

---

# La résolution des équations de Navier-Stokes non hydrostatiques à surface libre

**Jean-Michel Hervouet**

*Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement  
Electricité de France  
6 Quai Watier, F-78401 Chatou cedex  
j-m.hervouet@edf.fr*

---

*RÉSUMÉ. On propose dans cet article une méthode pour résoudre les équations de Navier-Stokes à surface libre, sans hypothèse de pression hydrostatique, dans le cadre de la méthode des éléments finis. L'algorithme inclut une étape où l'hypothèse de pression hydrostatique est conservée. Les résultats montrent la robustesse de l'approche et prouvent que les équations de Navier-Stokes complètes apportent maintenant une solution plus avantageuse que des formes simplifiées telles que les équations de Boussinesq.*

*ABSTRACT. This paper deals with the numerical solution of 3-dimensional Navier-Stokes equations with a free surface, in the framework of finite elements. The hydrostatic assumption is not done but the algorithm is built as an extension of an already existing hydrostatic Navier-Stokes solver. The results prove the robustness of the approach and show that the full 3D free surface Navier-Stokes equations are now a viable option against simplified forms like Boussinesq equations.*

*MOTS-CLÉS: équations de Navier-Stokes, écoulements à surface libre, éléments finis.*

*KEYWORDS: Navier-Stokes equations, free surface flows, finite elements.*

---

## 1. Introduction

Le système hydro-informatique Telemac, fondé sur la méthode des éléments finis, est dédié aux écoulements à surface libre et aux écoulements souterrains, pour des applications liées aux impacts environnementaux en hydraulique et à la défense des ouvrages. Dans sa configuration actuelle, le système contient un ensemble de logiciels de simulation numérique capables de résoudre en particulier les équations de Saint-Venant et de Boussinesq (Telemac-2D), et les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles à surface libre (Telemac-3D). D'autres modules traitent les équations de Berkhoff pour la houle linéaire (Artémis), l'équation d'action d'onde de la houle pour la génération des vagues par les tempêtes (Tomawac), ainsi que la qualité de l'eau en dimensions 2 et 3 et les évolutions sédimentaires (Subief et Sisyphe), et l'équation de Richard en dimensions 2 et 3 pour l'hydrodynamique des écoulements souterrains.

Des progrès récents dans le traitement des équations de Navier-Stokes à surface libre complètes autorisent aujourd'hui la simulation numérique d'écoulements torrentiels, de ressauts hydrauliques, éventuellement en présence de bancs découvrants ou de zones sèches, comme le prouve la simulation de la rupture du barrage de Malpasset qui sera présentée en fin d'article.

## 2. Principe général de la méthode

L'élément fini utilisé dans Telemac-3D est le prisme avec interpolation linéaire. Les maillages sont construits à partir d'un maillage bidimensionnel de triangles qui est répété sur la verticale. Le nombre de ces maillages superposés est appelé nombre de plans. Le maillage du dessous suit la cote du fond et celui du dessus suit la surface libre. Le maillage évolue ainsi avec les mouvements de la surface libre et les coordonnées de ses points varient en temps. Pour remédier au problème de maillage mobile, une solution classique est de recourir à la transformée sigma, qui conduit sur la verticale à un maillage régulier compris entre les cotes 0 et 1. Cette transformée sigma est utilisée dans certaines étapes de l'algorithme de Telemac-3D, par exemple, lorsque les termes de convection sont traités avec la méthode des caractéristiques. Toutefois, les efforts de recherche actuels tendent à supprimer la transformée sigma en raison de ses effets numériques indésirables, par exemple, une diffusion artificielle entre les points d'un même plan du maillage.

Dans la version de base de Telemac-3D, on suppose que la pression est hydrostatique et l'on se ramène aux équations de Saint-Venant pour calculer les évolutions de la surface libre. Nous commençons par décrire l'algorithme de cette version de base, car elle sera aussi utilisée comme première étape pour l'option non hydrostatique.

