
Simulation de la propagation des vagues à l'aide d'un modèle de type Boussinesq étendu

Khouane Meftah * — **Philippe Sergent** ** — **Patrick Gomi** **

* *Université de Technologie de Compiègne*
Rue Personne de Roberval
F-60 200 Compiègne
Khouane.Meftah@utc.fr

** *Centre d'Etudes Techniques Maritimes Et Fluviales*
2, boulevard Gambetta BP 60 039
F-60 321 Compiègne cedex
{Philippe.Sergent, Patrick.Gomi} @equipement.gouv.fr

RÉSUMÉ. Un nouveau type de modèle de Boussinesq a été développé en décomposant les composantes horizontales de la vitesse sur une série de fonctions. L'objet de cet article est d'abord de présenter les bases théoriques de ce modèle aux éléments finis et d'étudier son comportement fréquentiel. Grâce à une bonne représentation de la relation de dispersion, le modèle simule avec précision la déformation des ondes au passage d'une barre asymétrique. L'adaptation des frontières faiblement réfléchissantes ou conditions de radiation de Sommerfeld à ce type de modèle est ensuite présentée, ainsi que leurs limites d'utilisation pour un signal constitué de plusieurs harmoniques. Les erreurs de réflexion provenant d'une frontière activement absorbante sont enfin évaluées.

ABSTRACT. A new type of extended Boussinesq model has been developed by decomposing each horizontal component of velocity on a basis of functions. The aim of this paper is firstly to present the theoretical bases of this finite elements model and to study his frequency behaviour. Thanks to a good approximation of the dispersion equation, this model simulates the deformation of waves over an asymmetric bar with accuracy. The adaptation of the weakly reflecting boundary or radiation conditions of Sommerfeld to this kind of model is then presented with their limits for a signal composed of several harmonics. Reflection errors coming from an active absorbing boundary are then assessed.

MOTS-CLÉS : modèle de Boussinesq, comportement fréquentiel, équation de dispersion, frontière ouverte, frontière faiblement réfléchissante, frontière activement absorbante.

KEYWORDS: Boussinesq-like model, frequency behaviour, dispersion equation, open boundary, weakly reflecting boundary, active absorbing boundary.

1. Introduction

Les équations de Boussinesq [BOU 72] représentent une intégration sur la verticale des équations de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de la masse pour un fluide incompressible. La composante verticale de la vitesse est supposée alors varier linéairement en fonction de la profondeur afin de réduire un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Les équations de Boussinesq permettent de prendre en compte le transfert d'énergie entre plusieurs composantes fréquentielles, les changements de forme de vagues individuelles et l'évolution d'un groupe de vagues aléatoires. La limitation principale de la forme la plus commune des équations de Boussinesq est qu'elles ne sont valables que pour des hauteurs d'eau relativement faibles. Pour obtenir une erreur sur la vitesse de phase inférieure à 5%, la hauteur d'eau doit être plus petite que $1/5^{\text{ième}}$ de la longueur d'onde équivalente en eau profonde [COW 87]. Récemment, de nombreux modèles dérivés des équations initiales de Boussinesq ont été développés afin d'étendre le domaine de validité des équations initiales à des eaux plus profondes et la plupart du temps en améliorant l'équation de dispersion de la houle.

Witting [WIT 84] présenta des équations de Boussinesq modifiées valides pour une seule dimension horizontale et exprimées en fonction de la vitesse à la surface libre. Il utilisa un développement de Padé de la relation de dispersion, exprimant le rapport $c^2/(gd)$ en fonction du paramètre $a = (kd)^2$. Ce développement de Padé permet de rajouter des dérivées d'ordre au plus 3 dans les équations de Boussinesq. Witting obtint de relativement bons résultats pour des eaux profondes, mais aussi peu profondes. Cependant, les équations obtenues pour une dimension horizontale ne peuvent être étendues à un modèle à deux dimensions horizontales et de plus, les équations modifiées proposées par Witting ne sont valables que sur un fond plat. Murray [MUR 89] et Madsen *et al.* [MAD 91] repartirent de ce développement de Padé d'ordre 1, mais rajoutèrent à une des équations modifiées de Boussinesq un terme d'ordre 3 provenant des équations pour ondes longues et s'annulant pour des ondes en eau peu profonde.

Une autre méthode est maintenant couramment utilisée pour obtenir des équations étendues de Boussinesq. Elle consiste à exploiter la théorie linéaire des équations différentielles partielles. Après avoir développé la relation de dispersion en utilisant par exemple un développement de Padé, on remplace k par l'opérateur $i\partial/\partial x$ et ω par $i\partial/\partial t$. Dans le cas d'un développement de Padé d'ordre 1 en $(kd)^2$ on obtient des dérivées d'ordre 3 du même ordre que ceux obtenus dans les modèles étendus de Boussinesq précédents, mais avec un bien meilleur comportement en fréquence. Nwogu [NWO 93] introduit un paramètre b dépendant de la profondeur dans son développement de Padé d'ordre 1 qu'il trouve optimal pour une valeur de b valant $1/15$. Un développement de Padé d'ordre 2 en $(kd)^2$ permet un excellent comportement en fréquence, mais en contrepartie oblige à introduire des dérivées d'ordre 5 dans les équations étendues de Boussinesq ce qui rend les algorithmes de calcul beaucoup moins stables. Schäffer *et al.* [SCH 93] ont conçu un modèle de Boussinesq étendu s'appuyant sur un développement de Padé d'ordre 2, mais ne nécessitant l'ajout que de dérivées d'ordre 3 au plus. Cette réduction d'ordre se fait par l'ajout de 4 para-

mètres ajustables que les auteurs déterminèrent en utilisant une méthode des moindres carrés pour kd compris entre 0 et 5. Des modèles de Boussinesq d'ordre élevé ont aussi été proposés notamment par Gobbi et Kennedy [GOB 99]. Ces derniers donnent de très bons résultats. Ils demandent cependant des extensions analytiques complexes, qui sont difficiles à généraliser. Il est important de rappeler que tous les modèles de Boussinesq étendus sont asymptotiquement équivalents en faible profondeur, mais ont des domaines de validité différents. Le fait d'améliorer le comportement dispersif des modèles de Boussinesq étendus améliore leur validité en eau plus profonde. Ce fait fut mis en valeur par une étude comparative des modèles étendus de Boussinesq [DIN 97] qui mit en évidence le fait que les modèles qui traitent le mieux la dispersion sont aussi les modèles les plus performants, ce qui montre l'importance d'une bonne relation de dispersion pour ces modèles. Le modèle hydrodynamique tridimensionnel Reflux 3D développé par Meftah [MEF 98] adopte une approche novatrice, dite $h - s$ [MEF 99], permettant d'engendrer implicitement une très bonne approximation de la relation de dispersion.

