
La méthode numérique SPH appliquée à l'hydraulique

Une méthode lagrangienne aux applications variées

Damien Violeau* — **Réza Issa **,****

** Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement
EDF, 6, quai Watier
F-78400 Chatou
damien.violeau@edf.fr*

*** UMIST / Thermo-Fluids Division
Sackville St., G. Begg bldg
Manchester M60 1QD, UK
r.issa@postgrad.umist.ac.uk*

RÉSUMÉ. SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) est une méthode numérique entièrement lagrangienne, encore assez peu utilisée en hydraulique, quoique parfaitement adaptée à un grand nombre de phénomènes difficiles à traiter par d'autres méthodes plus classiques. Les fondements théoriques de SPH sont abordés dans ce document, puis quelques exemples sont présentés. Les récents développements effectués autour du thème de la modélisation des effets turbulents sont évoqués, illustrés par de nouveaux cas.

ABSTRACT. SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) Is a fully lagrangian numerical technique still unknown in fluid modelling despite its ability to predict many phenomena which cannot be treated with classical methods. SPH's theoretical aspects are briefly reviewed in this paper, and a few examples are shown. New developments on turbulence modelling are explored and validated with test cases.

MOTS-CLÉS : SPH, modélisation numérique, méthodes lagrangiennes, turbulence.

KEYWORDS: SPH, numerical modelling, lagrangian techniques, turbulence.

1. Introduction

La méthode SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) a été créée à la fin des années 1970 pour le traitement numérique de phénomènes astrophysiques, comme la formation des galaxies ou l'accrétion planétaire (Monaghan, 1992). Rapidement appliquée à la mécanique des fluides (Monaghan, 1994), elle a montré sa capacité à reproduire un grand nombre d'écoulements « exotiques », dont l'approche est difficile par des méthodes traditionnelles de type « éléments finis ».

La spécificité de la méthode SPH est due à son caractère entièrement lagrangien, mais aussi à sa signification physique, et à sa précision associée à une grande simplicité de programmation. Dans ce qui suit nous allons exposer ses fondements théoriques, illustrés par des exemples allant de cas-tests simples à des applications concrètes. Nous aborderons également les développements récents effectués autour du thème de la prise en compte des effets turbulents.

2. Généralités sur la méthode SPH

2.1. Principes et notations

2.1.1. Interpolation

SPH est une méthode complètement lagrangienne : les quantités physiques sont considérées être attachées à une particule, et non à un point de l'espace. Elle ne nécessite aucun maillage pour l'interpolation des champs, pas plus que pour l'écriture des opérateurs différentiels (Monaghan, 1992, Violeau, 2000b).

Le fluide est représenté par un ensemble de N points matériels, indexés par des lettres latines (a ou b). Chacun de ces points occupe une position notée par le rayon vecteur \mathbf{r}_a , et peut être vu comme le centre de gravité d'une « particule » de fluide, en réalité un volume élémentaire de fluide τ_a (macroscopique). Par abus de langage, nous appelons « particule » chacun de ces points, et nous affectons à chaque particule une masse m_a constante au cours du temps. Chaque particule a possède également une densité ρ_a , une pression p_a et un vecteur vitesse \mathbf{u}_a , supposées variables. D'une manière générale, une quantité physique A – champ scalaire, vectoriel ou tensoriel – mesurée au point occupé par la particule a est notée A_a .

Au fondement de SPH, se trouve la méthode d'interpolation suivante. La valeur d'un champ A suffisamment régulier, en un point donné \mathbf{r} , est tout d'abord écrite comme le produit de convolution de ce champ avec la fonction δ de Dirac (formulation mathématique exacte) :

$$A(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} A(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad [1]$$

L'intégrale étant étendue à l'ensemble du volume fluide Ω . Pour des raisons numériques, la fonction de Dirac est ensuite approchée par une fonction noyau w_h , appelée « kernel ». Cette fonction, dont l'intégrale est égale à l'unité, ressemble à une fonction gaussienne mais possède un support compact, dont le rayon h_t est proportionnel à un paramètre h nommé « longueur d'atténuation » (*smoothing length*). Généralement, h vaut 1,5 fois l'écart initial entre deux particules voisines, lui-même noté δr . Le kernel doit tendre vers la distribution de Dirac lorsque h tend vers 0, c'est-à-dire lorsque la discrétisation du fluide comme ensemble de particules est de plus en plus fine. On choisit généralement un kernel sphérique, c'est-à-dire ne dépendant que de la distance entre les points \mathbf{r} et \mathbf{r}' . Un exemple fréquent est donné par le « spline based kernel » d'ordre 4, qui s'écrit en dimension 2 :

$$w_h(r) = \frac{51}{2000h^2} \begin{cases} \left(\frac{5}{2}-q\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2}-q\right)^4 + 10\left(\frac{1}{2}-q\right)^4 & \text{si } 0 \leq q \leq 0,5 \\ \left(\frac{5}{2}-q\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2}-q\right)^4 & \text{si } 0,5 \leq q \leq 1,5 \\ \left(\frac{5}{2}-q\right)^4 & \text{si } 1,5 \leq q \leq 2,5 \end{cases} \quad [2]$$

où $q = r/h$, r représentant la distance à la particule. Le passage à trois dimensions se fait en changeant la valeur de la constante de normalisation (Monaghan, 1992). L'intégrale [1] est ensuite approchée par une somme discrète :

$$A(\mathbf{r}) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b w_h(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|) + O(h^2) \quad [3]$$

La sommation étant étendue à toutes les particules b du fluide. Nous voyons que l'élément de volume $d^3\mathbf{r}$ a été remplacé par le volume de chaque particule, c'est-à-dire le rapport m_b / ρ_b . Ainsi, la valeur du champ A au point occupé par la particule a peut s'écrire, sous la forme approchée :

$$A(\mathbf{r}_a) \approx \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b w_h(r_{ab}) \quad [4]$$

La quantité r_{ab} désignant la distance entre les particules a et b . Nous remarquons que la contribution d'une particule b à la valeur du champ A au point a s'annule si r_{ab} est supérieure au rayon du support du kernel, comme on le voit sur la figure 1. Ainsi, une particule n'interagit qu'avec un nombre limité de voisines, ce qui a pour effet de produire un algorithme en N (N représentant le nombre de particules). Pour le kernel donné par [2], chaque particule possède environ 40 voisines (en deux dimensions).