Option hydrostatique :

On résout les équations suivantes :

Continuité :

$$\operatorname{div}(\vec{U}) = 0 \quad [1]$$

Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{U} \cdot \operatorname{grad}(U) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_h}{\partial x} + \operatorname{div}(v_t \operatorname{grad}(U)) + f_x \quad [2]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \vec{U} \cdot \operatorname{grad}(V) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_h}{\partial y} + \operatorname{div}(v_t \operatorname{grad}(V)) + f_y \quad [3]$$

où  $P_h$  est la pression hydrostatique,  $\rho_0$  est la masse volumique de référence,  $v_t$  la viscosité turbulente, et  $f_x$  et  $f_y$  représentent divers termes sources tels que la force de Coriolis.  $U$ ,  $V$ , et  $W$  sont les trois composantes du vecteur vitesse  $\vec{U}$ .

Avec l'hypothèse de pression hydrostatique, et en prenant en compte les variations de masse volumique dues à des effets de température ou de salinité, la pression s'écrit :

$$p_h = \rho g (Z_s - z) + \rho g \int_z^{Z_s} \frac{\Delta \rho}{\rho} dz \quad [4]$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $Z_s$  est la cote de la surface libre. Le second terme du membre de droite prend en compte les effets de flottabilité.  $\Delta \rho$  est  $\rho - \rho_0$ .

On utilise la méthode des pas fractionnaires, avec trois pas successifs : convection, diffusion, et une troisième étape regroupant le traitement de l'équation de continuité et le calcul de la surface libre. Nous allons voir que cette troisième étape se ramène formellement aux équations de Saint-Venant. En raison de l'hypothèse hydrostatique le terme de gradient de pression y apparaît sous la forme du gradient de la surface libre. Si  $U^{n+1}$  et  $V^{n+1}$  sont les composantes du champ de vitesse horizontale à la fin du pas de temps, et  $U_D$  et  $V_D$  les vitesses après l'étape de diffusion, il nous faut en effet résoudre :

$$\frac{U^{n+1} - U_D}{\Delta t} = -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{V^{n+1} - V_D}{\Delta t} = -g \frac{\partial Z_s}{\partial y} \quad [5]$$

Si l'on moyenne ces équations sur la verticale, il vient :

$$\frac{u^{n+1} - \overline{U}_D}{\Delta t} = -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{v^{n+1} - \overline{V}_D}{\Delta t} = -g \frac{\partial Z_s}{\partial y} \quad [6]$$

où  $u^{n+1}$  et  $v^{n+1}$  désignent les moyennes sur la verticale de  $U^{n+1}$  et  $V^{n+1}$ . La barre désigne l'opérateur de moyenne sur la verticale. Le système d'équations [6] peut être considéré comme une équation de quantité de mouvement de Saint-Venant, sans les termes de convection, de diffusion et de frottement. Par ailleurs l'équation de continuité de Saint-Venant est obtenue rigoureusement à partir de l'équation  $\text{div}(\vec{U}) = 0$  et de l'hypothèse d'imperméabilité du fond et de la surface libre. Elle peut donc être utilisée ici conjointement avec notre équation de quantité de mouvement, et fournira la nouvelle surface libre. On utilise pour ce faire l'algorithme de Telemac-2D (voir Hervouet et van Haren 1996). Une fois connues les vitesses moyennes sur la verticale, on retrouve facilement les vitesses tridimensionnelles car :

$$\frac{U^{n+1} - U_D}{\Delta t} = \frac{u^{n+1} - \overline{U}_D}{\Delta t} \quad \text{and} \quad \frac{V^{n+1} - V_D}{\Delta t} = \frac{v^{n+1} - \overline{V}_D}{\Delta t} \quad [7]$$

De par sa structure, notre maillage tridimensionnel comporte, pour chaque point du maillage de triangles, des verticales sur lesquelles il est facile de calculer une moyenne. Il reste finalement à calculer la vitesse verticale  $W$ . On utilise alors l'équation de continuité  $\text{div}(\vec{U}) = 0$ . Cette dernière étape est le point faible de l'option hydrostatique. En effet, les composantes horizontales de la vitesse ne sont ici pas changées et seule  $W$  est modifiée pour assurer la continuité. Toutes les erreurs et approximations des pas fractionnaires précédents vont donc se répercuter sur la vitesse verticale. Ce ne sera pas le cas avec l'option non hydrostatique que nous allons maintenant examiner.