Dans le domaine hydraulique, les dimensions horizontales sont dominantes par rapport à la dimension verticale et cette nouvelle approche consiste alors à donner un traitement particulier aux variables selon la verticale : le modèle s'appuie sur une approximation aux éléments finis dans le plan horizontal (Oxy) et sur une approximation de type analytique (séries de fonctions) suivant la verticale (Oz). C'est une approche assez voisine de celle adoptée par Nadaoka *et al.* [NAD 94] qui choisissent une base de fonctions hyperboliques suivant la verticale. Dans cette approche, il n'y a plus de maillage du domaine tridimensionnel, mais chaque verticale est remplacée par un seul nœud très enrichi en degrés de liberté. En choisissant pour fonctions les polynômes de Legendre, ce modèle peut alors être classé comme un modèle du type Boussinesq étendu. Dans cet article, nous montrons, à partir d'essais physiques en canal à houle réalisés à Delft Hydraulics [DIN 94], qu'un nombre égal à trois de polynômes de Legendre sur la verticale est nécessaire et suffisant pour retrouver l'évolution de la cote de la surface libre avec une bonne précision.

L'objet de cet article est aussi de présenter le traitement des frontières ouvertes à l'aide de conditions de radiation pour ce nouveau type de modèle. Wei *et al.* [WEI 95] recommandent de combiner plusieurs méthodes pour le traitement des frontières ouvertes des modèles de Boussinesq : la méthode avec couches amortissantes et la méthode avec conditions de radiation. Les couches amortissantes consistent à étendre le domaine de calcul sur une certaine épaisseur et à y ajouter des termes d'amortissement dans l'équation de quantité de mouvement. Pour obtenir un coefficient de réflexion suffisamment faible, les couches amortissantes doivent avoir une épaisseur de deux ou trois longueurs d'onde. Troch et De Rouck [TRO 98] ont testé deux fonctions d'absorption pour une couche amortissante avec un modèle de type Volume Of Fluid (VOF). L'inconvénient de cette méthode étant la nécessité d'étendre le domaine de calcul et donc le temps de calcul, ils ont étudié le coefficient de réflexion obtenu pour des couches particulièrement minces (entre 0,4 et 0,6 fois la longueur d'onde). Le coefficient de réflexion reste alors supérieur à 20 %. Les conditions de radiation appliquées aux frontières ouvertes sont en général la condition de radiation de Sommer-

feld, dite de frontière faiblement réfléchissante. Cette condition considère que l'onde sortante se propage à la frontière avec une célérité connue sans changer de forme. De meilleures approximations pour des incidences obliques ont été introduites par Engquist et Majda [ENG 77]. Van Dongeren et Svendsen [DON 97] étendent ces travaux aux équations bidimensionnelles non linéaires des ondes longues et leurs tests montrent que la condition aux limites développée produit moins d'erreurs de réflexion que la condition de Sommerfeld, en particulier pour les ondes obliques. Nous ne nous intéresserons pas dans cet article aux ondes obliques, mais seulement aux ondes d'incidence frontale. La frontière faiblement réfléchissante reste néanmoins un problème délicat pour les houles irrégulières. Les modèles de houle de type Boussinesq (et en particulier le modèle Reflux 3D) ayant une dispersion fréquentielle, la condition aux limites doit comporter des dérivées temporelles d'ordre d'autant plus grand que la relation de dispersion est précise. Or la présence de ces dérivées temporelles de grand ordre a tendance à rendre le modèle instable. Pour assurer la condition de radiation, nous avons donc choisi ici de tester une frontière activement absorbante. Troch et Rouck [TRO 99] ont testé avec succès cette technique pour un modèle de type VOF pour obtenir la surface libre. La cote de la surface libre (ou la vitesse) est relevée à l'intérieur du domaine de calcul. La cote de la surface libre à imposer comme condition aux limites à la frontière ouverte est ensuite calculée à l'aide d'un filtre digital. Ce filtre digital est appliqué en utilisant une convolution d'une réponse impulsionnelle finie et de la cote précédemment relevée. Dans cet article, nous rappelons les conditions de radiation associées pour une houle régulière. Nous présentons ensuite les erreurs de réflexion obtenues avec la frontière faiblement réfléchissante lorsqu'il y a génération d'harmoniques. Les erreurs de réflexion provenant d'une frontière activement absorbante sont aussi évaluées. Les deux méthodes sont ensuite appliquées sur la frontière ouverte aval du cas-test de la barre trapézoïdale en canal à houle.

2. Equations de base

Même si les équations sont généralement écrites dans l'espace tridimensionnel, nous nous contentons ici de les présenter dans un domaine bidimensionnel vertical plan. Les lois de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, exprimées dans le repère Oxz , dans un domaine bidimensionnel vertical plan, s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad [1]$$

où les variables p , u , w représentent respectivement la pression et les composantes horizontale et verticale de la vitesse. L'accélération gravitationnelle est notée g et la masse du fluide ρ .

La pression s'écrit à partir de la pression atmosphérique à la surface libre et de sa composante non-hydrostatique $\rho p'$:

$$p = \rho g(h - z) + p_{atm} + \rho p' \quad [2]$$

La condition cinématique à la surface libre s'écrit, avec h la cote de la surface libre, et (u_s, w_s) les composantes de la vitesse à la surface libre :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} - w_s = 0 \quad [3]$$

La condition dynamique à la surface libre s'écrit :

$$p(x, h) = p_{atm} \quad [4]$$

d'où $p'(x, h) = 0$.