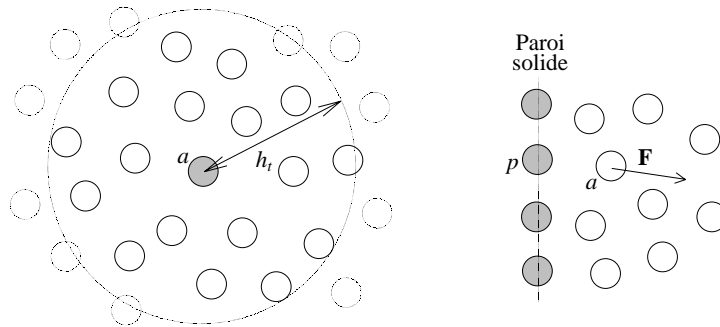


Figure 1. Chaque particule interagit avec un nombre limité de voisines (à gauche). Les parois sont représentées par des particules « solides » (à droite)

2.1.2. Opérateurs différentiels

Nous voyons à présent que l'équation [4] peut être dérivée formellement par rapport aux coordonnées d'espace de la particule a . Ainsi, le gradient du champ scalaire A peut s'écrire de manière approchée :

$$\nabla A(\mathbf{r}_a) \approx (\mathbf{GA})_a \equiv \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b \nabla_a w_h(r_{ab}) \quad [5]$$

La quantité $\nabla_a w_h(r_{ab})$ désignant le gradient par rapport aux coordonnées de a . Cette expression constitue la formulation fondamentale du gradient d'un scalaire dans le formalisme SPH, noté \mathbf{GA} ; d'autres formes sont cependant possibles (Monaghan, 1992). On voit que les valeurs du champ aux points occupés par les particules suffisent pour exprimer son gradient, si bien qu'il n'est pas besoin de grille ou de maillage. L'évaluation des termes du membre de droite de [5] ne nécessite en effet que la connaissance du gradient du kernel, dont la formulation analytique est connue du programmeur.

Il en va de même de n'importe quel opérateur différentiel du premier ordre. Un calcul simple permet par exemple de montrer que la divergence $D\mathbf{A}$ d'un champ de vecteurs \mathbf{A} peut s'écrire, dans le même formalisme :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_a) \approx (D\mathbf{A})_a \equiv \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{A}_b \cdot \nabla_a w_h(r_{ab}) \quad [6]$$

D'autres exemples seront donnés plus loin. Seul le cas de l'opérateur laplacien est un peu particulier, pour des raisons de stabilité numérique (Monaghan, 1992).

2.2. Ecriture des équations de la mécanique des fluides dans le formalisme SPH

2.2.1. Equation du mouvement

A partir de la méthode de différentiation donnée plus haut, nous pouvons établir une formulation de l'équation de quantité de mouvement d'un fluide. Pour cela, considérons dans un premier temps le seul terme de gradient de pression :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p = -\nabla \frac{p}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho$$

En substituant ces termes par leurs approximations à l'aide de l'équation [5], nous obtenons l'accélération de chaque particule sous la forme

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = -\sum_b m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a w_h(\mathbf{r}_{ab}) \quad [7]$$

Nous voyons que les forces de pressions peuvent être interprétées comme des forces répulsives analogues aux forces interatomiques. Un travail semblable (Cleary *et al.*, 1999, Violeau *et al.*, 2002) permet de déterminer une écriture du terme visqueux des équations de Navier-Stokes. La forme SPH de l'équation de quantité de mouvement s'écrit, en définitive :

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = -\sum_b m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} - \frac{16\nu}{\rho_a + \rho_b} \frac{\mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^2} \right) \nabla_a w_h(\mathbf{r}_{ab}) + \mathbf{F}_a^e \quad [8]$$

où $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ et $\mathbf{u}_{ab} = \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b$, ν désignant la viscosité moléculaire du fluide et \mathbf{F}_a^e les forces extérieures (la gravité, en général). Notons que le terme visqueux s'annule pour un champ de vitesses de rotation solide. L'équation [8] est la première équation du modèle SPH ; elle permet de déterminer l'accélération de chaque particule. Un schéma numérique (par exemple explicite au premier ordre) donne ensuite les vitesses puis les positions des particules à chaque pas de temps.

2.2.2. Equation de continuité

L'équation [6], qui donne la forme SPH de l'opérateur divergence, permet d'aboutir à l'expression suivante pour l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \mathbf{u}_{ab} \cdot \nabla_a w_h(\mathbf{r}_{ab}) \quad [9]$$

Il est alors possible de montrer que les densités de deux particules augmentent lorsqu'elles se rapprochent, ce qui est conforme à la signification de la divergence

d'un champ de vecteurs. L'équation [9] donne à chaque pas de temps l'évolution de la densité de chaque particule. L'équation [9] n'est pas la seule solution possible pour calculer la densité dans SPH ; elle assure cependant la stabilité des surfaces libres (Monaghan, 1992). On notera enfin que la conservation de la masse est naturellement assurée par le fait que la masse de chaque particule est fixée ; le volume total de fluide est en revanche sujet à de légères fluctuations.

Dans les équations [8] et [9], nous remarquons que l'approche lagrangienne permet de s'affranchir des termes de convection, car ils sont intrinsèquement inclus dans les dérivées matérielles.

2.2.3. Equation d'état

Un problème délicat pour SPH est d'empêcher les particules de se rapprocher indéfiniment, ce qui aurait pour effet d'augmenter localement la densité. Il est ainsi délicat de modéliser un écoulement incompressible (voir cependant le paragraphe 4.2). Une solution fréquemment utilisée consiste à utiliser une équation d'état pour le calcul de la pression. Pour l'eau, une forme convenable (Monaghan, 1994) est :

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad [10]$$

où ρ_0 représente une densité de référence et c_0 la vitesse du son. Du fait de la valeur élevée de cette vitesse (pour un fluide faiblement compressible), une petite variation locale de densité se traduit par un fort gradient de pression. Ce gradient, constituant une force de rappel, agit dans l'équation de mouvement [8] pour empêcher « l'effondrement » des particules, qui conservent alors un espacement presque constant δr (on voit qu'il s'agit ici de modéliser un écoulement *quasi* incompressible). L'exposant γ est généralement égal à 7. Nous voyons que la pression s'annule dès que la densité prend sa valeur de référence, ce qui permet de respecter naturellement une condition de pression nulle sur une surface libre.