### ***Option non hydrostatique***

L'idée de base est de décomposer la pression en pression hydrostatique  $P_h$  et pression dynamique notée  $\pi$  :  $P = P_h + \pi$ . Dans une première phase on réutilise en partie l'algorithme de l'option hydrostatique, avec les mêmes équations, mais en ajoutant maintenant une équation pour la vitesse verticale :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{U} \cdot \text{grad}(W) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \pi}{\partial z} + \text{div}(v, \text{grad}(W)) \quad [8]$$

Dans une seconde phase on prend en compte la pression dynamique pour assurer la continuité, c'est-à-dire un champ de vitesse à divergence nulle. Cette phase dite de projection est classique pour les équations de Navier-Stokes appliquées aux

écoulements internes. A partir de  $\vec{U}_D$  et  $\vec{V}_D$  obtenues comme dans l'option hydrostatique, nous résolvons maintenant :

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}_D}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}}(\pi) \quad [9]$$

et en tenant compte du fait que  $\text{div}(\vec{U}^{n+1}) = 0$ , il vient :

$$\text{div}(\vec{U}_D) = \text{div}\left(\frac{\Delta t}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}}(\pi)\right) \quad [10]$$

qui est une classique équation de Poisson. Une fois cette équation résolue pour trouver  $\pi$ , la vitesse finale est donnée par l'équation (9) et cette fois-ci les trois composantes supportent la contrainte de continuité.

Connaissant les vitesses tridimensionnelles finales, on peut alors à nouveau les moyenner sur la verticale et appliquer l'équation de continuité de Saint-Venant pour trouver la nouvelle surface libre. On remarque donc que la surface libre est actualisée deux fois par pas de temps, la première fois résultant du recours aux équations de Saint-Venant de la phase hydrostatique.

### 3. Résultats et applications

Nous présentons ci-après quatre applications montrant les performances et la robustesse de la méthode : une onde solitaire dans un canal, un écoulement sur un seuil, avec passage en régime torrentiel et ressaut hydraulique, le mélange de deux fluides de densités différentes, et la rupture du barrage de Malpasset.

