

---

# Simulation numérique d'écoulements en milieu poreux avec l'équation de Richards

**Jean-Philippe Renaud\*** — **Hannah Cloke\*** — **Yu Wang\***  
**Malcolm Anderson\*** — **Paul Wilkinson\*\*** — **Dave Lloyd\*\***

\* *University of Bristol*  
*School of Geographical Sciences*  
*University Road, Bristol BS8 1SS*  
*Royaume-Uni*  
*j.p.renaud@bristol.ac.uk*

\*\* *ZNA(UK) Ltd*  
*University Gate, Park Row*  
*Bristol BS1 5UB*  
*Royaume-Uni*

---

*RÉSUMÉ. La théorie des écoulements saturés et non saturés en milieu poreux repose sur l'équation de Richards, une équation différentielle partielle non linéaire. L'équation de Richards peut être résolue efficacement avec un schéma itératif de type Picard adapté de manière à être conservatif. Une approche numérique par éléments finis permet alors de résoudre l'équation dans des domaines où la répartition des propriétés géologiques est complexe. Le milieu naturel contient souvent des conditions à la limite de type infiltration ou suintement qui ne sont pas des réflexions directes des conditions à la limite mathématiques pour une équation du type Richards. Une méthode itérative permettant de simuler ce type de conditions est présentée puis validée avec des mesures sur un modèle physique.*

*ABSTRACT. The theory of saturated and unsaturated flow in porous media is based on Richards' equation, a highly non-linear partial differential equation. Richards' equation can be solved using a Picard iterative method modified to be mass conservative. A numerical resolution by the finite element method allows Richards' equation to be solved in complex geological domains. The boundary conditions in nature are not always replicable using only the mathematical boundary conditions defined for Richards' equation, for instance when simulating infiltration or seepage. An iterative technique developed to deal with this type of boundary condition is introduced and validated with measures from a physical model.*

*MOTS-CLÉS : milieux poreux, zone non saturée, équation de Richards, éléments finis, surface de suintement.*

*KEYWORDS: porous media, unsaturated flow, Richards' equation, finite element, seepage face.*

---

## 1. Introduction

Les vitesses de déplacement de l'eau souterraine sont souvent minimales comparées aux vitesses observées dans les eaux de surface mais la quantité d'eau stockée sous terre est énorme et le milieu souterrain joue souvent le rôle d'un régulateur, maintenant les niveaux d'étiage des rivières pendant l'été par exemple. L'importance de la partie souterraine du cycle de l'eau lors de crues est moins comprise mais il semblerait que le milieu souterrain puisse « lisser » les pics de crues en stockant une partie de l'eau de ruissellement et en la relâchant progressivement. Les faibles vitesses d'écoulement font que les pollutions souterraines ont souvent des conséquences durables et surtout difficiles à estimer à cause de la surface réactive formée par la porosité de la roche. Pour toutes ces raisons, il est nécessaire de posséder des modèles numériques d'écoulement qui puissent être utilisés d'une part, pour produire les conditions aux limites au niveau de la surface utilisables par les modèles de ruissellement et, d'autre part, pour générer le champ de vitesses dans le sous-sol qui peut ensuite être utilisé par des modèles de transport de polluants.

Après une brève introduction à la théorie des écoulements en milieu poreux, cette publication présente les algorithmes numériques utilisés par le code de calcul numérique ESTEL-2D, un module du système TELEMAC (Hervouet 2000) qui résout l'équation de Richards sur des maillages d'éléments finis triangulaires. Les algorithmes sont d'abord validés à l'aide d'une solution analytique bidimensionnelle. Les résultats d'ESTEL-2D sont ensuite comparés aux résultats obtenus pour un des cas-test HYDROCOIN proposé par l'agence nucléaire suédoise. Le modèle est enfin utilisé pour simuler une expérience de laboratoire dans une situation où les conditions aux limites contiennent une condition de suintement. Les résultats obtenus avec ESTEL-2D sont satisfaisants dans chacune de ces trois situations.

## 2. Théorie des écoulements en milieu poreux

### 2.1. Terminologie

Le terme milieu *poreux* signifie qu'un volume donné de ce milieu contient un pourcentage de vides qui peuvent être occupés soit par de l'air, par de l'eau ou une combinaison des deux. Ce pourcentage est appelé la *porosité*.

La *teneur en eau*  $\theta$  est le pourcentage d'eau dans un volume donné du milieu poreux. Pour des raisons de pression capillaire, la porosité n'est jamais complètement remplie d'eau. La teneur en eau varie entre la *teneur en eau saturée*  $\theta_s$  et la *teneur en eau résiduelle*  $\theta_r$ . Ces deux grandeurs sont intrinsèques au milieu poreux considéré. Un indice de saturation effectif  $S_e$  peut alors être défini comme l'écart relatif entre la teneur en eau et ses deux valeurs limites.

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad [1]$$

La charge hydraulique  $H$  d'un fluide incompressible est généralement écrite :

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \quad [2]$$

où  $v$  est la vitesse du fluide,  $g$  l'accélération due à la gravité,  $p$  la pression du fluide,  $\rho$  sa masse volumique et  $z$  l'altitude du point considéré. Dans un milieu poreux, la vitesse de l'eau est si faible que le terme cinétique est généralement négligeable devant les deux autres. La charge hydraulique est alors notée plus simplement  $H = h+z$  où  $h$  est la pression hydraulique :

$$h = \frac{p}{\rho g} \quad [3]$$

Les vides constituant la porosité peuvent être connectés entre eux, permettant à un fluide de circuler dans le milieu poreux. La circulation d'un fluide fait référence à la notion de *perméabilité*. Porosité et perméabilité sont deux notions différentes bien que liées : l'existence d'une porosité est une condition nécessaire mais pas suffisante à l'existence d'une perméabilité. Darcy (1856) a montré de manière empirique l'existence d'une relation de proportionnalité entre la vitesse d'un fluide et le gradient de charge de ce fluide dans un milieu poreux. Le coefficient de proportionnalité est appelé la *perméabilité* du milieu.