2.2.4. Pas de temps et conditions aux limites

Les équations [8, 9 et 10] constituent le modèle SPH standard pour la mécanique des fluides. Lors de la résolution de [8 et 9], le pas de temps doit obéir à trois conditions (Morris *et al.*, 1997) afin d'assurer la stabilité numérique :

$$\delta t = \min \left(0,25 \times \min_a \sqrt{\frac{h}{F_a}} ; 0,4 \times \frac{h}{c_0} ; 0,125 \times \frac{h^2}{v} \right) \quad [11]$$

La seconde condition (condition de Courant), faisant intervenir la vitesse du son c_0 , est en générale dominante. Or, avec une vitesse du son ordinaire (de l'ordre de

1600 ms⁻¹ dans l'eau), le pas de temps se trouve trop petit pour effectuer des calculs en un temps raisonnable. Pour cette raison, l'usage est de considérer une valeur de c_0 valant 10 fois la vitesse maximale au sein de l'écoulement, de sorte que le nombre de Mach M n'exécède pas 0,1. Une analyse dimensionnelle des équations du mouvement montre alors que les variations relatives de densité sont de l'ordre de $M^2 < 1\%$. L'écoulement modélisé est donc légèrement plus compressible qu'en nature ; cette méthode reste néanmoins un bon compromis entre rapidité de calcul et précision.

Comme nous l'avons évoqué au paragraphe 2.2.3, la méthode SPH ne requiert pas de condition en surface libre. Le traitement des bords est en revanche plus délicat. La méthode la plus fréquemment retenue est celle des particules « de parois ». Elle consiste à placer le long de toute paroi solide une série de particules modélisant la paroi proprement dite (voir figure 1). Chacune de ces particules possède une position et une vitesse déterminées au cours du temps, et exerce une force répulsive sur les particules fluides qui s'en approchent suffisamment. La force exercée par la particule de paroi p sur la particule fluide a peut prendre ainsi la forme $\mathbf{F}^p = F^p \mathbf{n}$, où \mathbf{n} est le vecteur normal à la paroi, et F^p est défini par

$$F^p = \begin{cases} A_1 (r_1 / r)^4 & \text{si } 0 < r < r_1 \\ A_0 (r - r_0)^2 & \text{si } r_1 < r < r_0 \\ 0 & \text{si } r_0 < r \end{cases}$$

On choisit généralement pour r_0 l'écart initial δr entre deux particules voisines, les autres quantités étant déterminées par des raisonnements simples (Monaghan, 1995a). La force ne dépend donc que de la distance à la paroi, et est purement répulsive. La force totale ainsi exercée sur une particule fluide est ajoutée dans le membre de droite de l'équation de quantité de mouvement [8].

Pour ce qui concerne le frottement, une condition de non-glissement peut être imposée simplement en prenant en compte les particules de parois dans le calcul des forces de viscosité exercées sur les particules fluides *via* l'équation [8]. Dans ces conditions, les particules de parois s'apparentent plutôt à des particules de fluide adhérentes à ladite paroi. Le cas des écoulements turbulents (lisses ou rugueux) exige cependant un traitement plus sophistiqué, que nous évoquerons à la section 4.1.1.

La méthode des particules de parois fait apparaître un nouveau point fort de la méthode SPH, qui permet la prise en compte de parois mobiles : il suffit pour cela d'imposer aux particules de paroi une position qui change au cours du temps. Il faut alors aussi leur affecter une vitesse, puisqu'elles sont prises en compte dans le calcul des forces visqueuses. Il est donc nécessaire de prendre en compte les particules de parois dans le second membre de l'équation de continuité [9].

2.3. Lien avec les fondements de la mécanique lagrangienne

2.3.1. L'équation du mouvement comme conséquence du principe de moindre action

Il est notoire que le principe fondamental de la dynamique est en réalité un théorème résultant d'un principe plus fondamental dit « de moindre action » (Landau *et al.*, 1989). Les équations qui sont à la base de la mécanique, issues d'un principe variationnel, sont en réalité les équations de Lagrange, qui pour un système de points matériels s'écrivent :

$$\forall a, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_a} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \mathbf{0} \quad [12]$$

L désignant la fonction de Lagrange du système dans son entier. Des considérations simples permettent de montrer qu'elle est égale à la différence entre énergie cinétique et énergie potentielle. Ainsi, dans le formalisme SPH (Monaghan, 1995b), on peut introduire une énergie interne e_a pour chaque particule, ce qui conduit à :

$$L = \frac{1}{2} \sum_b m_b \mathbf{u}_b^2 - \sum_b m_b e_b$$

Les équations [12] donnent alors l'équation du mouvement de chaque particule a sous la forme :

$$m_a \frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = \sum_b m_b \frac{\partial e_b}{\partial \mathbf{r}_a} = \sum_b m_b \frac{\partial e_b}{\partial \rho_b} \frac{\partial \rho_b}{\partial \mathbf{r}_a} \quad [13]$$

Pour estimer le dernier terme (la variation de la densité avec la position), nous utilisons l'interpolation SPH donnée par [4], si bien que

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial \mathbf{r}_a} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \sum_c m_c w_h(r_{bc}) = m_a \nabla_a w_h(r_{ba}) + \delta_{ab} \sum_c m_c \nabla_a w_h(r_{ac})$$

où δ_{ab} désigne le symbole de Kronecker. Ainsi, en utilisant la propriété de symétrie $w_h(r_{ab}) = w_h(r_{ba})$, [13] devient

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left[\left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_a + \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_b \right] \nabla_a w_h(r_{ab}) \quad [14]$$

Le cas d'un fluide parfait se traite alors comme suit. La thermodynamique montre que l'énergie interne varie selon $de = -pdV = (p / \rho^2)d\rho$, si bien que p / ρ^2

représente la dérivée de l'énergie par rapport à la densité. En remplaçant $\partial e / \partial \rho$ par p / ρ^2 dans [14], on retrouve l'équation du mouvement conservative [7].