La condition d'imperméabilité sur le fond s'écrit, avec z_f la cote du fond, et (u_f, w_f) les composantes de la vitesse au fond :

$$u_f \frac{\partial z_f}{\partial x} - w_f = 0 \quad [5]$$

3. Méthode h-s

Le principe de la méthode $h - s$ est d'exprimer la composante horizontale de la vitesse sous la forme d'une série sur la verticale :

$$u = \phi_i(z) u_i(x, t) \quad [6]$$

où l'on adopte la notation $A_i B_i$ comme la somme $\sum_{i=1}^N A_i B_i$ avec N l'ordre de discrétisation sur la verticale. On procède aussi à un changement de variable pour se ramener à un intervalle $[-1, 1]$ pour la variable z :

$$\phi_i(z) = \Phi_i \left(\frac{2}{d}(z - z_f) - 1 \right) \quad [7]$$

avec $\Phi_i(\xi) = \sqrt{2i - 1} P_i(\xi)$ et $d = h - z_f$.

Les polynômes $P_i(\xi)$ sont les polynômes de Legendre, dont les propriétés principales sont :

$$P_1(\xi) = \xi, P_i(\xi) = \frac{1}{(i-1)! 2^{i-1}} \frac{d^{i-1}(\xi^2 - 1)^{i-1}}{d^{i-1} \xi}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_i(\xi) P_j(\xi) d\xi = \frac{\delta_{ij}}{2i-1} \quad [8]$$

soit

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_i(\xi) \Phi_j(\xi) d\xi = \delta_{ij} \quad [9]$$

3.1. Equation de conservation de la masse

L'intégration de l'équation de conservation de la masse (1) de la cote du fond à la surface libre donne l'équation suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad [10]$$

$$\text{avec } q = \int_{z_f}^h u dz$$

3.2. Expression de la composante verticale de la vitesse

L'intégration de l'équation de conservation de la masse (1) de la cote du fond à la cote z donne l'expression de la composante verticale de la vitesse w :

$$\int_{z_f}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0 \quad [11]$$

$$w - w_f = - \int_{z_f}^z \phi_i(z) \frac{\partial u_i}{\partial x} dz = 0 \quad [12]$$

$$w - w_f = -\psi_i(z) w_i \quad [13]$$

$$\text{avec } \psi_i(z) = \int_{z_f}^z \phi_i(z) dz \text{ et } w_i = -\frac{\partial u_i}{\partial x}$$

3.3. Expression de la pression non-hydrostatique

Réécrivons l'équation de conservation de la composante verticale de la quantité de mouvement (1) à partir de la pression non-hydrostatique p' :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \quad [14]$$

En intégrant cette équation de la cote z à la surface libre et en appliquant (12), on obtient :

$$p' = \theta_i(z) \frac{\partial w_i}{\partial t} + s_{ij}(z) \left(u_i \frac{\partial w_j}{\partial x} + w_i w_j \right) + (h-z) \frac{\partial w_f}{\partial t} + g_i(z) \left(u_i \frac{\partial w_f}{\partial x} + w_i w_f \right) \quad [15]$$

avec

$$\theta_i(z) = \int_z^h \psi_i(z) dz \quad [16]$$

$$g_i(z) = -\psi(z) + \int_z^h \phi_i(z) dz \quad [17]$$

$$s_{ij}(z) = \int_z^h \phi_i(z) \psi_j(z) dz \quad [18]$$

3.4. Système à résoudre

Le système à résoudre devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad [19]$$

avec

$$p = \rho g(h-z) + p_{atm} + \rho p' \quad [20]$$

$$q = \int_{z_f}^h u dz \quad [21]$$

où les variables u, w et p' vérifient les équations (6), (13) et (15) respectivement.

4. Résolution par la méthode des éléments finis

4.1. Formulation variationnelle

En combinant les équations (1), (2) et (10), on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad [22]$$

La formulation faible associée s'écrit sur le domaine rectangulaire vertical $A = L \times [z_f, h]$:

$$\int_A \int \delta u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} \right) dx dz + \int_L \delta h \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx = 0 \quad [23]$$

où δh et δu sont des fonctions de pondération s'exprimant sous forme de séries :

$$\delta u(x, z) = \phi_i(z) \delta u_i(x) \quad [24]$$

En intégrant le premier terme de l'équation (23) suivant z , on obtient :

$$\int_L \delta U \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (q^c + G) + f \right\} dx = 0 \quad [25]$$

avec le vecteur test δU et le vecteur inconnu U :

$$\delta U = \begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta h \end{Bmatrix} \quad U = \begin{Bmatrix} a_{ij} u_j \\ h \end{Bmatrix} \quad [26]$$

$$F = \begin{Bmatrix} p_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + x_{ij} \frac{\partial z_f}{\partial x} u_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [27]$$

$$q^c = \begin{Bmatrix} b_{ijk} u_j u_k + \sigma_i g h \\ q \end{Bmatrix} \quad [28]$$

$$G = \begin{Bmatrix} q_{ijk} \left(-u_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{ijk} \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} u_j \frac{\partial u_k}{\partial x} - \frac{\partial z_f}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} u_k + \frac{\partial^2 z_f}{\partial x^2} u_j u_k \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [29]$$

$$f = \left\{ \begin{array}{l} c_{ijk} u_j \frac{\partial u_k}{\partial x} + d_{ijk} \frac{\partial z_f}{\partial x} u_j u_k \\ 0 \end{array} \right\} \quad [30]$$

Les expressions suivantes sont pré-calculées :

$$a_{ij} = \frac{1}{d} \int_{z_f}^h \phi_i \phi_j dz \quad b_{ijk} = \frac{1}{d} \int_{z_f}^h \phi_i \phi_j \phi_k dz \quad [31]$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{d} \int_{z_f}^h \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \psi_k dz \quad d_{ijk} = \frac{\phi_k(z_f)}{d} \int_{z_f}^h \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dz \quad [32]$$

$$p_{ij} = -\frac{1}{d} \int_{z_f}^h \phi_i \theta_j dz \quad [33]$$

$$r_{ijk} = \frac{\phi_k(z_f)}{d} \int_{z_f}^h \phi_i g_j dz \quad x_{ij} = \frac{\phi_j(z_f)}{d} \int_{z_f}^h \phi_i(z)(h-z) dz \quad [34]$$

$$q_{ijk} = \frac{1}{d} \int_{z_f}^h \phi_i s_{jk} dz \quad \sigma_i = \frac{1}{d} \int_{z_f}^h \phi_i dz \quad [35]$$