Pour un écoulement multidimensionnel, cette relation de proportionnalité est en fait un produit tensoriel (équation [4]) qui tient compte du fait que les milieux poreux ne sont pas forcément isotropes et peuvent orienter le flux selon des directions préférentielles.

$$\underline{v} = -\underline{K} \cdot \underline{\nabla}(h+z) \quad [4]$$

Le tenseur de perméabilité  $\underline{K}$  est constant en milieu saturé mais dépend de la pression en milieu non saturé. Il est généralement noté  $\underline{K} = k_r(h) \cdot \underline{K}_s$  où  $\underline{K}_s$  est le tenseur de perméabilité en milieu saturé et  $k_r = k_r(h)$  la loi de perméabilité relative. La version finale de la loi de Darcy est donc :

$$\underline{v} = -k_r(h) \cdot \underline{K}_s \cdot \underline{\nabla}(h+z) \quad [5]$$

## 2.2. L'équation de Richards

En utilisant les notations précédentes, la conservation de la masse d'eau dans un volume élémentaire du milieu poreux peut s'écrire :

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = S \quad [6]$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'eau et  $S$  un terme source qui est en fait un flux volumique. L'équation [6] peut être simplifiée si la masse volumique du fluide est supposée constante dans le temps et dans l'espace :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = S \quad [7]$$

L'équation de Richards est obtenue en substituant la loi de Darcy [5] pour la vitesse dans l'équation de conservation de la masse [7] :

$$\frac{\partial\theta(h)}{\partial t} = \underline{\nabla} \cdot k_r(h) \underline{K}_s \cdot \underline{\nabla}(h+z) + S \quad [8]$$

Comme la teneur en eau et la perméabilité relative ne sont pas constantes en milieu non saturé, les fonctions  $\theta = \theta(h)$  et  $k_r = k_r(h)$  doivent être spécifiées pour que le problème puisse être résolu. Les formulations proposées par Brooks et Corey (1966) et van Genuchten (1980, 1985) sont les plus populaires dans la littérature scientifique bien que d'autres formules existent comme celle qu'a introduit Haverkamp (1977) pour étudier spécifiquement des problèmes d'infiltration. Ces formulations sont hautement non linéaires, surtout pour des sols grossiers.

L'équation de Richards est donc une équation différentielle partielle non linéaire. Sa résolution nécessite des conditions aux limites, qui consistent en une distribution initiale de la pression dans le domaine, et des conditions aux limites du domaine étudié. Zauderer (1983) a établi que les conditions aux limites d'une équation comme l'équation de Richards sont du type :

$$B(\underline{r}, t) = \alpha(\underline{r})h + \beta(\underline{r}) \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\Gamma} \quad [9]$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $B$  sont des fonctions connues définies sur la frontière  $\Gamma$  du domaine étudié,  $\underline{r}$  est le vecteur position et  $\underline{n}$  un vecteur unitaire normal sortant. Trois types principaux de conditions aux limites peuvent être considérés :

- $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$  : condition de Dirichlet ou charge imposée,

- $\alpha = 0$  et  $\beta \neq 0$  : condition de Neumann ou flux imposé,
- $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$  : condition de Cauchy,

McCord (1991) a étudié en détail les conditions aux limites pour l'équation de Richards. Il note que la notion de flux imposé comme l'entendent la plupart des modélisateurs n'est pas vraiment une condition de Neumann au sens mathématique du terme. En effet, imposer un flux  $q^b = \underline{v}^b \cdot \underline{n}$  revient à imposer une grandeur du type :

$$K \cdot \frac{\partial (h+z)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \underline{v}^b \cdot \underline{n} \quad [10]$$

mais en milieu non saturé la perméabilité  $K$  dépend de la pression. Imposer de cette manière un flux d'infiltration dû à la pluie par exemple n'est pas rigoureux. Idéalement, une condition de Cauchy devrait être utilisée dans ce cas spécifique car cela revient à imposer un flux qui dépend de la pression hydraulique. Malheureusement l'information nécessaire pour paramétrer une telle condition n'est bien souvent pas disponible. Le suintement est un autre exemple de condition à la limite naturelle difficile à exprimer à partir des trois conditions mathématiques de base car c'est un flux sortant dont la valeur n'est pas connue.

Typiquement deux types de conditions aux limites sont couramment utilisés : la condition de Dirichlet qui correspond à une charge imposée et la condition de Neumann qui correspond à un flux imposé. De Marsilly (1994) présente une situation où la condition de Cauchy est calculable mais l'utilisation en est très limitée en pratique. Dans ESTEL-2D, les conditions d'infiltration et de suintement sont traitées à l'aide de méthodes itératives qui testent différentes combinaisons de conditions aux limites mathématiques jusqu'à ce que le phénomène physique soit représenté.