2.3.2. Lois de conservation

Le fait de pouvoir retrouver l'équation du mouvement SPH à partir des fondements de la mécanique du point et de la thermodynamique (sans passer par les équations de Navier-Stokes) est un résultat instructif. Le lecteur aura sans doute remarqué l'étonnante symétrie des équations, et en particulier du second membre de [7] (ou [8]). La symétrie du kernel induit en effet l'antisymétrie de son gradient. Ainsi, la force exercée par b sur a est l'opposée de celle exercée par a sur b , si bien que le principe d'action-réaction est naturellement vérifié par les équations du modèle SPH présenté ici. En d'autres termes, le modèle satisfait à la loi de conservation de l'impulsion totale d'un système fermé.

Il est facile de montrer que l'énergie est aussi conservée par l'équation [7], si bien que la dissipation est exercée uniquement par le terme visqueux de [8]. Enfin, le moment cinétique est aussi conservé par le modèle SPH présenté (Violeau, 2000a). Ce dernier résultat est la conséquence du caractère *sphérique* du kernel, ce qui n'est pas étonnant : on sait en effet que cette loi de conservation est physiquement reliée à l'isotropie des lois de la mécanique. Or, le kernel peut être interprété comme la sensibilité d'une particule à son entourage (on pourrait dire qu'une particule se comporte de manière équitable envers ses proches !).

La compréhension de ces lois de conservation et de leur signification physique est d'une grande utilité pour le programmeur. En particulier, la symétrie des termes permet de réduire d'un facteur 2 le temps calcul et la mémoire requise.

3. Quelques applications élémentaires bidimensionnelles

3.1. Ecoulements laminaires

3.1.1. Ecoulement de Poiseuille entre deux plaques parallèles

Un exemple d'application simple est l'écoulement entre deux plaques « infinies » (en réalité, dans le modèle, l'écoulement est périodique) induit par une force motrice \mathbf{F}^e parallèle aux bords (représentant par exemple un gradient de pression dans une conduite). La figure 2 montre les profils de vitesse longitudinale obtenus à plusieurs instants en partant du repos. On travaille ici avec 1600 particules fluides, en l'absence de gravité et pour un nombre de Reynolds $Re = 10$. On constate un très bon accord avec les profils théoriques ; en particulier les profils de vitesse convergent vers la loi parabolique attendue (Morris *et al.*, 1997, Violeau *et al.*, 2002).

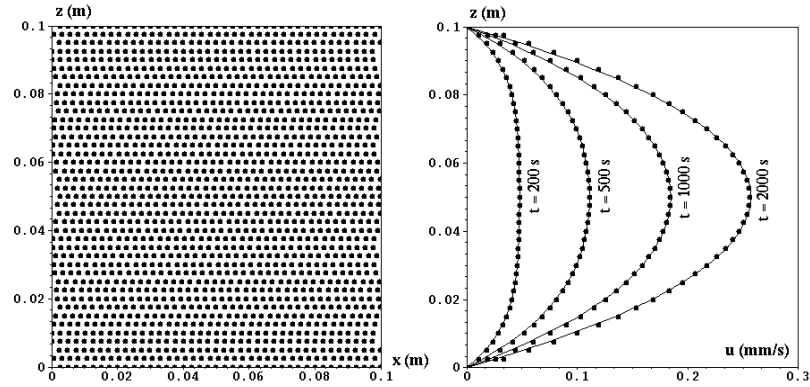


Figure 2. *Écoulement 2D de Poiseuille laminaire entre deux plaques. Position des 1600 particules (à gauche) et évolution des profils de vitesse longitudinale (à droite). • résultats numériques ; — profils théoriques*

3.1.2. Écoulement permanent dans un canal à surface libre

Un écoulement similaire peut être reproduit dans un canal à surface libre, toujours en régime laminaire, sous l'effet d'une force horizontale représentant une faible inclinaison du lit. On commence par laisser « reposer » les particules, afin de partir d'un état d'équilibre hydrostatique. La figure 3 montre que l'équation d'état permet de rendre compte de cet équilibre. Il est cependant préférable, dans ce cas précis, de considérer plusieurs couches de particules de parois, affectées d'une pression suffisante. La phase dynamique peut alors commencer, donnant lieu à un profil semi-parabolique, comme en figure 3 (Issa, 2002a).

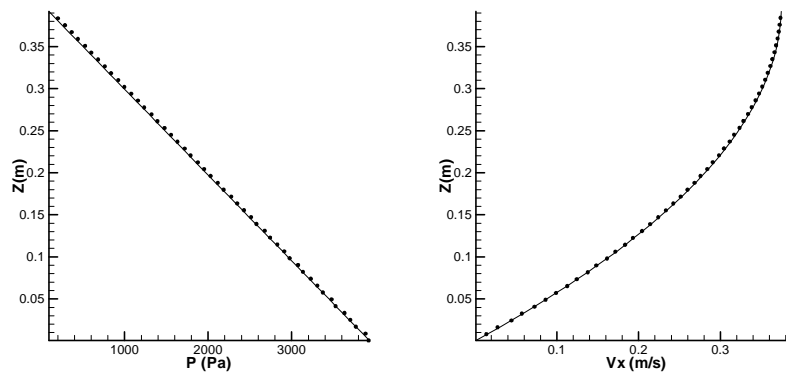


Figure 3. *Écoulement laminaire dans un canal 2D à surface libre. Profils de pression hydrostatique (à gauche) et de vitesse longitudinale (à droite). • résultats numériques ; — profils théoriques*

3.2. Cas non permanents

3.2.1. Effondrement d'une colonne d'eau

Abordons à présent deux cas plus complexes. Le premier, classique pour la validation de codes lagrangiens, est l'effondrement d'une colonne d'eau dans un bassin 2D (une sorte de rupture de barrage schématisée). 10 000 particules sont à cet effet placées dans un carré entre trois parois dessinant un bassin rectangulaire, et se meuvent sous l'effet de la gravité, comme le montre la figure 4. L'observation de l'abscisse du front d'onde et de la hauteur d'eau sur la paroi de gauche permet une excellente validation, lorsqu'on les compare à des données expérimentales (Monaghan, 1994, Violeau, 1999).