4.2. Discrétisation temporelle : schéma de Lax-Wendroff

La précision de la modélisation numérique, dépend de la performance du schéma de discrétisation temporelle, car ce dernier ne doit pas dégrader l'approximation spatiale. Les schémas implicites sont réputés stables, mais ils ne sont pas conservatifs à cause de leur diffusion numérique. Les schémas explicites conviennent mieux pour ce genre de problèmes, mais il faut qu'ils engendrent un minimum de dispersion. Pour notre modèle numérique, nous avons opté pour le schéma explicite, centré de Lax-Wendroff, dont la discrétisation s'écrit :

$$U^{n+1} + \frac{\partial F^{n+1}}{\partial x} = U^n + \frac{\partial F^n}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left((q^c)^{n+1/2} + G^n \right) - \Delta t f^n \quad [36]$$

$$W = \int_L \left(\delta U \Delta U - \frac{\partial \delta U}{\partial x} \Delta F + \Delta t \delta U f^n - \Delta t \frac{\partial \delta U}{\partial x} \left((q^c)^{n+1/2} + G^n \right) \right) dx$$

$$+ \Delta t \left[\delta U \left((q^c)^{n+1/2} + G^n \right) \right]_0^L + [\delta U \Delta F]_0^L = 0 \quad [37]$$

où ΔU et ΔF sont respectivement $(U^{n+1} - U^n)$ et $(F^{n+1} - F^n)$.

$$(q^c)^{n+1/2} = \left\{ \begin{array}{l} b_{ijk} u_j u_k + \sigma_i g h \\ q \end{array} \right\}^{n+1/2} \quad [38]$$

La valeur de $U^{n+1/2}$ est obtenue sur chaque point de l'élément ou sur chaque point d'intégration numérique.

$$U^{n+1/2} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial q^c}{\partial x} \right)^n \quad [39]$$

La discrétisation par éléments finis conduit au système algébrique :

$$\begin{aligned} [M] \{ \Delta U \} &= \{ R \} \\ [M] &= \sum_{\text{éléments}} [m_e] \end{aligned} \quad [40]$$

$[m_e]$ est la matrice masse élémentaire associée à la forme faible :

$$W_m^e = \int_{L_e} \left(\delta U \Delta U - \frac{\partial \delta U}{\partial x} \Delta F \right) dx \quad [41]$$

$$\{ R \} = \{ R^L \} + \{ R^c \} \quad [42]$$

$$\{ R^L \} = \sum_{\text{éléments}} \{ r_e \} \quad [43]$$

$\{ r_e \}$ est le résidu élémentaire associé à la forme faible :

$$W_r^e = - \int_L \left(\delta U f^n - \frac{\partial \delta U}{\partial x} \left((q^c)^{n+1/2} + G^n \right) \right) dx \quad [44]$$

$\{ R^c \}$ est le résidu de contour associé à l'expression :

$$W^c = -\Delta t \left[\delta U \left((q^c)^{n+1/2} + G^n \right) - [\delta U \Delta F]_0^L \right]_0^L \quad [45]$$

L'expression de $U^{n+1/2}$ est donnée par l'équation (39), la valeur de U^n est calculée sur le nœud. Par contre la quantité $\frac{\partial q^c}{\partial x}$ est calculée sur les éléments adjacents.

4.3. Algorithme

Les différentes étapes pour le schéma de Lax-Wendroff sont les suivantes :

Boucle sur les pas de temps

Boucle sur les éléments

calculer la matrice $[m_e]$ (équation (41))

calculer $u^{n+1/2}$ (équation (39))

calculer $(q^c)^{n+1/2}$ (équation (38))

calculer le résidu $\{r\}$ (équation (44))

assembler la matrice masse et le vecteur résidu

Fin de la boucle sur les éléments

calculer le résidu $\{R^c\}$ et assemblage (équation (45))

résolution itérative du système $[M] \{\Delta U\} = \{R\}$

appliquer les conditions aux limites

mettre à jour la solution

Fin de la boucle sur les pas de temps

Le cas-test, présenté ci-dessous, est résolu avec 601 nœuds, un pas d'espace Δx égal à 0.05 m, un pas temporel égal à 0.01 s, sur une durée de 30 s. Sur un Pentium 2, 400 MHz, les temps de calcul sont de 118 s, 165 s et 268 s pour des approximations d'ordre 1, 2 et 3 respectivement.

5. Equation sur fond plat et dispersion des ondes

Nous reprenons les équations (19) et considérons une propagation sur un fond plat avec une hauteur de houle suffisamment petite pour que les équations puissent être linéarisées :

$$\begin{cases} u &= \phi_i(z) u_i(x, t) \\ p' &= -\theta_i(z) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} \end{cases} \quad [46]$$

Remplaçant (22) dans le système (19), nous obtenons :

$$\begin{cases} \phi_i(z) \frac{\partial u_i}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = \theta_i(z) \frac{\partial^3 u_i}{\partial t \partial^2 x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \psi_i(h) \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad [47]$$

Utilisons le changement de variables qui transforme z en ξ :

$$\begin{cases} \Phi_i(\xi) \frac{\partial u_i}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = \Theta_i(\xi) \frac{\partial^3 u_i}{\partial t \partial^2 x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \Psi_i(1) \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad [48]$$

avec

$$\begin{cases} \Psi_i(\xi) = \frac{d}{2} \int_{-1}^{\xi} \Phi_i(\xi) d\xi \\ \Theta_i(\xi) = \frac{d}{2} \int_{\xi}^{-1} \Psi_i(\xi) d\xi \\ r_{ij}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\xi} \Theta_i(\xi) \Phi_j(\xi) d\xi \end{cases} \quad [49]$$

En appliquant l'opérateur $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_j(\xi) (*) d\xi$ à la première équation de (48), le système devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial t} + g \frac{\Psi_j(1)}{d} \frac{\partial h}{\partial x} = r_{ij}(1) \frac{\partial^3 u_i}{\partial t \partial^2 x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \Psi_i(1) \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad [50]$$

