{aligned}
M_{II} &= \rho \int_0^L \int_0^{\frac{(\Delta t)x}{L}} (N_{II})^T \frac{\partial N_{II}}{\partial t} dx dt \\
&= \rho \int_0^L \int_0^{\frac{(\Delta t)x}{L}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} - \frac{t}{\Delta t} \\ \frac{t}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\Delta t} \\ \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} dx dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{II} &= ES \int_0^L \int_0^{\frac{(\Delta t)x}{L}} \left( \frac{\partial N_{II}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^t N_{II} dt \right] dx dt \\
&= ES \int_0^L \int_0^{\frac{(\Delta t)x}{L}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{t}{L} \\ \frac{t}{L} \\ 0 \end{bmatrix} dx dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{0II} &= -ES \int_0^L \int_0^{\frac{(\Delta t)x}{L}} \left( \frac{\partial N_{II}}{\partial x} \right)^T \varepsilon_0 dx dt \\
&= -c^2 \int_0^L \int_0^{\frac{(\Delta t)x}{L}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_0 dx dt.
\end{aligned}$$

Soient

$$M_{II} = \rho \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_{II} = \frac{ES\Delta t^2}{6L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$E_{0II} = -\frac{ES\Delta t}{2}\varepsilon_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

où  $M_{II}$  et  $K_{II}$  sont respectivement les matrices relatives aux termes d'inertie et aux efforts intérieurs et  $E_{0II}$  est le vecteur second membre relatif aux déformations initiales pour l'élément  $II$ .

Après assemblage, nous obtenons :

$$M = M_I + M_{II} = \rho \frac{L}{6} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = K_I + K_{II} = \frac{ES\Delta t^2}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$E_0 = E_{0I} + E_{0II} = -\frac{ES\Delta t L}{2}\varepsilon_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{ES\Delta t L}{2}\varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$S = M + K = \begin{bmatrix} -\rho \frac{L}{6} + \frac{ES\Delta t^2}{6L} & -\rho \frac{L}{6} - \frac{ES\Delta t^2}{6L} & \rho \frac{L}{6} & \rho \frac{L}{6} \\ -\frac{ES\Delta t^2}{6L} & -\rho \frac{L}{6} + \frac{ES\Delta t^2}{6L} & 0 & \rho \frac{L}{6} \\ -\rho \frac{L}{6} & 0 & \rho \frac{L}{6} + \frac{ES\Delta t^2}{3L} & -\frac{ES\Delta t^2}{3L} \\ -\rho \frac{L}{6} & -\rho \frac{L}{6} & \rho \frac{L}{6} - \frac{ES\Delta t^2}{3L} & \rho \frac{L}{6} + \frac{ES\Delta t^2}{3L} \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant le maillage de la figure 24. Dans ce cas, on obtient les matrices et les seconds membres élémentaires suivants :

$$M_I = \rho \frac{L}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_I = \frac{ES\Delta t^2}{6L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{0I} = -\frac{ES\Delta t}{2}\varepsilon_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$M_{II} = \rho \frac{L}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{II} = \frac{ES\Delta t^2}{3L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{0II} = -\frac{ES\Delta tL}{2} \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Après assemblage, nous obtenons :

$$M = M_I + M_{II} = \rho \frac{L}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = K_I + K_{II} = \frac{ES\Delta t^2}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$E_0 = E_{0I} + E_{0II} = -\frac{ES\Delta tL}{2} \varepsilon_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{ES\Delta tL}{2} \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$S = M + K = \begin{bmatrix} -\rho \frac{L}{6} + \frac{ES\Delta t^2}{6L} & -\frac{ES\Delta t^2}{6L} & \rho \frac{L}{6} & 0 \\ -\rho \frac{L}{6} - \frac{ES\Delta t^2}{6L} & -\rho \frac{L}{6} + \frac{ES\Delta t^2}{6L} & \rho \frac{L}{6} & \rho \frac{L}{6} \\ -\rho \frac{L}{6} & -\rho \frac{L}{6} & \rho \frac{L}{6} + \frac{ES\Delta t^2}{3L} & \rho \frac{L}{6} - \frac{ES\Delta t^2}{3L} \\ 0 & -\rho \frac{L}{6} & -\frac{ES\Delta t^2}{3L} & \rho \frac{L}{6} + \frac{ES\Delta t^2}{3L} \end{bmatrix}$$

Contrairement à l'approche en déplacements, cette matrice totale  $S$  est différente de la précédente. Ce qui prouve que dans l'approche en vitesses, la topologie du maillage a une influence sur la matrice totale.