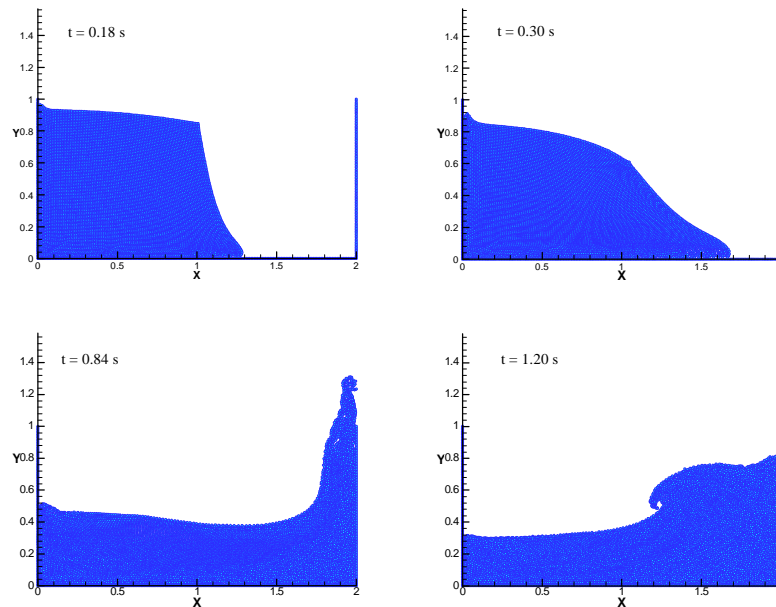


Figure 4. Effondrement d'une colonne d'eau dans un bassin

3.2.2. Canal à houle

Le second cas complexe que nous présentons est un canal à houle numérique, mis au point pour examiner le comportement d'une série de vagues à l'approche d'une digue, et en particulier les phénomènes d'ascension (*runup*) et de franchissement. Un batteur à houle, constitué de particules de parois mobiles, oscille avec une amplitude et une période définies par l'utilisateur. La longueur d'onde et la hauteur des vagues induites est en bon accord avec les valeurs observées ou fournies par la théorie de la

houle linéaire de Stokes, ainsi que les profils de vitesses. La figure 6 montre l'allure des vitesses près de l'ouvrage. Quant à l'influence de la rugosité du parement de la digue sur la hauteur d'ascension des vagues, sa modélisation exige une première approche de la turbulence (voir section 4.1).

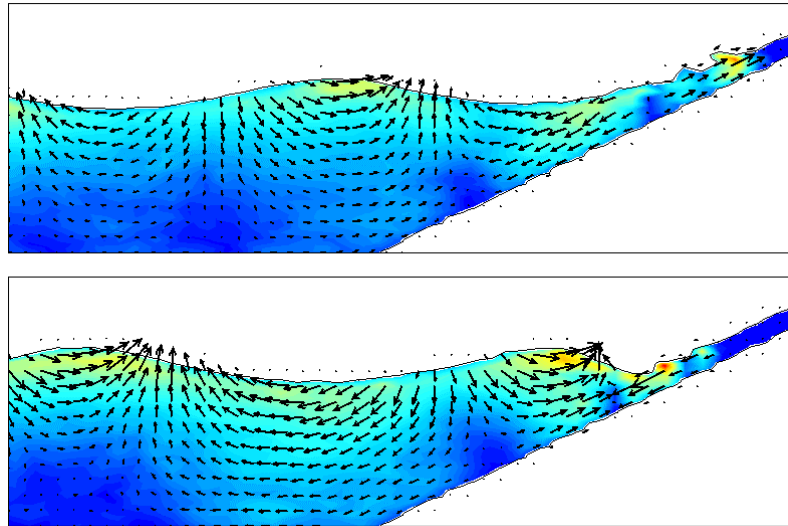


Figure 5. Allure du champ de vitesses dans un canal à houle, près d'une digue (les grandeurs ont été interpolées sur une grille pour faciliter la visualisation, si bien que les particules ne sont pas visibles)

4. Développements et axes de recherche

4.1. Modélisation de la turbulence

4.1.1. Modèles de viscosité turbulente

Lorsqu'on souhaite reproduire un écoulement réel, il est nécessaire de prendre en compte les aspects turbulents, fondés sur la notion de grandeurs moyennes. Celles-ci obéissent à une évolution déterminée par les équations de Reynolds, analogues à celles de Navier-Stokes. L'effet des fluctuations de vitesses sur les grandeurs moyennes exige pourtant un modèle de fermeture. L'approche la plus populaire est fondée sur la notion de viscosité turbulente ν_T , dont l'estimation se fait par de nombreuses méthodes (Viollet *et al.*, 1998). L'équation de quantité de mouvement est alors inchangée, à ceci près que la viscosité turbulente vient s'ajouter à la viscosité moléculaire ν . Dans la mesure où celle-ci est généralement négligeable devant ν_T , l'équation du mouvement [8] devient :

$$\frac{D\langle \mathbf{u} \rangle_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{\langle p \rangle_a}{\rho_a^2} + \frac{\langle p \rangle_b}{\rho_b^2} - 8 \frac{v_{T,a} + v_{T,b}}{\rho_a + \rho_b} \frac{\langle \mathbf{u} \rangle_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^2} \right) \nabla_a w_h(r_{ab}) + \mathbf{F}_a^e$$

où les crochets $\langle \cdot \rangle$ désignent les moyennes au sens de Reynolds, et D une dérivée lagrangienne en suivant le mouvement *moyen* (on notera que v_T est variable en espace et en temps, si bien qu'une valeur différente est affectée à chaque particule). Dans les deux derniers cas-tests du paragraphe 3, une viscosité v_T constante était retenue. Cependant, une approche plus précise est requise pour une modélisation fine, en particulier pour le traitement du frottement exercé par les parois. Le modèle de longueur de mélange, par exemple, propose une viscosité turbulente de la forme :

$$v_T = L_m^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

où L_m représente la longueur de mélange (dépendant de la géométrie du domaine et des coordonnées d'espace), et S_{ij} est le tenseur taux de déformation, c'est-à-dire la partie symétrique du tenseur gradient des vitesses moyennes. A partir des opérateurs différentiels donnés au paragraphe 2, il est possible de trouver une forme SPH de ce tenseur :

$$(\nabla \mathbf{u})_a \approx -\frac{1}{\rho_a} \sum_b m_b \langle \mathbf{u} \rangle_{ab} \otimes \nabla_a w_h(r_{ab}) \quad [15]$$