5.1. Calcul de l'équation de dispersion

Nous cherchons des solutions de la forme $u_i = \mathbf{u}_i e^{j(kx - \omega t)}$ et $h = \mathbf{h} e^{j(kx - \omega t)}$. Nous omettons la notation (1) pour $\Psi_i(1)$ et $r_{ij}(1)$:

$$\begin{bmatrix} -\omega(1+k^2 r_{11}) & \dots & -\omega k^2 r_{i1} & \dots & -\omega k^2 r_{N1} & gk \frac{\Psi_1}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\omega k^2 r_{1j} & \dots & -\omega(1+k^2 r_{ij}) & \dots & -\omega k^2 r_{Nj} & gk \frac{\Psi_j}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\omega k^2 r_{1N} & \dots & -\omega k^2 r_{iN} & \dots & -\omega(1+k^2 r_{NN}) & gk \frac{\Psi_N}{d} \\ gk \frac{\Psi_1}{d} & \dots & gk \frac{\Psi_i}{d} & \dots & gk \frac{\Psi_N}{d} & -\omega \frac{d}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_j \\ \dots \\ \mathbf{u}_N \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [51]$$

Nous cherchons maintenant des solutions non- nulles du système précédent. Il faut donc que le déterminant de la matrice soit nul. Sachant que $\Psi_i = d\delta_{i1}$, nous obtenons l'équation de dispersion suivante :

$$\omega^2 Det(\mathbf{I} + k^2 d^2 \mathbf{R}^1) = k^2 g d Det(\mathbf{I} + k^2 d^2 \mathbf{R}^2) \quad [52]$$

avec $R_{ij}^1 = \frac{1}{d^2} r_{ij}$ de taille $N \times N$ et $R_{ij}^2 = \frac{1}{d^2} r_{i+1 j+1}$ de taille $N-1 \times N-1$.

5.2. Application pour N égal à 3

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi) = 1 \\ \Phi_2(\xi) = \sqrt{3} \xi \\ \Phi_3(\xi) = \frac{\sqrt{5}}{2}(3\xi^2 - 1) \end{cases} \quad [53]$$

$$\begin{cases} \Psi_1(\xi) = \frac{d}{2}(\xi + 1) \\ \Psi_2(\xi) = \frac{d}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi^2 - 1) \\ \Psi_3(\xi) = \frac{d}{2} \frac{\sqrt{5}}{2}(\xi^3 - \xi) \end{cases} \quad [54]$$

$$\begin{cases} \Theta_1(\xi) = -\frac{d^2}{4} \frac{1}{2}(\xi^2 + 2\xi - 3) \\ \Theta_2(\xi) = -\frac{d^2}{4} \frac{\sqrt{3}}{6}(\xi^3 - 3\xi + 2) \\ \Theta_3(\xi) = -\frac{d^2}{4} \frac{\sqrt{5}}{8}(\xi^4 - 2\xi^2 + 1) \end{cases} \quad [55]$$

Pour $N = 3$, la matrice \mathbf{R}^1 est égale à :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{5}}{60} \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{60} & 0 & \frac{1}{42} \end{bmatrix} \quad [56]$$

En notant $C = \frac{\omega}{k}$, $C_0^2 = gd$ et $C_h^2 = \omega^2 d^2$ avec N variant de 1 à 3, les formules de dispersion et les vecteurs propres avec des polynômes de Legendre deviennent :

N=1

$$C^2 + \left(\frac{1}{3} C_h^2 - C_0^2 \right) = 0 \quad [57]$$

$$d\mathbf{u}_1 = hC \quad [58]$$

N=2

$$C^4 + \left(\frac{13}{30}C_h^2 - C_0^2\right) C^2 + \left(\frac{1}{80}C_h^4 - \frac{1}{10}C_h^2C_0^2\right) = 0 \quad [59]$$

$$d \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = hC \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5\sqrt{3}}{6} \frac{k^2 d^2}{10 + k^2 d^2} \end{pmatrix} \quad [60]$$

N=3

$$C^6 + \left(\frac{16}{35}C_h^2 - C_0^2\right) C^4 + \left(\frac{3}{140}C_h^4 - \frac{13}{105}C_h^2C_0^2\right) C^2 + \left(\frac{1}{6300}C_h^6 - \frac{1}{420}C_h^4C_0^2\right) = 0 \quad [61]$$

$$d \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = hC \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5\sqrt{3}}{6} \frac{k^2 d^2}{10 + k^2 d^2} \\ \frac{7\sqrt{5}}{10} \frac{k^2 d^2}{42 + k^2 d^2} \end{pmatrix} \quad [62]$$

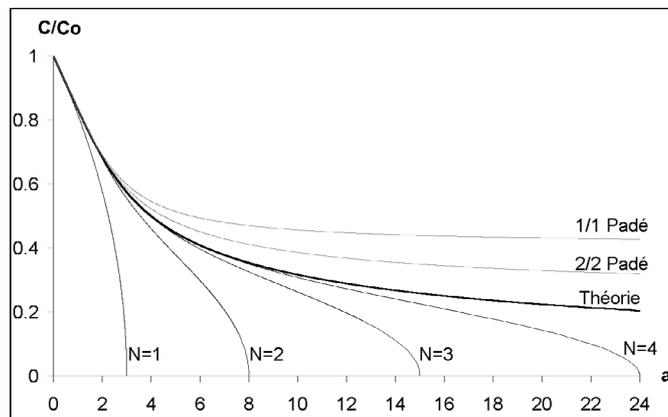


Figure 1. Variations de la célérité

L'évolution de C en fonction du nombre adimensionnel a , égal à $\frac{C_h^2}{C_0^2}$, est présentée figure 1. Il est vérifié que, plus le nombre N des fonctions de base augmente, plus la célérité du modèle numérique est proche de la célérité théorique des ondes de Stokes du premier ordre. Les différentes approximations ont pour particularité de

toutes présenter une fréquence de coupure, au-dessus de laquelle l'onde est amortie. Cette fréquence de coupure est d'autant plus haute que le nombre N des fonctions de base est grand. Sur la figure 1 sont aussi représentées deux approximations de Padé, couramment utilisées pour les modèles de Boussinesq. Contrairement à notre modèle, la célérité trouvée par ces approximations de Padé est plus grande que la célérité théorique. Les approximations de Padé ne présentent pas de fréquence de coupure. La deuxième formulation de Padé semble du même ordre de précision que la formulation avec $N = 2$ de notre modèle. Ces deux formulations de Padé sont données ci-dessous :

$$[1/1] \frac{C^2}{C_0^2} = \frac{1 + \frac{1}{15} (kd)^2}{1 + \frac{6}{15} (kd)^2} \quad [2/2] \frac{C^2}{C_0^2} = \frac{1 + \frac{1}{9} (kd)^2 + \frac{1}{945} (kd)^4}{1 + \frac{4}{9} (kd)^2 + \frac{1}{63} (kd)^4}$$

En ce qui concerne les vecteurs propres, nous n'avons présenté ici que le vecteur propre se propageant vers l'aval. Pour celui se propageant vers l'amont, il suffit d'ajouter un signe moins dans les formules. Pour $N > 1$, des vecteurs propres évanescents apparaissent. Même s'ils sont bien pris en compte dans le modèle, nous les négligerons au chapitre 7 en considérant que le tronçon plan précédant la frontière ouverte est suffisamment long pour les amortir.