L'algorithme utilisé dans ESTEL-2D est basé sur une méthode proposée par Neuman (1973) puis modifiée par Rulon *et al.* (1985). La technique employée dans ESTEL-2D est basée sur les algorithmes originaux de Neuman et Rulon mais les deux schémas ont été fusionnés en un seul algorithme qui peut être résumé comme suit :

- un flux maximal est défini pour chaque nœud susceptible d'être sujet à de l'infiltration ou du suintement. Ce flux maximal représente la quantité d'eau maximale provenant de l'extérieur et pouvant s'infiltrer dans le domaine, l'intensité de la pluie par exemple ;
- une condition de Dirichlet  $h = 0$  est initialement imposée pour tous les nœuds saturés ;
- une condition de Neumann est initialement imposée pour tous les nœuds non saturés. Le flux imposé est le minimum entre le flux maximal (défini en 1) et le flux généré par drainage gravitaire pur ;
- dans le cas d'une simulation en régime non permanent, au lieu d'effectuer les étapes 1 et 2, la distribution des nœuds de type Neuman et Dirichlet pour le pas de temps  $t^n$  est utilisée pour initier l'algorithme au pas de temps  $t^{n+1}$  ;

– l'équation est résolue et les flux calculés pour chaque point de la frontière.

Ensuite l'algorithme scanne la frontière pour détecter :

– s'il existe des nœuds de type Dirichlet pour lesquels le flux calculé est entrant avec une valeur supérieure au flux maximal autorisé. Une condition de Neumann utilisant le flux maximal sera utilisée à la prochaine itération ;

– s'il existe des nœuds de type Neumann qui viennent de saturer et pour lesquels le flux imposé précédemment est inférieur au flux maximal. Une condition de Dirichlet  $h = 0$  sera alors utilisée pour l'itération suivante.

L'algorithme s'arrête quand la distribution des nœuds de type Neumann et Dirichlet s'est stabilisée ou après un nombre maximum d'itérations dans le cas où l'algorithme oscille entre deux positions voisines.

Bien qu'il soit difficile de justifier *a priori* la convergence de l'algorithme présenté ci-dessus, cette technique semble donner de bons résultats quant à la prédiction de surfaces de suintement. Le test de cet algorithme fait l'objet de la section 6 de cet article.

### 3. Discrétisation temporelle

L'équation de Richards étant non linéaire, sa résolution est généralement basée sur un schéma itératif. L'opération consiste à itérer successivement sur les valeurs de la teneur en eau et de la perméabilité relative jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit satisfait. A chaque pas de temps, le schéma itératif est initié en estimant la teneur en eau et la perméabilité relative à partir de la pression du pas de temps précédent. La pression hydraulique est alors recalculée, la teneur en eau et la perméabilité relative sont réévaluées puis l'équation de nouveau résolue. Le schéma itératif s'arrête quand la différence de pression hydraulique entre deux itérations satisfait un critère de convergence.

Plusieurs types de schémas itératifs sont envisageables (Huyakorn et Pinder 1983) mais le schéma de Picard semble le plus répandu de par sa facilité de programmation et sa robustesse. Celia *et al.* (1990) ont proposé une version modifiée du schéma de Picard qui a l'avantage d'être conservatif.

Dans cette section, le temps est noté en exposant. Le pas de temps entre les dates  $t^n$  et  $t^{n+1}$  est noté  $DT = t^{n+1} - t^n$ . Pour les itérations du schéma itératif, une deuxième série d'exposants est utilisée ;  $\theta^{ij}$  signifie la valeur de  $\theta$  à l'itération  $j$  pour le temps  $t^i$ . Après convergence du schéma itératif, la valeur retenue pour la teneur en eau sera notée simplement  $\theta^i$ .

Les hypothèses du schéma de Picard modifié sont les suivantes :

– la pression hydraulique  $h$  est remplacée dans l'équation initiale par sa forme implicite  $w_h h^{n+1,m+1} + (1 - w_h)h^n$  où  $w_h$  est le coefficient d'implicitation ;

- une approximation du type différences finies est utilisée pour le terme de teneur en eau dérivée par rapport au temps ;
- la valeur de la teneur en eau à l'itération  $m+1$  du schéma itératif est approximée par un développement fini du premier ordre.

$$\begin{cases} h = w_h h^{n+1,m+1} + (1-w_h)h^n \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\theta^{n+1,m+1} - \theta^n}{DT} \\ \theta^{n+1,m+1} = \theta^{n+1,m} + \left(\frac{d\theta}{dh}\right)^{n+1,m} \cdot (h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}) \end{cases} \quad [11]$$

En appliquant ces techniques à l'équation initiale [8], on obtient l'équation [12] qui n'a plus qu'une inconnue :  $h^{n+1,m+1}$ .

$$\begin{aligned} C^{n+1,m} \frac{(h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m})}{DT} - w_h k_r^{n+1,m} \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{K_s}}^{n+1,m} \underline{\nabla} (h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}) \\ = \underline{\nabla} \cdot k_r^{n+1,m} \underline{\underline{K_s}}^{n+1,m} \underline{\nabla} (w_h h^{n+1,m} + (1-w_h)h^n + z) \\ - \frac{\theta^{n+1,m} - \theta^n}{DT} + S^{n+1,m} \end{aligned} \quad [12]$$

$$\text{avec } C^{n+1,m} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial h}\right)^{n+1,m}.$$

L'équation [12] montre aussi que l'accroissement entre deux itérations  $\delta^{n+1,m} = h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}$  peut être avantageusement choisi comme l'inconnue du système final. Typiquement, quand l'accroissement  $\delta^{n+1,m}$  devient négligeable, le schéma itératif doit être stoppé.

Toute une variété de critères de convergence peut être utilisée pour arrêter le schéma itératif. Huang *et al.* (1996) ont cependant montré qu'il est judicieux d'introduire la capacité capillaire dans le critère de convergence comme le montre l'équation [13]

$$\left(\frac{d\theta}{dh}\right)^{n+1,m} \cdot |\delta^{n+1,m}| \leq \delta_0 \quad [13]$$

Ce critère de convergence est bien adapté au schéma de Picard modifié d'une part car la pression capillaire constitue la base du schéma de Picard modifié et d'autre part car il permet d'éviter des itérations inutiles et ainsi de diminuer les temps de calcul quand une partie du domaine d'étude est fortement désaturée et une faible variation de pression hydraulique a peu ou pas d'effet sur la teneur en eau.