Ce modèle ne nécessite pas d'autre équation. Il faut cependant remarquer que cette approche n'est valable qu'à partir d'une certaine distance d'une paroi, si bien que le traitement des bords est différent de ce qui a été expliqué à la section 2.2.4. On assimile ici les particules « de parois » à des particules fluides situées à une distance δ de la paroi (hors de la sous-couche visqueuse), et affectées d'une vitesse et d'une viscosité turbulente fondées sur une loi de paroi de type logarithmique (Viollet *et al.*, 1998). Dans le cas d'une paroi lisse, nous imposons donc aux particules de bord :

$$\langle u \rangle_a = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_*}{\nu} + 5,2 \right)$$

$$v_{T,a} = \kappa u_* \delta$$

$\kappa = 0,41$ étant la constante de Karman, et u_* la vitesse de frottement. Il est convenable de retenir une distance $\delta = 50\nu / u_*$. On peut appliquer ce modèle au cas de l'écoulement dans un canal, avec une longueur de mélange définie par :

$$L_m = \kappa z \sqrt{1 - \frac{z}{H}}$$

H désignant la hauteur d'eau. Dans ce cas, un bilan de quantité de mouvement permet de relier la vitesse de frottement à la force motrice F^e sous la forme $u_*^z = F^e H$. La figure 6 montre qu'en partant d'un profil arbitraire les vitesses finissent par converger vers le fameux profil logarithmique (Issa, 2002b). La prise en compte d'un fond rugueux ne pose pas de difficulté supplémentaire.

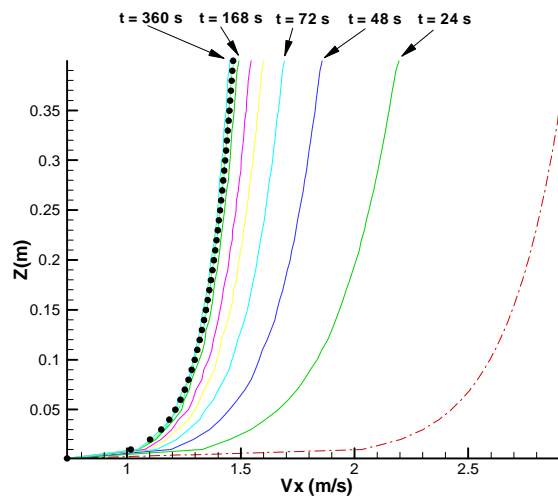


Figure 6. *Écoulement turbulent dans un canal. Profils de vitesse moyenne à plusieurs instants. - - profil initial ; — résultats numériques ; • profil théorique*

Dans le cas d'un écoulement plus complexe, la détermination de la vitesse de frottement se fait de manière différente. On peut par exemple estimer la vitesse à une distance $\Delta > \delta$ de la paroi à l'aide de la méthode d'interpolation donnée par [3], puis en déduire u_* en supposant qu'un profil logarithmique y est encore valable.

Enfin, il faut évoquer les approches plus sophistiquées que le modèle de longueur de mélange, quoique reposant également sur une hypothèse de viscosité turbulente, comme les modèles à une équation ou le modèle $k-\varepsilon$ (Viollet *et al.*, 1998). Écrire leurs équations dans le formalisme SPH ne pose aucune difficulté, et il est probable que les prochains développements porteront sur ce thème.

4.1.2. Modèles stochastiques

Les modèles lagrangiens font parfois l'objet d'un traitement spécial pour la modélisation des termes de diffusion, qui sont au cœur de la turbulence. L'idée essentielle est de définir la vitesse des particules comme un processus aléatoire dont les propriétés satisfont à des conditions imposées par la théorie des écoulements

turbulents (Pope, 1994). Au cœur de ces méthodes figure le Modèle Généralisé de Langevin (GLM), qui consiste à écrire la vitesse d'une particule sous la forme :

$$d\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \langle p \rangle + \mathbf{G}(\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle) dt + \sqrt{C_0 \varepsilon dt} \xi \quad [16]$$

C_0 étant une constante, ε le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente et ξ un vecteur aléatoire décorrélé des vitesses, c'est-à-dire vérifiant pour tout i et j

$$\begin{aligned} \langle \xi_i, \xi_j \rangle &= \delta_{ij} \\ \langle \xi_i, u_j \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Il faut préciser que la vitesse \mathbf{u} de l'équation [16] n'est pas une grandeur moyenne. Il est facile de montrer (Violeau *et al*, 2002), à partir des définitions qui précèdent, que la moyenne statistique de \mathbf{u} vérifie l'équation de Reynolds :

$$\frac{D\langle u_i \rangle}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j}$$

où les primes désignent les grandeurs fluctuantes (soit $u'_i = u_i - \langle u_i \rangle$). Pope (1994) discute des avantages de ce modèle, mais le plus intéressant est que différents modèles de fermeture peuvent être invoqués par le choix du tenseur \mathbf{G} de l'équation [16]. Un choix fréquent est donné par :

$$G_{ij} = -\frac{1}{2} C_1 \frac{\varepsilon}{k} \delta_{ij} + C_2 \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}$$

où k est l'énergie cinétique turbulente, C_1 et C_2 des constantes. Comme le montrent Durbin & Speziale (1993) et (Violeau *et al*, 2002), ce choix revient au modèle de fermeture au second ordre LRR-IP (Launder *et al.*, 1975), qui convient à une large catégorie d'écoulements. Les constantes C_1 et C_2 sont alors respectivement fixées à 1,8 et 0,6. En toute rigueur, la valeur de C_0 est alors reliée à ces deux dernières (Pope, 2000). Nous avons donc là un modèle qui contient à la fois l'équation du mouvement et un modèle de fermeture au second ordre, le tout en une seule équation ! Appliquer ce modèle à SPH revient à adapter l'équation [16] au formalisme déjà décrit, le gradient de pression gardant la même forme :

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = -\sum_b m_b \left(\frac{\langle p \rangle_a}{\rho_a^2} + \frac{\langle p \rangle_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a w_h(r_{ab}) - \frac{1}{2} C_1 \frac{\varepsilon_a}{k_a} \mathbf{u}'_a + C_2 \nabla \langle \mathbf{u} \rangle_a \cdot \mathbf{u}'_a + \sqrt{\frac{C_0 \varepsilon_a}{\delta t}} \xi_a$$

Le gradient des vitesses moyennes peut être estimé par la formule [15]. L'estimation des moyennes de Reynolds peut mettre à profit le kernel (Pope, 2000) :

$$\langle \mathbf{u} \rangle_a = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{u}_b w_h(r_{ab}) \quad [17]$$

Bien entendu, à chaque particule sont affectées des valeurs différentes de k , ε et ξ . Un générateur de variable pseudo-aléatoire suffit pour ce dernier, tandis que l'énergie cinétique et son taux de dissipation sont calculés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= 2\nu_{T,a} (S_{ij} S_{ij})_a \\ k_a &= \varepsilon_a \nu_{T,a} / C_\mu \end{aligned}$$

avec $C_\mu = 0,09$ (Pope, 2000).