6. Comparaison avec des mesures physiques

Un test physique intéressant permettant de juger de la pertinence des modèles numériques de Boussinesq pour la gestion des ondes courtes est le test en canal mené par Dingemans [DIN 94] avec une barre trapézoïdale asymétrique. Lorsque l'onde monte la première face de la barre, des harmoniques d'ordres supérieurs sont créées et sont libérées lorsque la profondeur augmente à nouveau. C'est généralement cette libération d'harmoniques d'ordres supérieurs au cours de la descente de la barre qui est mal modélisée par les modèles numériques de Boussinesq. Les conditions expérimentales de ce cas-test physique sont les suivantes : le canal fait 30 mètres de long pour une profondeur de 40 cm, la barre trapézoïdale se trouve au milieu de ce canal et se compose d'une première pente de 1 :20, d'un palier de 2 mètres de longueur se trouvant à la profondeur 10 cm, puis une nouvelle pente de 1 :10. (voir figure 2)

Des mesures sont disponibles pour 11 positions ($x=2\text{m}$, $x=4\text{m}$, $x=5.7\text{m}$, $x=10.5\text{m}$, $x=12.5\text{m}$, $x=13.5\text{m}$, $x=14.5\text{m}$, $x=15.7\text{m}$, $x=17.3$, $x=19\text{m}$, $x=21\text{m}$) le long du canal.

Nous présentons ici les périodes et hauteurs de houle des cas-tests A et B :

A : $T=2.02$ s et $H=2$ cm

B : $T=2.525$ s et $H=2.9$ cm

Sur la portion horizontale devant la barre (x compris entre 0 et 6 m), l'onde ne subit presque pas de changements de forme et est composée uniquement de sa composante fondamentale. Sur la première pente (x compris entre 6 et 12 m), des harmoniques

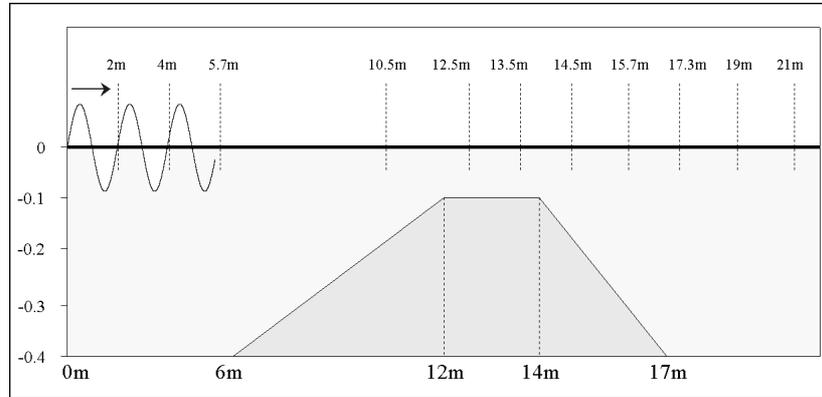


Figure 2. Géométrie des fonds et positions des capteurs

Ordre	1 ^{ier}	2 nd	3 ^{ème}	4 ^{ième}
Test A	0.39	1.58	3.55	6.31
Test B	0.25	1.01	2.27	4.04

Tableau 1. Nombre adimensionnel a pour les 4 premières harmoniques

d'ordres supérieures sont créées, mais sont toujours liées à la composante fondamentale. Sur cette pente l'onde se raidit quelque peu mais ne subit pas de changement important ni de sa forme ni de sa période. Sur le palier horizontal (x compris entre 12 et 14 m), les harmoniques d'ordres supérieurs se libèrent et, de ce fait, l'onde se déforme largement. La libération d'harmoniques d'ordres supérieurs s'amplifie sur la seconde pente (x compris entre 14 et 17 m) parce que la profondeur augmente rapidement ce qui augmente la différence de célérité entre les ondes. Durant cette descente et le palier qui se trouve après (x compris entre 17 et 21 m), cette libération importante d'harmoniques d'ordres supérieurs modifie grandement l'aspect de l'onde. Les modèles de Boussinesq traitent correctement la première partie de la propagation (entre 0 et 6 m) alors que les modèles Boussinesq étendus traitent correctement la propagation jusqu'à $x = 14$ m. Les problèmes de ces modèles numériques apparaissent à partir du moment où les harmoniques supérieures sont créées. C'est pourquoi, nous n'avons représenté ici que deux positions intéressantes où l'on rencontre normalement des difficultés avec des modèles de Boussinesq classiques, $x = 15.7$ m et $x = 17.3$ m.

Pour le cas A, une analyse spectrale des mesures physiques faites par Dingemans montre qu'en dehors de la fondamentale, les 3 premières harmoniques rentrent en compte dans le signal et que donc, si on se réfère au tableau 1, le coefficient $a = \frac{\omega^2 d}{g}$ prend des valeurs allant jusqu'à 6.3. La figure 1 montre que pour représenter l'har-

monique fondamentale $a(\omega_0) = 0.39$, un seul terme sur la base suffit alors que pour les harmoniques suivantes $a(2\omega_0) = 1.58$ et $a(3\omega_0) = 3.55$, il est préférable d'avoir 2 termes sur la base de projection. Au fur et à mesure de la propagation de l'onde l'énergie prédominante de celle-ci passe de ω_0 à $2\omega_0$. Les résultats numériques obtenus pour des positions inférieures à $x = 14$ m c'est-à-dire avant que les harmoniques d'ordres supérieurs se libèrent sont quasiment identiques aux mesures même pour un seul terme sur la base de projection. A partir de $x = 14$ m, les harmoniques se libèrent et la problématique est plus délicate même si les résultats sont qualitativement corrects pour un seul terme sur la base. Les résultats sont présentés ici pour $x = 15.7$ m et $x = 17.3$ m (voir figures 3 à 8). Il est important de rappeler que pour $N = 1$, le modèle développé est équivalent à un modèle de Boussinesq "classique". Le fait d'augmenter le nombre de termes de la base de projection ($N = 2$ et $N = 3$) permet d'élargir le domaine d'application en fréquence et donc de mieux modéliser les harmoniques supérieures générées par la barre. Pour $N = 3$, les résultats sont quasiment identiques aux mesures pour toutes les positions du domaine. Cela a été aussi obtenu avec des modèles de Boussinesq étendus [GOB 99].