#### 3.1. Onde solitaire

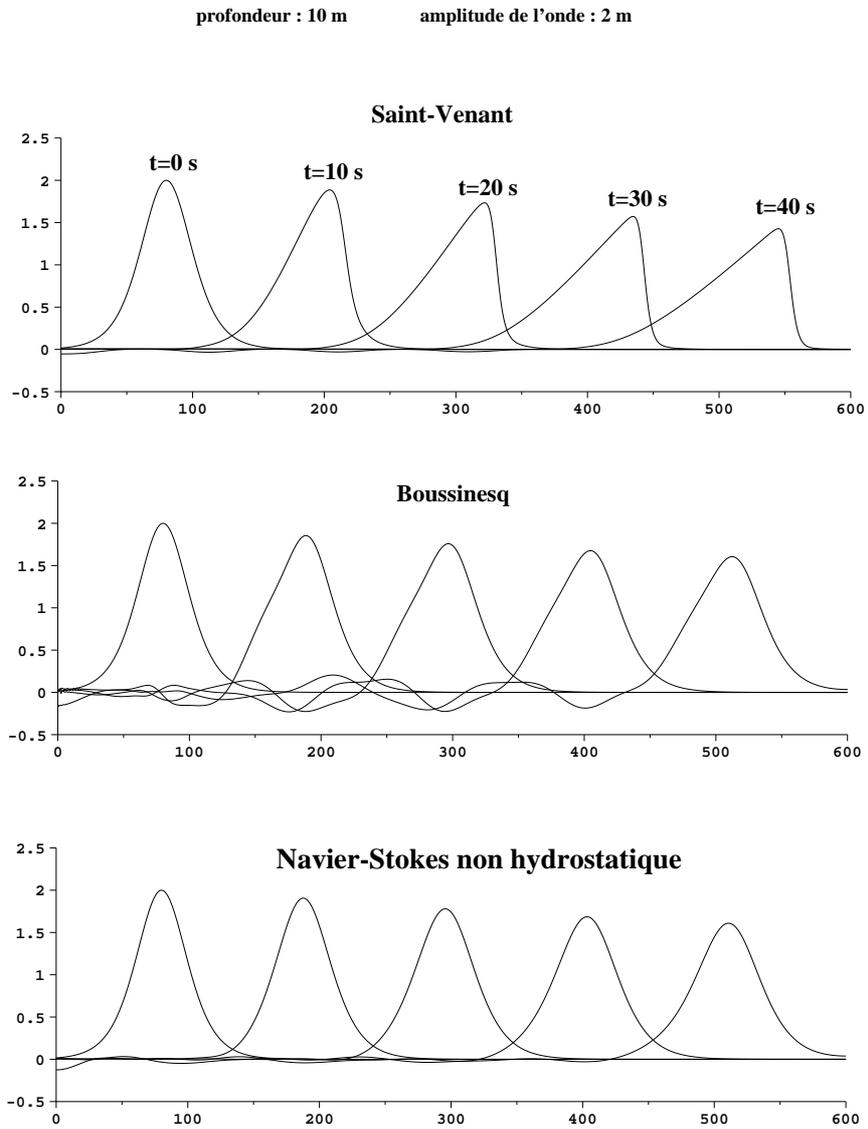
Ce cas va nous permettre une comparaison des équations de Navier-Stokes et des équations de Boussinesq. Il s'agit d'une onde solitaire qui se propage dans un canal de 600 m de long. Le fond du canal est plat. La profondeur est de 10 m et la hauteur de la vague est de 2 m. L'onde doit se propager à vitesse constante et sans déformation, deux critères faciles à vérifier. Nous avons choisi ici l'approximation au deuxième ordre donnée par Laitone (1960). Comme cette forme d'onde s'étend théoriquement de  $-\infty$  à  $+\infty$ , mais avec une décroissance rapide, elle est placée initialement dans le domaine de telle sorte que son maximum soit à 80 m de l'entrée. Dans le cas des ondes solitaires, l'hypothèse de pression hydrostatique n'est pas valable, et les équations de Saint-Venant aussi bien que les équations de Navier-Stokes hydrostatiques vont conduire à une déformation de l'onde qui tend vers le déferlement. La comparaison de Boussinesq et de Navier-Stokes est faite avec le même pas de temps de 0,1 s, sur une durée totale de 40 s. Les comportements sont comparables mais le sillage de l'onde est beaucoup plus régulier avec les équations

de Navier-Stokes. La figure 1 montre des coupes verticales dans l'axe longitudinal du canal, avec le profil de l'onde toutes les 10 secondes. Le maillage tridimensionnel pour Navier-Stokes ne comporte que trois plans sur la verticale, c'est-à-dire deux couches de prismes. La simulation est possible aussi avec une seule couche de prismes, avec toutefois une légère déformation de l'onde. Avec 3 plans le temps de calcul est de 40 % inférieur avec ce qui est nécessaire pour les équations de Boussinesq. Le tableau 1 indique le temps de calcul nécessaire pour différentes équations et différents nombres de plans sur la verticale. Ces temps ont été obtenus sur une station de travail HP C3700 (785 MHz). Le nombre de triangles du maillage bidimensionnel est de 7206. Le nombre de prismes dans le cas avec 11 plans est donc de 72060.

Equations	Temps de calcul
Equations de Saint-Venant (hypothèse hydrostatique inadaptée)	72 s
Boussinesq	589 s
Navier-Stokes 3D hydrostatique (11 plans) (hypothèse hydrostatique inadaptée)	382 s
3D non hydrostatique 11 plans	981 s
3D non hydrostatique 6 plans	483 s
3D non hydrostatique 3 plans	358 s
3D non hydrostatique 2 plans	249 s