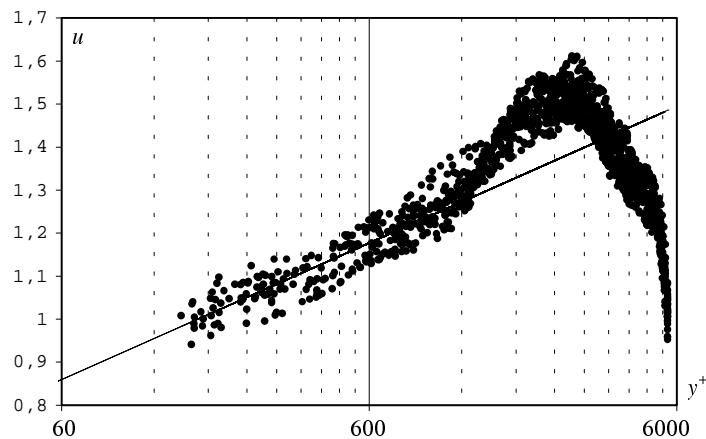


Figure 7. Vitesses longitudinales calculées avec le Modèle Généralisé de Langevin, dans le cas d'un écoulement entre deux plaques à $Re = 64\,000$. Les abscisses sont en échelle logarithmique. • résultats numériques ; — profil logarithmique

Bien que complexe et coûteux en temps calcul (notamment à cause de l'estimation des grandeurs moyennes), ce modèle permet en principe de traiter des écoulements relativement complexes. Le cas de l'écoulement de Poiseuille traité au paragraphe 3.1.1 donne, en régime turbulent, les résultats visibles en figure 7 (Violeau *et al.*, 2001). Nous observons que le profil logarithmique apparaît, bien que la constante de Karman ne soit pas spécifiée. Les fluctuations visibles correspondent à l'ordre de grandeur des vitesses fluctuantes attachées aux plus grands tourbillons, c'est-à-dire $k^{1/2}$.

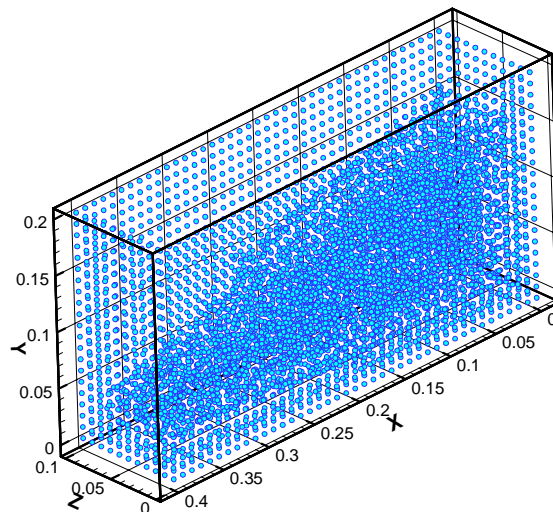


Figure 8. Exemple d'écoulement 3D avec SPH : rupture de barrage schématique

4.1.3. Perspectives : vers la modélisation des grands tourbillons

Les fluctuations visibles sur la figure 7 proviennent de la définition [17] des grandeurs moyennes, définition qui correspond plutôt à un filtre passe-haut. En ce sens, les vitesses moyennes ainsi obtenues se rapprochent davantage de vitesses au sens de la LES (*Large Eddy Simulation*, ou Simulation des Grandes Echelles). Il serait pourtant erroné de croire que le modèle présenté ici est effectivement une LES, ne serait-ce que parce qu'il est bidimensionnel, tandis que les structures tourbillonnaires turbulentes sont *tridimensionnelles*. Cependant, les équations du modèles SPH fonctionnent aussi bien en 2D qu'en 3D, à ceci près que le temps de calcul est considérablement augmenté en trois dimensions. L'augmentation de la puissance de calcul des machines autorise pourtant à penser que de telles applications seront bientôt possibles dans des cas concrets. A titre d'exemple, un écoulement 3D est représenté sur la figure 8 (Issa, 2002a). Une perspective d'avenir serait d'adapter la LES au modèle SPH standard.

4.2. Méthodes de projection

La méthode décrite à la section 2.2.3 pour le calcul de la pression repose, comme nous l'avons dit, sur une hypothèse de quasi-incompressibilité. Modéliser un écoulement rigoureusement incompressible est pourtant possible avec SPH, quoique la méthode soit coûteuse et accroisse la complexité de l'algorithme.

Comme pour les méthodes de type « éléments finis », l'idée fondamentale est la fameuse décomposition de Hodge, qui permet d'écrire un champ de vitesses comme la superposition d'un champ incompressible et du gradient d'un scalaire : $\mathbf{u} = \mathbf{u}^d + \nabla\Phi$. Cette décomposition repose sur le fait que les opérateurs divergence et $-\text{gradient}$ sont adjoints dans des espaces continus judicieusement choisis. Or, dans le formalisme SPH, le même raisonnement peut être suivi. Plusieurs variantes existent (Cummins *et al.*, 1998, Faure *et al.*, 2000), mais la plus élémentaire est la suivante. A un instant donné, les masses, densités, vitesses et positions des particules étant fixées, nous pouvons définir l'espace E (resp. F) des quantités scalaires A_a (resp. vectorielles \mathbf{A}_a) attachées à chacune des particules. Ces deux espaces peuvent être munis de produits scalaires, par exemple :

$$(A, B) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b B_b$$

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{B}_b$$

Dans ces espaces, les opérateurs discrets « divergence » et « $-\text{gradient}$ » définis par [5] et [6] sont adjoints discrets vis-à-vis de ces produits scalaires, c'est-à-dire qu'ils vérifient :