#### 4. Discrétisation spatiale

Pour résoudre l'équation [12] nous utilisons la méthode des éléments finis de type Galerkin. ESTEL-2D a été développé au sein du système TELEMAC et le développement de la technique éléments finis dans ESTEL-2D a été grandement facilité par l'existence de la bibliothèque numérique BIEF (Hervouet 2000). De plus, les maillages non structurés comme les maillages de triangles utilisés par les codes de calcul du système TELEMAC sont très performants quand la géologie du milieu poreux est complexe, par exemple quand les couches de stratification ne sont pas parallèles.

Il faut cependant noter que la méthode des éléments finis telle qu'elle est décrite dans cette publication peut conduire à des erreurs lors de la dérivation du champ de vitesses. Mosé *et al.* (1994) ont démontré que la méthode des éléments finis peut générer des erreurs dans des milieux contenant d'importants contrastes de perméabilité (des contrastes de perméabilité supérieurs à  $10^5$ ). Ils recommandent l'utilisation d'éléments finis mixtes hybrides si de telles conditions sont rencontrées.

Le domaine initial est tout d'abord discrétisé sur un maillage  $\Omega$  contenant un nombre  $N$  de points. Soit  $(\varphi_i)_{i \in [1, N]}$  une base de  $\Omega$ , la technique de Galerkin permet d'obtenir une formulation variationnelle de l'équation de Richards en écrivant :

$$\forall \varphi \in (\varphi_j)_{j \in [1, N]} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \varphi d\Omega = \int_{\Omega} k_r \left[ \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{K}}_s \cdot \underline{\nabla}(h+z) \right] \varphi d\Omega + \int_{\Omega} S \varphi d\Omega \quad [14]$$

Le second membre de [14] contient un terme du deuxième ordre qui peut être linéarisé en utilisant le théorème de Green :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} k_r \left[ \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{K}}_s \cdot \underline{\nabla}(h+z) \right] \varphi d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} k_r \left[ \underline{\underline{K}}_s \cdot \underline{\nabla}(h+z) \right] \underline{\nabla} \varphi d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} \left[ k_r \underline{\underline{K}}_s \cdot \underline{\nabla}(h+z) \right] \underline{n} \varphi d\Gamma \end{aligned} \quad [15]$$

Enfin, l'intégrale sur la frontière dans [15] peut être exprimée en fonction des conditions aux limites

$$\int_{\Gamma} \left[ k_r \underline{\underline{K}}_s \cdot \underline{\nabla}(h+z) \right] \underline{n} \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma} (\underline{v}^b \cdot \underline{n}) \varphi d\Gamma \quad [16]$$

pour donner une formulation variationnelle pour l'équation de Richards :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \varphi d\Omega + \int_{\Omega} k_r \left[ \underline{\underline{K_s}} \cdot \underline{\nabla h} \right] \underline{\nabla} \varphi d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} (\underline{v^b} \cdot \underline{n}) \varphi d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} k_r \left( \underline{\underline{K_s}} \cdot \underline{\nabla z} \right) \underline{\nabla} \varphi d\Omega \\
& + \int_{\Omega} S \varphi d\Omega
\end{aligned} \tag{17}$$

Les mêmes techniques permettent aussi d'obtenir une formulation variationnelle de l'équation de Richards après discrétisation temporelle [18].

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{C^{n+1,m}}{DT} \delta^{n+1,m} \varphi d\Omega + \int_{\Omega} w_h k_r^{n+1,m} \left[ \underline{\underline{K_s}}^{n+1,m} \cdot \underline{\nabla} \delta^{n+1,m} \right] \underline{\nabla} \varphi d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} (\underline{v^b} \cdot \underline{n}) \varphi d\Gamma + \int_{\Omega} S^{n+1,m} \varphi d\Omega \\
& - \int_{\Omega} k_r^{n+1,m} \left( \underline{\underline{K_s}}^{n+1,m} \cdot \underline{\nabla z} \right) \underline{\nabla} \varphi d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\theta^{n+1,m} - \theta^n}{DT} \varphi d\Omega \\
& - \int_{\Omega} k_r^{n+1,m} \underline{\underline{K_s}}^{n+1,m} \cdot \underline{\nabla} \left[ (1 - w_h) h^n + w_h h^{n+1,m} \right] \underline{\nabla} \varphi d\Omega
\end{aligned} \tag{18}$$

Le caractère conservatif du schéma modifié de Picard peut être facilement démontré en additionnant les équations [18] écrites pour chaque fonction test  $\varphi_j$ . Etant donné que la méthode de Galerkin a été utilisée, la famille des  $\varphi_j$  forme une base du domaine  $\Omega$ , la somme précédente peut alors être simplifiée en utilisant les relations élémentaires  $\sum \varphi_j = 1$  et  $\sum \underline{\nabla} \varphi_j = 0$ . Il reste :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{C^{n+1,m}}{DT} \delta^{n+1,m} d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} (\underline{v^b} \cdot \underline{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} S^{n+1,m} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\theta^{n+1,m} - \theta^n}{DT} d\Omega
\end{aligned} \tag{19}$$

Après convergence du schéma itératif, le premier membre de l'équation [19] devient négligeable par définition même du critère de convergence.

L'expression finale

$$\int_{\Omega} \frac{\theta^{n+1,m} - \theta^n}{DT} d\Omega = \int_{\Gamma} (\underline{v}^b \cdot \underline{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} S^{n+1,m} d\Omega \quad [20]$$

est en fait l'expression de la conservation de la masse dans le domaine  $\Omega$  entre les pas de temps  $m$  et  $m+1$ .