Le cas B est plus compliqué à modéliser que le cas A car la répartition des harmoniques générées par la barre est moins simple et l'analyse spectrale faite pour le signal pour la position $x = 17.3$ m montre, qu'à cet endroit, la troisième harmonique est prépondérante sur les autres et surtout qu'elle est légèrement liée avec la quatrième harmonique. Les résultats (voir figures 9 à 14) sont globalement moins bons que pour le cas A pour les deux positions étudiées ($x = 15.7$ m et $x = 17.3$ m) alors qu'ils sont quasiment identiques aux mesures pour les positions se trouvant avant $x = 14.5$ m c'est-à-dire avant la libération des harmoniques supérieures. Pour un seul terme sur la base de projection, les résultats sont peu pertinents que ce soit qualitativement et quantitativement. Par contre, pour $N = 2$, les résultats obtenus par notre modèle sont fidèles aux mesures malgré quelques petits écarts de forme (comme des points d'inflexion dans les mesures). Pour trois termes sur la base de projection les résultats sont encore légèrement améliorés, même si les mêmes singularités subsistent par rapport aux mesures.

7. Frontière ouverte

Nous nous intéressons maintenant au traitement des conditions de radiation aux frontières ouvertes pour notre modèle. Les vecteurs propres obtenus dans la section 5 donnent des indications sur la validité des conditions de radiation classiquement utilisées pour les équations des ondes longues du type Saint-Venant :

$$du = hC_0 \quad [63]$$

Nous reprenons les conditions du test A en canal à houle réalisé à Delft Hydraulics, soit une profondeur d de 40 centimètres et une période de houle T de 2.02 s.