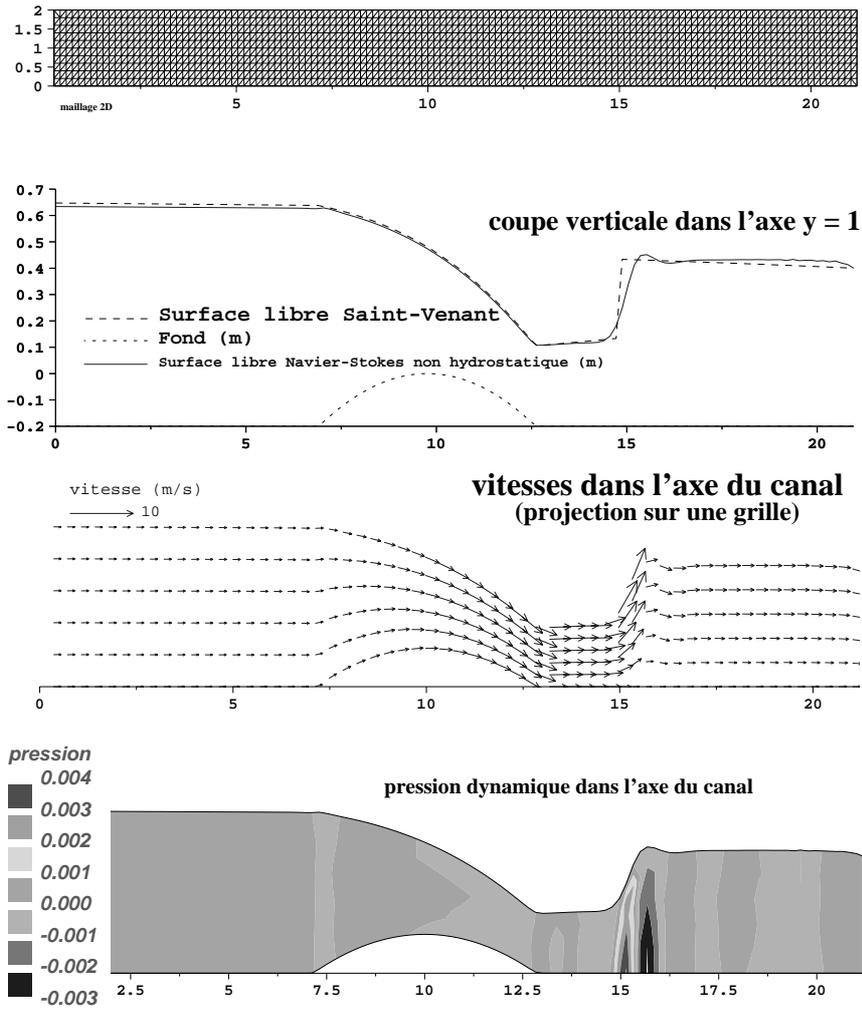
**Tableau 1.** Temps de calcul pour différentes équations et différents maillages

Les équations de Saint-Venant et de Navier-Stokes hydrostatiques sont données dans le tableau à titre indicatif mais sont bien sûr inappropriées ici en raison de leur hypothèse de pression hydrostatique. Il est frappant de constater le surcoût des équations de Boussinesq par rapport à Saint-Venant. Avec les termes supplémentaires de Boussinesq, les équations de Saint-Venant deviennent en effet beaucoup plus difficiles à résoudre si l'on emploie des méthodes itératives pour les systèmes linéaires, ce qui est le cas dans Telemac-2D. Les équations de Navier-Stokes sont plus avantageuses jusqu'à 6 plans. Une des étapes les plus consommatrices en temps avec Navier-Stokes est le calcul de la pression dynamique.