Un système matriciel peut finalement être obtenu en projetant chaque fonction  $f$  sur la base du domaine  $\Omega : f = \sum f_i \phi_i$ . La bibliothèque de calcul BIEF propose des outils de construction de ce système matriciel ainsi que des méthodes d'inversion du système linéaire. Après inversion du système linéaire et calcul de la pression hydraulique, le champ de vitesse peut être dérivé en utilisant la loi de Darcy.

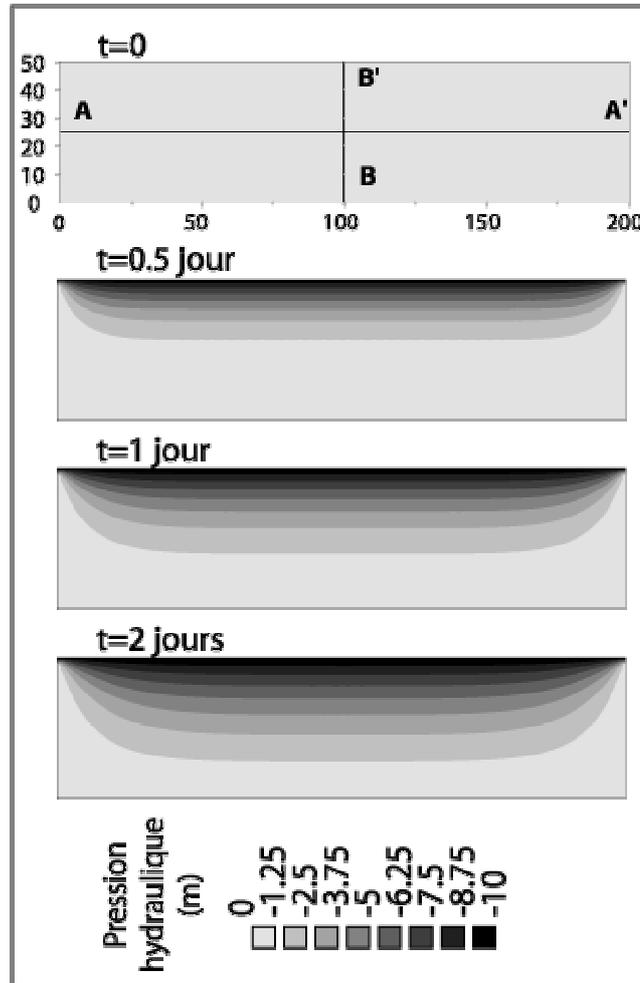
Bien que cette publication soit consacrée à ESTEL-2D, il est important de noter que tout ce développement a été fait dans le cas général sans limitation de dimension ni hypothèse sur les fonctions de bases. Le même raisonnement pourrait être utilisé pour résoudre l'équation de Richards sur un maillage tridimensionnel constitué de tétraèdres par exemple.

De plus, le type d'interpolation pour chaque grandeur physique peut-être choisi indépendamment des autres grandeurs. Dans ESTEL-2D la pression hydraulique est linéaire sur l'ensemble du domaine. On parle alors de fonctions de base P1. Par contre la perméabilité saturée utilise des fonctions de base P0 qui sont constantes par élément. Enfin, la teneur en eau et la perméabilité relative utilisent un troisième type de fonction de base : P1 discontinu. Ces fonctions P1 discontinu engendrent un espace de fonctions où chaque fonction est linéaire sur un élément donné mais la continuité n'est pas assurée lors du passage d'un élément à un autre. Cela permet de représenter les discontinuités observées dans la nature quand deux sols différents coexistent, la teneur en eau, par exemple, n'est pas forcément continue à l'interface bien que le terme de pression le soit.

## 5. Test du schéma itératif

L'équation de Richards étant fortement non linéaire en milieu non saturé, il existe peu de solutions analytiques permettant de tester la validité du schéma itératif. Tracy (1995) a montré qu'il est possible d'obtenir des solutions analytiques dans certains cas simples. Les conditions requises pour pouvoir calculer une telle solution analytique consistent à simplifier à l'extrême à la fois la géométrie du domaine considéré, les lois de sols ainsi que les conditions aux limites si bien que les cas test peuvent sembler un peu simplistes. Cependant, de telles solutions analytiques

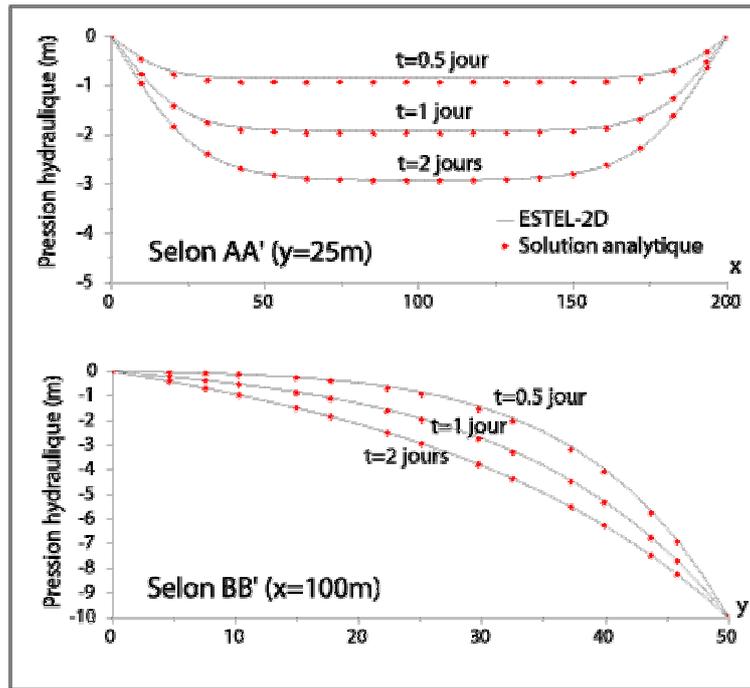
permettent de vérifier la mise en œuvre des algorithmes de base avant de tester le modèle sur des cas plus réalistes.