$$\langle \mathbf{A}, -\mathbf{GB} \rangle = (D\mathbf{A}, B)$$

Ainsi, la décomposition de Hodge est valable. Le champ \mathbf{u}^d représente alors le champ incompressible « le plus proche » de \mathbf{u} au sens de l'énergie, et sa détermination passe par la connaissance de Φ , qui en outre représente la pression (à une constante multiplicative près). L'équation à résoudre est donc

$$D\mathbf{G}\Phi = D\mathbf{u}$$

où Φ est l'inconnue. Ce problème peut être résolu sous sa formulation forte (Cummins *et al.*, 1998) ou variationnelle (Bonnet *et al.*, 2000, Faure *et al.*, 2000). Cette dernière, plus précise, aboutit à la résolution du système linéaire suivant :

$$\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \frac{m_c}{\rho_c} \frac{1}{\rho_c} [\nabla_b w_h(r_{bc}) \cdot \nabla_a w_h(r_{ac})] \Phi_b = - \sum_{b,c} \frac{m_b}{\rho_b} \frac{m_c}{\rho_c} [\mathbf{u}_c \cdot \nabla_c w_h(r_{cb})] w_h(r_{ab})$$

Cette approche fournit de bons résultats. Elle permet aussi d'augmenter le pas de temps d'un facteur 10, car la condition de Courant figurant dans [11] n'a plus lieu d'être ; le coût de la résolution du système ci-dessus, ainsi que sa difficulté de mise en œuvre, rendent cependant cette méthode peu recommandable pour traiter des cas réels.

5. Conclusions

La méthode SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) se montre extrêmement intéressante pour l'hydraulique, en particulier dès qu'il s'agit de traiter des problèmes à surfaces libres complexes. Parmi les avantages que nous n'avons pas pu aborder ici, mentionnons la possibilité de traiter les écoulements multiphasiques, ou de résoudre l'équation de transport-diffusion d'un traceur (Violeau *et al.*, 1999).

Malgré les qualités de cette technique prometteuse, les adeptes en sont encore, malheureusement, trop peu nombreux. On voit cependant un intérêt naître au sein de la communauté des hydrauliciens, et de petits groupes de travail commencent à se former. Les développements récents sur le thème de la turbulence laissent penser que des applications industrielles ou environnementales vont très bientôt voir le jour.

6. Bibliographie

- Bonnet J., « Correction and stabilization of Smoothed Particle Hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations », *Intern. Journ. Numer. Methods in Engineering* 47, 1083-1121, 2000.
- Cleary P. W., Monaghan J. J., « Conduction modelling using Smoothed Particle Hydrodynamics », *Journ. Comput. Phys.* 148, 227-264, 1999.
- Cummins S. J., Rudman M. J., « Truly incompressible SPH », *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, FEDSM98-4923, 1998.
- Durbin P.A., Speziale C. G., Realizability of second moment closure via stochastic analysis, CTR Manuscript 184, 1993.
- Faure S., Développements d'un algorithme de projection exacte pour la modélisation des écoulements incompressibles par la méthode SPH, rapport EDF/LNHE n° HP-72/2000/032/A, 2000.
- Issa R., Modélisation bidimensionnelle d'un écoulement laminaire à surface libre par la méthode SPH, 1^{er} rapport de thèse de doctorat, rapport EDF/LNHE n° HP-75/2002/028/A, 2002.
- Issa R., Modélisation bidimensionnelle d'un écoulement laminaire à surface libre par la méthode SPH, 2^e rapport de thèse de doctorat, rapport EDF/LNHE n° HP-75/2002/088/A, 2002.
- Landau L. D., Lifchitz E. M., *Physique théorique, t. 1*, éditions Mir, 1989.
- Launder B. E., Reece G. J., Rodi W., « Progress in the development of Reynolds stress turbulence closure », *Journ. Fluid Mech.* 68, 537, 1975.
- Monaghan J. J., « Smoothed Particles Hydrodynamics », *Annual Review of Astrophysics*, 30, 543-74, 1992.
- Monaghan J. J., « Simulating free surface flows with SPH », *Journ. Comput. Phys.* 110, 399-406, 1994.

- Monaghan J. J., Simulating gravity currents with SPH. Part III : boundary forces, rapport du Department of Mathematics de l'Université de Monash, 1995.
- Monaghan J. J., An SPH formulation of surface tension, Rapport du Department of Mathematics de l'Université de Monash, 1995.
- Morris J. P., Fox P. J., Zhu Y., « Modelling low Reynolds number incompressible flows using SPH », *Journ. Comput. Phys.* 136, 214–226, 1997.
- Pope S. B., « Lagrangian PDF methods for turbulent flows », *Annu. Rev. Fluid. Mech.* 26, 23–63, 1994.
- Pope S. B., *Turbulent flows*, Cambridge University Press, 2000.
- Violeau D., Chauvelier-Alario C., Foucart A., Etude de faisabilité d'un prototype de logiciel fondé sur la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) pour la mécanique des fluides, Bilan de l'application à différents types d'écoulements et perspectives de développement, rapport EDF/LNHE n° HE-42/99/065/A, 1999.
- Violeau D., Notions fondamentales de Mécanique lagrangienne, Application à la méthode numérique particulaire SPH, rapport EDF/LNHE n° HP-72/2000/072/A, 2000.
- Violeau D., Logiciel SPARTACUS-2D de modélisation lagrangienne des écoulements de fluides, Notice théorique de la version 1.0, rapport EDF/LNHE n° HP-75/2001/027/A, 2000.
- Violeau D., Piccon S., Chabard J.-P., « Two attempts of turbulence modelling in Smoothed Particle Hydrodynamics », *Proceedings of the 8th Fluid Modelling and Turbulence Measurements conference*, Tokyo 2001.
- Violeau D., Piccon S., Prise en compte des effets turbulents dans la méthode SPH. Introduction d'un modèle de viscosité turbulente et d'un modèle stochastique, rapport EDF / LNHE n° HP-75/2002/005/A, 2002.
- Viollet P.-L., Chabard J.-P., Esposito P., Laurence D., *Mécanique des fluides appliquée. Ecoulements incompressibles dans les circuits, canaux, rivières, autour de structures et dans l'environnement*, Presses de l'Ecole Nationale des ponts et Chaussées, 1998.