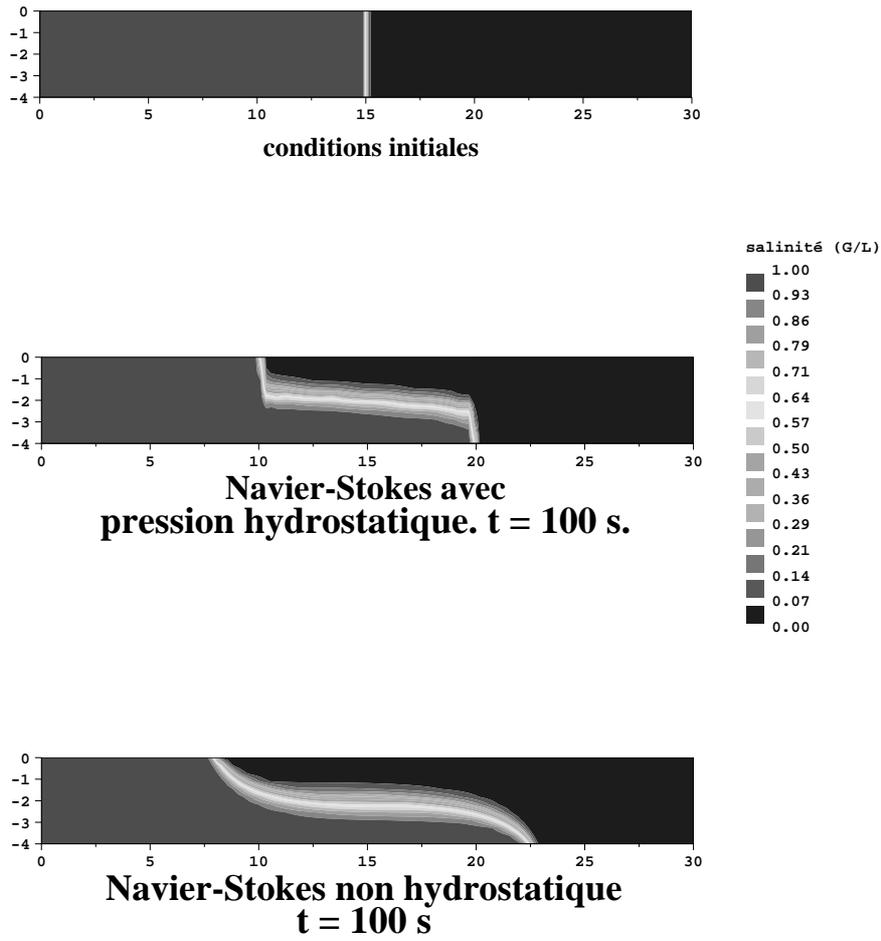
**Figure 1.** Onde solitaire dans un canal, à 5 intervalles de temps successifs. Comparaison des équations de Saint-Venant, Boussinesq et Navier-Stokes

### six plans sur la verticale



**Figure 2.** Solution des équations de Navier-Stokes non hydrostatiques pour l'écoulement sur un seuil avec un ressaut hydraulique

### Coupe verticale dans l'axe du canal



**Figure 3.** Mélange de deux fluides de densité différente. Comparaison des solutions des équations de Navier-Stokes avec et sans hypothèse hydrostatique

### **3.2. *Écoulement sur un seuil***

Ce test montre la capacité de l'algorithme à traiter des écoulements fluviaux et torrentiels, ainsi que des ressauts. Il s'agit en fait d'un cas-test unidimensionnel dans un canal de 21 m de long, avec un fond plat à la cote - 0,2 m, sauf entre les abscisses  $x = 7,12$  m et 12,88 m, où la cote du fond suit la courbe  $-0.0246875(x-10)^2$ . La largeur du canal est de 2 m et le débit de 2 m<sup>3</sup>/s. Une profondeur de 0,6 m est maintenue à l'aval. Un frottement sur le fond est imposé par la formule de Strickler, avec un coefficient de 40. La figure 2 montre des coupes verticales dans l'axe du canal. Le maillage est composé d'une superposition de 6 maillages bidimensionnels tels que celui du haut de la figure. On ne dispose pas d'une solution exacte dans ce cas et l'on compare simplement la surface libre avec la solution exacte des équations de Saint-Venant. On remarque à l'aval du ressaut une intumescence qui est bien observée dans la nature, et non prédite par la théorie de Saint-Venant. Le champ de vitesse et la pression dynamique sont donnés dans la moitié basse de la figure, et l'on constate qu'il y a bien des effets non hydrostatiques au niveau du ressaut.