**Figure 1.** Distributions de pression hydraulique pour le cas test analytique de Tracy

Un des cas test développé par Tracy consiste en un domaine rectangulaire de 200 m de long et 50 m de haut. Initialement, la pression hydraulique est supposée uniforme et nulle dans tout le domaine. A  $t = 0$ , la condition à la limite sur la frontière supérieure du domaine est brusquement diminuée de 10 m. Le domaine draine alors par le haut comme le montre la figure 1.

Une simulation ESTEL-2D a été mise au point pour tester l'implémentation du schéma de Picard modifié. Les lois de sols utilisées pour cette simulation sont résumées dans le tableau 1. Deux jours de drainage ont été simulés en utilisant un pas de temps constant de *0.05 jour*. Le maillage utilisé est constitué d'environ 3 000 éléments.



**Figure 2.** Comparaison entre les résultats d'ESTEL-2D et la solution analytique

La figure 2 compare les résultats d'ESTEL-2D avec la solution analytique calculée par Tracy selon deux profils coupant le domaine en son milieu horizontalement et verticalement. Les résultats sont meilleurs en fin de simulation qu'en début où ESTEL-2D a tendance à drainer trop rapidement. Cela est dû à la discontinuité dans les conditions aux limites à  $t = 0$ . Utiliser un pas de temps plus faible règle en partie ce problème.

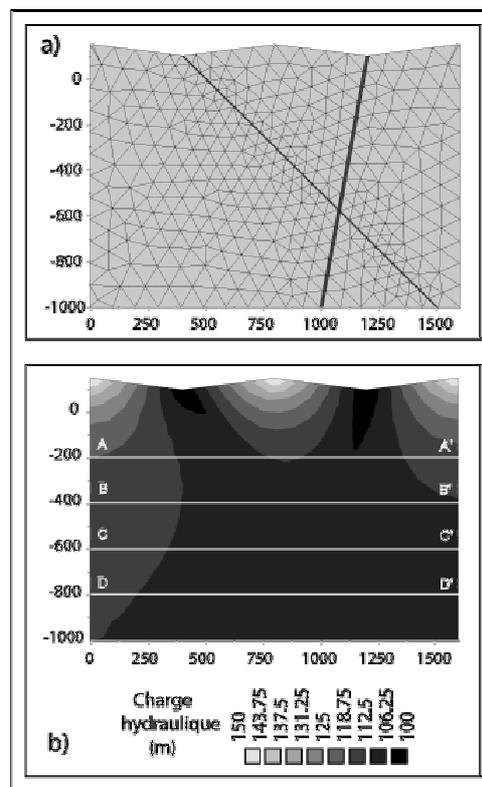
Teneur en eau	Perméabilité relative	Perméabilité saturée
$\theta(h) = 0.45 + 0.3 \frac{10}{10 -  h }$	$k_r(h) = \left( \frac{10}{10 -  h } \right)^2$	$K_s = 10 \text{ m/jour}$

**Tableau 1.** Lois de sols et perméabilité saturée utilisées pour le cas test Tracy

## 6. Test des fonctions de base

Le projet international HYDROCOIN (1988), supervisé par l'agence nucléaire suédoise, propose entre autres un recueil de cas tests pour les codes d'hydrogéologie.

Un de ces cas test consiste à simuler numériquement le régime permanent qui s'installe dans un milieu homogène traversé par deux failles de perméabilité plus importante que la roche environnante. Ce cas test a été sélectionné pour confirmer les choix de fonctions de bases dans ESTEL-2D.



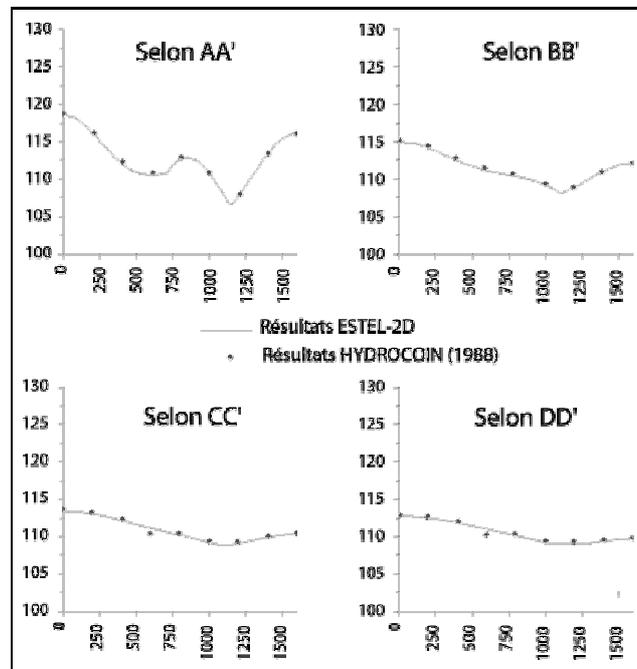
**Figure 3.** (a) Maillage et distribution de sols utilisés pour le cas test HYDROCOIN et (b) charge hydraulique calculée par ESTEL-2D

La simulation avec ESTEL-2D a été effectuée avec un maillage comprenant environ 450 nœuds. Les perméabilités utilisées sont de  $10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$  dans les fractures et  $10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$  dans le reste du domaine. Les conditions aux limites consistent en une charge hydraulique imposée égale à l'altitude sur la frontière supérieure et une condition de flux nul ailleurs. Le régime permanent a été calculé avec une option d'ESTEL-2D qui permet de retirer le terme temporel de l'équation de Richards. Le

schéma itératif n'est donc pas nécessaire dans cette configuration car tous les coefficients sont constants.

La géométrie complexe du domaine ne permet pas d'avoir de solution analytique, les résultats d'ESTEL-2D sont donc comparés à la solution type proposée par le groupe de travail HYDROCOIN. Cette solution type a été évaluée en utilisant les résultats de différents codes obtenus avec un maillage très fin (plus de 1 600 éléments).

La figure 4 compare les résultats d'ESTEL-2D avec la solution du cas test HYDROCOIN le long de quatre profils définis sur la figure 3. Il semble que les fonctions de bases utilisées par ESTEL-2D pour représenter perméabilité et pression hydrauliques soient adaptées aux calculs en milieux hétérogènes.



**Figure 4.** Comparaisons entre les résultats d'ESTEL-2D et les données publiées par le groupe de travail HYDROCOIN. Les profils AA' à DD' sont définis sur la figure 3

## 7. Test des surfaces de suintement

Rulon *et al.* (1985) ont construit un modèle physique permettant la génération d'une nappe perchée et de suintement. Le modèle consiste en une boîte de plexiglas de 2,44 m de long, 1 m de haut et 10 cm de large. La boîte est ensuite remplie de sable

selon la configuration illustrée sur la figure 5a. Deux types de sable ont été utilisés ; un sable grossier de perméabilité saturée  $1,4 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$  et un sable fin de perméabilité  $5,5 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$ . Les parois verticales et horizontales sont imperméables et la cote piézométrique est fixée à 30 cm au niveau du point A pour représenter une rivière. La partie plate en haut du domaine (BC) est alors arrosée avec une pluie constante de 1.26 cm/min et la pression dans le domaine mesurée avec un dispositif de 56 piézomètres. Avec ce dispositif, Rulon *et al.* ont observé du suintement en deux endroits : dans la partie inférieure du modèle, au niveau de l'exutoire à la rivière et juste au-dessus de la couche de sable fin.

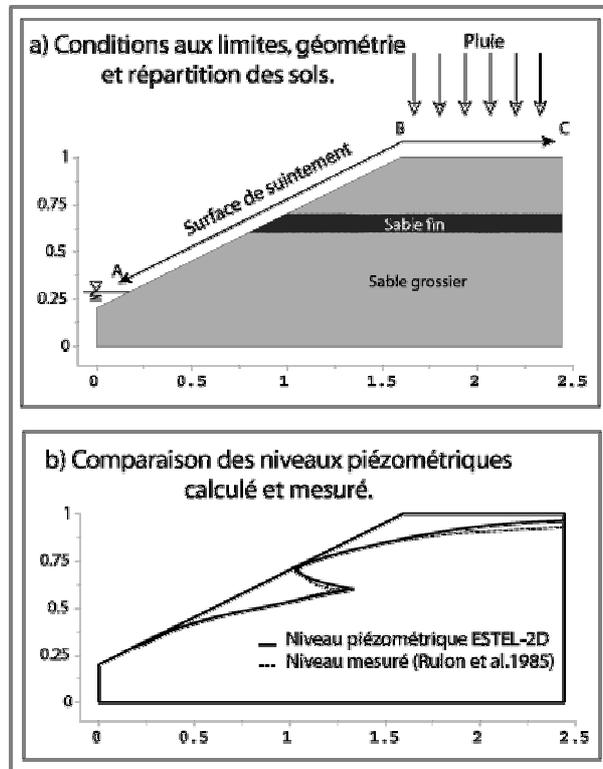
L'expérience a été simulée numériquement avec ESTEL-2D en utilisant des lois de sols de type Brooks et Corey (1966) (formule [21]) calibrées sur les données de Rulon *et al.* Les valeurs utilisées sont résumées dans le tableau 2.

$$\begin{cases} \theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \cdot \left( \frac{h_s}{|h|} \right)^\lambda \\ k_r = \left( \frac{h_s}{|h|} \right)^{3\lambda+2} \end{cases} \quad [21]$$

Sable fin			Sable grossier		
$\theta_s$	-	0.375	$\theta_s$	-	0.456
$\theta_r$	-	0.0446	$\theta_r$	-	0.045
$K_s$	$\text{m.s}^{-1}$	$5.5 \times 10^{-5}$	$K_s$	$\text{m.s}^{-1}$	$1.4 \times 10^{-3}$
$h_s$	m	0.9	$h_s$	m	0.124
$\lambda$	-	1.56	$\lambda$	-	1.9278

**Tableau 2.** Données utilisées pour la simulation de l'expérience de Rulon. Les paramètres  $h_s$  et  $\lambda$  sont utilisés par la loi de Brooks et Corey définie en [21]

Pour la simulation numérique, l'ensemble de la surface (AC) a été inclus dans une surface de suintement avec un flux égal aux précipitations pour la partie supérieure de la frontière (BC) et nul sur le reste (AB). Le niveau piézométrique a ensuite été extrait des résultats d'ESTEL-2D en traçant l'isobare  $h = 0$ . La figure 5b compare les niveaux piézométriques calculés par le modèle numérique et mesurés sur le modèle physique. La comparaison est dans l'ensemble bonne sauf pour le coin en haut à droite où ESTEL-2D surestime légèrement la cote piézométrique. Il est probable que cette différence est due aux lois de sols utilisées pour la simulation. La forme du niveau piézométrique et l'étendue du suintement prouvent cependant que l'algorithme proposé dans cette publication développe des surfaces de suintement réalistes et pourrait donc être utilisé pour générer des conditions aux limites pour des modèles d'écoulement de surface.