### **3.3. *Mélange de deux fluides de densité différente***

Une bonne reproduction des phénomènes d'intrusion saline est une condition importante pour aborder les problèmes de dynamique estuarienne. On schématise ici la formation d'un coin salé en simulant le mélange de deux fluides de densité différente après l'ouverture d'une porte d'écluse. Dans ce cas l'hypothèse de pression hydrostatique conduit à une solution erronée. On se place dans un bassin rectangulaire avec des parois imperméables, au repos, avec une surface libre initiale horizontale. La moitié gauche du bassin est remplie avec un fluide « lourd » et la moitié droite avec un fluide « léger ». La différence de densité est créée par une petite différence de salinité : 1 g/l à gauche et 0 g/l à droite. Le fluide lourd va se propager vers la droite par le fond et le fluide léger vers la gauche par la surface. La figure 3 compare la solution hydrostatique (en haut) avec la solution non hydrostatique (en bas). La solution hydrostatique forme un front rectangulaire qui n'est pas observé dans les expériences ni dans la nature. La solution non hydrostatique est validée par de nombreuses expériences (voir par exemple Yih 1980). On sait en particulier que l'angle du coin salé avec le fond vaut approximativement  $\pi/3$ , ce qu'on retrouve bien sur la figure 3. L'excellent résultat de la forme non hydrostatique ouvre la voie à des études tridimensionnelles fines d'hydrodynamique estuarienne ou de panaches thermiques.

### **3.4. *Onde de rupture du barrage de Malpasset***

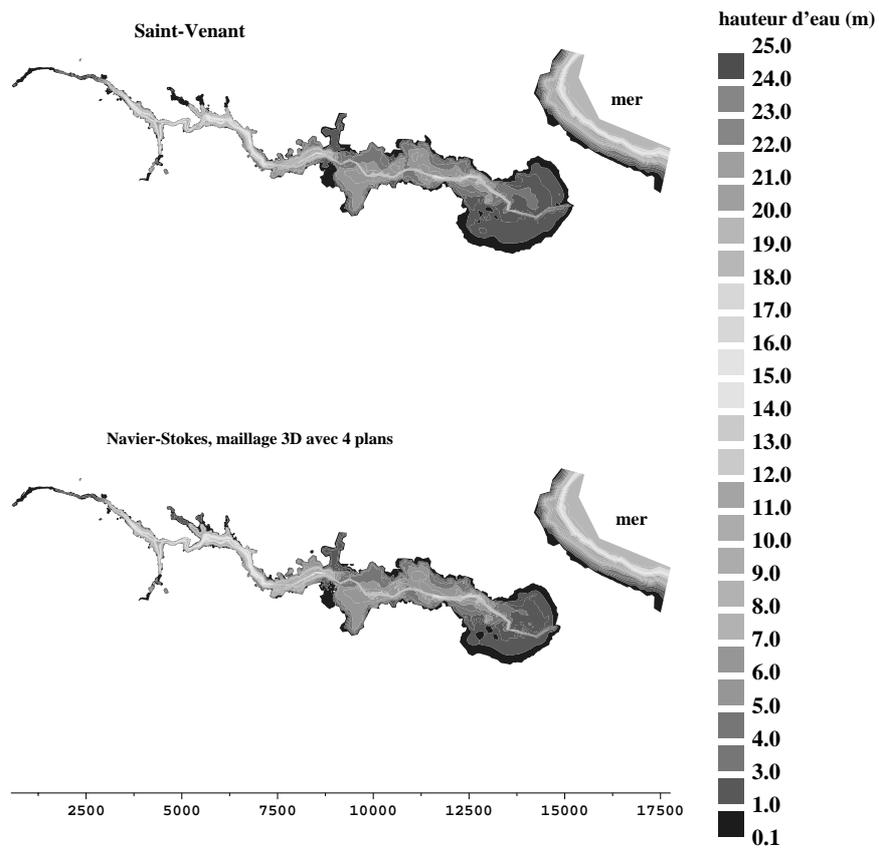
Rappelons que la catastrophe de Malpasset est un rare cas de rupture totale et instantanée d'un barrage. Elle s'est produite le 2 décembre 1959 et il y eut à déplorer environ 430 victimes. Le détail des circonstances de l'accident et la