**Figure 5.** (a) Description du cas test et (b) comparaison du niveau piézométrique calculé par ESTEL-2D avec le niveau mesuré en laboratoire

## 8. Conclusions et perspectives

Cet article présente une introduction à la théorie des écoulements en milieu poreux conduisant à l'établissement de l'équation de Richards ainsi qu'une méthode de résolution par éléments finis en s'appuyant sur ESTEL-2D, un modèle numérique d'écoulements en milieux poreux intégré au système TELEMAC. Une sélection de trois cas tests permet de valider à la fois le schéma itératif en milieu non saturé, l'utilisation du modèle en milieu hétérogène et l'implémentation de conditions à la limite complexes du type suintement. L'intégration d'ESTEL-2D dans le système TELEMAC est un avantage décisif pour les applications d'ESTEL-2D à des études. Par exemple le champ des vitesses généré par ESTEL-2D a déjà été utilisé pour des simulations de transport réactif lors d'études de sûreté de stockage de déchets nucléaires (Lucille *et al.*, 2000) avec le logiciel de transport SUBIEF-2D lui aussi dans le système TELEMAC. Claxton *et al.*, (à paraître) ont aussi utilisé une combinaison de codes ESTEL-2D / SUBIEF-2D pour des simulations de mélange des

eaux de pluie avec les eaux souterraines lors de crues. Plus récemment, Stoeckel (le présent numéro) a montré que le champ de pression peut aussi être exploité par une approche CVFE pour résoudre l'équation de transport.

Les prédictions de suintement sur le cas test Rulon permettent de penser qu'ESTEL pourrait aussi être utilisé comme le module souterrain d'un modèle couplé surface-souterrain, en utilisant par exemple le code TELEMAT-2D. Un tel couplage demanderait néanmoins un module souterrain tridimensionnel. Une version tridimensionnelle d'ESTEL, ESTEL-3D, est actuellement en cours de développement. Toute la partie numérique de cet article (schéma itératif, discrétisation par éléments finis) peut être utilisée directement mais une extension des algorithmes de suintement à la troisième dimension semble être une étape importante pour les modèles numériques d'écoulements en milieu poreux.

## 9. Bibliographie

- Brooks R. H., Corey A. T., "Properties of porous media affecting fluid flow. Journal of Irrigation and Drainage Division", *Proceeding of the America Society of Civil Engineers* 92, 61-88, 1966.
- Celia M. A., Bouloutas E. T., Zarba R. L., "A general mass conservative solution for the unsaturated flow equation", *Water Resources Research* 26, 1483-1496, 1990.
- Claxton A. J., Bates P. D., Cloke H. L., (in press), Mixing of hillslope, river and alluvial groundwaters in lowland floodplains, *Groundwater*.
- Darcy H., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Dalmont, Paris (France), 1856.
- de Marsilly G., *Hydrogéologie: comprendre et estimer les écoulements souterrains*, Ecole des Mines de Paris, Paris (France), 1994.
- Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P. J., Vachaud G., "A comparison of numerical simulation models for one dimensional infiltration", *Soil Science Society of America Journal* 41 : 285-294, 1977.
- Hervouet J.-M., *Guide de programmation dans le système TELEMAT - Version 3.1*, HE-43/95/013/B, EDF, Chatou (France), 1995.
- Hervouet J.-M., TELEMAT "Modelling system: an overview", *Hydrological Processes* 14 : 2209-2210, 2000.
- Huang K., Mohanty B. P., Van Genuchten M. T., "A new convergence criterion for the modified Picard iteration method to solve the variably saturated flow equation", *Journal of Hydrology*, 178 : 1483-1496, 1996.
- Huyakorn P. S., Pinder G. E., *Computational Methods in Subsurface flow*, Academic Press, New-York, 1983.
- Lucille P.-E., Burnol A., Ollar Ph., "Chemtrap : a hydrogeochemical model for reactive transport in porous media", *Hydrological Processes*, 14; 2261-2277, 2000.

- McCord J. T., "Application of second type boundaries in unsaturated flow modelling", *Water Resources Research*, 27 : 3257-3260, 1991.
- Mosé R., Siegel P., Ackerer P., Chavent G., "Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: luxury or necessity ?" *Water Resources Research*, 30 : 3001-3012, 1994.
- Neuman S. P., "Saturated-unsaturated seepage by finite elements", *Journal of the Hydraulic Division*, 99 : 2233-2250, 1973.
- Rulon J., Rodway R. and Freeze R. A., "The development of multiple seepage faces on layered slopes", *Water Resources Research*, 21 : 1625-1636, 1985.
- Stoeckel M.E., « Résolution de l'équation de transport en milieu poreux par un schéma CVFE », *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 12, n°2-3/2003, p.191-202.
- Swedish Nuclear Power Inspectorate, and OECD Nuclear Energy Agency, 1988, The International HYDROCOIN project. Level 1, Code verification : groundwater hydrology modelling strategies for performance assessment of nuclear waste disposal, Nuclear Energy Agency, Organisation for Economic Co-operation and Development, Paris.
- Tracy F. T., "1-D, 2-D and 3-D analytical solutions of unsaturated flow in groundwater", *Journal of Hydrology*, 170 : 199-214, 1995.
- Van Genuchten M. T., "A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils", *Soil Science Society of America Proceedings*, 14 : 892-898, 1980.
- Van Genuchten M. T., Nielsen D. R., "On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils", *Annales Geophysicae*, 3 : 615-628, 1985.
- Zauderer E., *Partial differential equations of applied mathematics*, second edition, John Wiley, 1983.