simulation de cette onde de rupture en dimension 2 avec les équations de Saint-Venant et le code Telemac-2D a été détaillée dans la référence Hervouet (2000). En dimension 3, ce calcul a longtemps posé le problème des bancs découvrants. Récemment, les solutions développées pour Telemac-2D ont pu être appliquées à Telemac-3D, l'idée principale étant que les zones sèches sont incluses dans le calcul. La difficulté supplémentaire en dimension 3 est que dans le cas d'une hauteur nulle les éléments prismatiques dégénèrent et ont un volume nul. Il faut donc se préserver des divisions par zéro et des cas où les équations dégénèrent. Ainsi, les moyennes sur la verticale qui comportaient une division par la hauteur d'eau sont remplacées dans les zones sèches par une moyenne arithmétique entre tous les points d'une verticale. Le cas de Malpasset a pu être mené à bien, avec des équations non hydrostatiques, et des maillages tridimensionnels comportant 2, 3, 4, 5, 6 et 7 plans sur la verticale. Le maillage bidimensionnel comporte 26 000 éléments et la durée de la simulation est de 4 000 s avec des pas de temps de 0,5 s. La retenue est incluse dans le domaine de calcul et les conditions initiales et suppose à l'instant  $t = 0$  un décrochement de 55 m de la surface libre au niveau du barrage. La figure 4 compare le champ d'inondation 35 minutes après la rupture, avec 2, 3 et 4 plans sur la verticale. La solution de Saint-Venant est également donnée à titre de comparaison. On constate que dans ce cas les solutions hydrostatiques et non hydrostatiques sont assez proches, seul le cas avec deux plans étant différent des autres résultats.

#### 4. Conclusion

Un algorithme robuste pour la résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles à surface libre, sans hypothèse hydrostatique, ouvre la voie à tout un ensemble d'applications : houle, effets de flottabilité, écoulements transcritiques et ressauts, même en présence de zones sèches et de bancs couvrants et découvrants. Au moins dans le cadre des méthodes numériques employées dans le système Telemac, cet algorithme s'avère plus performant qu'une résolution des équations de Boussinesq, ces dernières étant de plus limitées par un domaine de validité restreint. Il apparaît donc maintenant plus judicieux de concentrer les efforts de recherche sur les équations de Navier-Stokes complètes, plutôt que de chercher à améliorer des formes simplifiées qui risquent à brève échéance d'être abandonnées. Les difficultés qui restent à surmonter pour les équations de Navier-Stokes concernent le traitement fin des stratifications, en particulier dans les lacs. L'abandon complet de la transformée sigma est sans doute un préalable à toute amélioration dans ce sens. Enfin, pour utiliser pleinement le potentiel de la méthode des éléments finis, il faudrait être capable d'employer des maillages totalement non structurés, y compris sur la verticale, ce qui suppose d'abandonner la construction des maillages par empilement de plans, en recourant par exemple aux tétraèdres. Toute la partie de l'algorithme qui s'appuie sur des moyennes sur la verticale serait alors à remettre en cause.

### Hauteur d'eau 35 mn après la rupture



**Figure 4.** Onde de rupture du barrage de Malpasset. Comparaison des solutions des équations de Saint-Venant et de Navier-Stokes non hydrostatiques

## 5. Bibliographie

- Hervouet J.-M., Van Haren L., "Recent advances in numerical methods for fluid flows", *Chapter 6 of Floodplain processes*, Editors Anderson, Walling & Bates, Wiley & sons 1996.
- Hervouet J.-M., Bates P., "Hydrological Processes", volume 14, issue n° 13, numéro spécial : the Telemac modelling system, 2000.
- Hervouet J.-M., "A high resolution 2D dam-break model using parallelization", *Hydrological processes*, volume 14, n° 13, September 2000.
- Jankowski Jacek A., A non-hydrostatic model for free surface flows, Institut für Strömungsmechanik und Elektron, Rechnen im Bauwesen der Universität Hannover, Bericht Nr.56/1998.
- Laitone E., "The second approximation to cnoidal and solitary waves", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 9, p. 430-444, 1960.
- Yih C.-S., Stratified flows, Academic press, London, New-York, 1980.