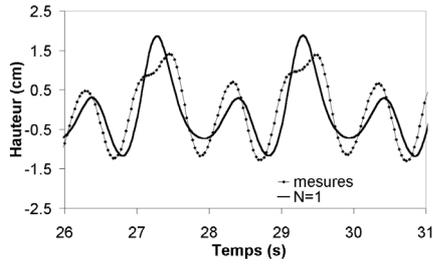


Figure 3. Test A, $x = 15.7 m$

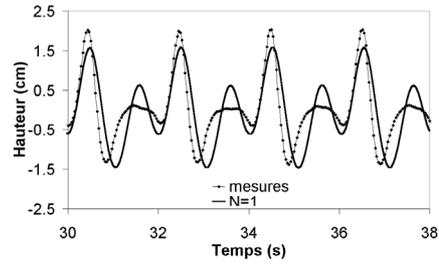


Figure 6. Test A, $x = 17.3 m$

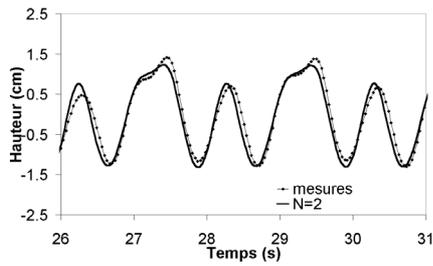


Figure 4. Test A, $x = 15.7 m$

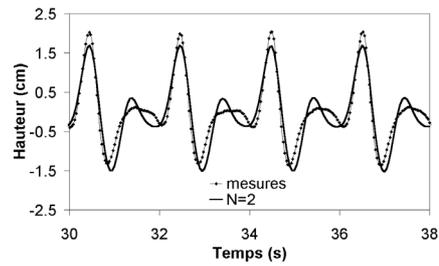


Figure 7. Test A, $x = 17.3 m$

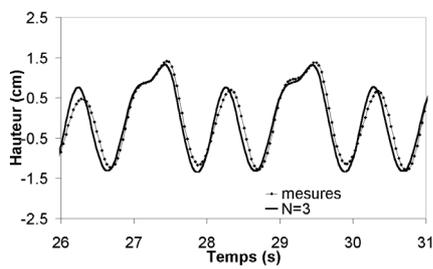


Figure 5. Test A, $x = 15.7 m$

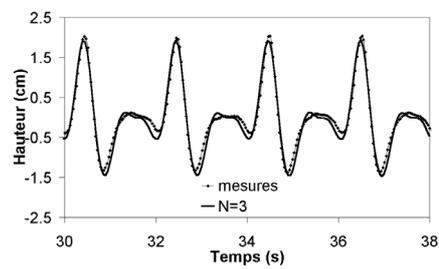


Figure 8. Test A, $x = 17.3 m$

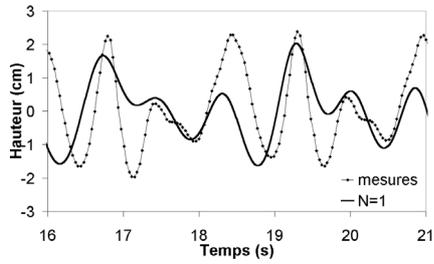


Figure 9. Test B, $x = 15.7$ m

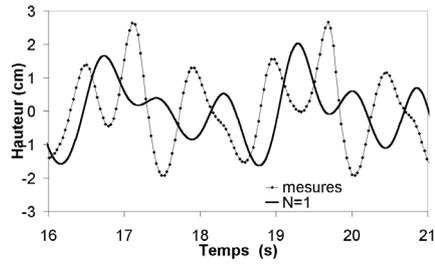


Figure 12. Test B, $x = 17.3$ m

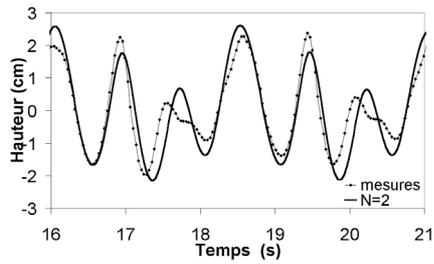


Figure 10. Test B, $x = 15.7$ m

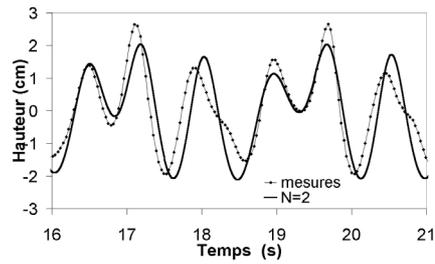


Figure 13. Test B, $x = 17.3$ m

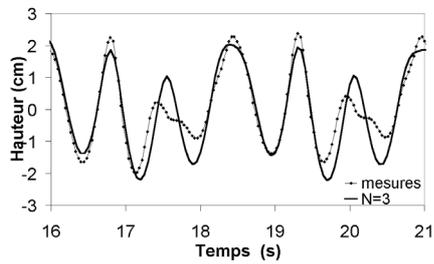


Figure 11. Test B, $x = 15.7$ m

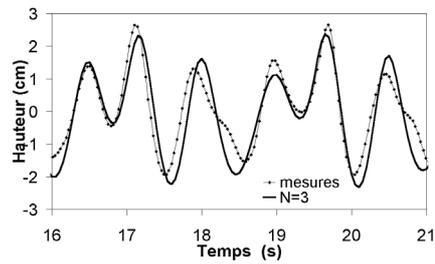


Figure 14. Test B, $x = 17.3$ m

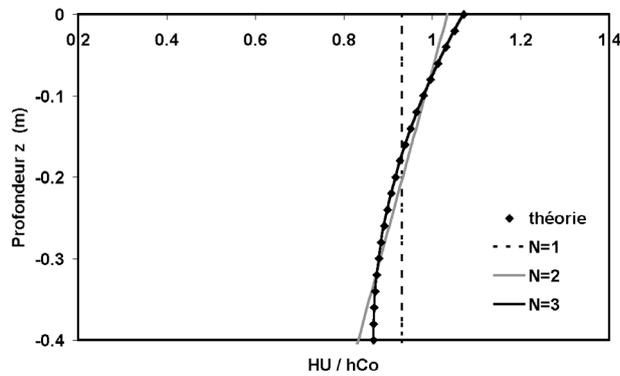


Figure 15. Profil de vitesse pour $T = 2.02 \text{ s}$

Le nombre adimensionnel a est d'environ 0.39, ce qui signifie, en utilisant à nouveau la figure 1, que l'approximation $N = 1$ est satisfaisante pour cette période. Le profil de vitesse adimensionné $\frac{du}{hC_0}$, présenté sur la figure 15, reste à 10 % près proche de 1. Cela montre que la condition de radiation classique pourrait encore être utilisée pour cette période. Les profils de vitesse donnés par les approximations de N variant de 1 à 3 sont très proches du profil de vitesse théorique. Ce dernier est donné par la formule suivante :

$$du(z) = \frac{C_0}{C} \frac{ch[k(z+d)]}{ch(kd)} hC_0 \quad [64]$$

Pour $N = 3$, le profil du modèle et le profil théorique sont quasiment confondus.

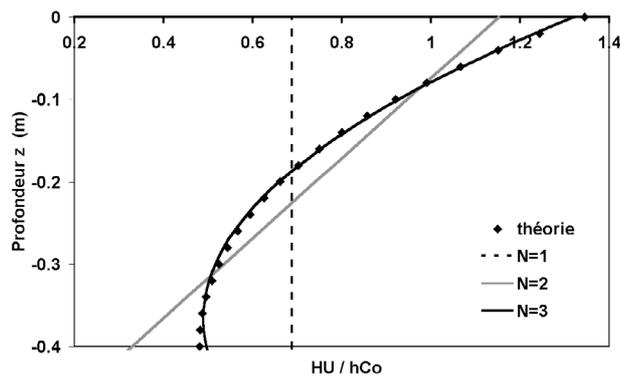


Figure 16. Profil de vitesse pour $T = 1.01 \text{ s}$

La figure 16 présente le profil de vitesse pour la seconde harmonique générée dans le canal à houle au passage de la barre trapézoïdale. La période correspondante

est de 1.01 s et le nombre adimensionnel a vaut alors environ 1.58. Le profil de vitesse adimensionné $\frac{du}{hC_0}$ est maintenant en moyenne bien inférieur à 1. Le profil est aussi loin d'être plan sur la verticale. L'approximation $N = 1$ n'est donc plus valable comme le prédisait la courbe de célérité de la figure 1. Les modèles avec $N = 2$ et surtout $N = 3$, fournissent des approximations correctes du profil de vitesse en particulier pour $N = 3$ où le profil du modèle et le profil théorique sont encore quasiment confondus.

7.1. Frontière faiblement réfléchissante

Nous utilisons maintenant les notations complexes $h = Re(h^* e^{-j\omega t})$ et $u = Re(u^* e^{-j\omega t})$. En utilisant la transformée de Fourier spatiale inverse, puis en résolvant l'intégrale complexe à l'aide du théorème des résidus et en négligeant la contribution des ondes évanescentes par rapport au mode propagatif, on démontre que les variations de la cote de la surface libre $h^*(x)$ s'écrivent sous la forme :

$$h^*(x) = h_{inc} \left(e^{jk(\omega)x} + K_R e^{-jk(\omega)x} \right) \quad [65]$$

avec le nombre d'onde $k(\omega)$ solution de l'équation de dispersion du modèle pour un nombre N donné et une pulsation ω donnée. h_{inc} et K_R sont des constantes complexes.

Considérant la frontière libre aval du modèle, nous nous intéressons maintenant à la réflexion, notée K_R qui peut intervenir par une formulation approximative de la condition de radiation aval.

Nous considérons une houle incidente monochromatique de pulsation ω_0 se propageant de l'amont vers l'aval. Des harmoniques de pulsation ω_i sont ensuite générées lors de la propagation et se retrouvent en même temps que la pulsation de base à la frontière aval. Nous allons utiliser les conditions de radiation de la section précédente en prenant la pulsation d'une harmonique ω_i dans les relations.

Réécrivons la seconde équation du système (50) qui traduit la conservation de la masse pour une pulsation de la houle ω_i ainsi que la première relation des conditions de radiation, qui est valable quelque soit le nombre N de fonctions de base choisi :

$$\begin{cases} d \frac{\partial u_1^*}{\partial x} = j\omega_i h^* \\ du_1^* = h^* C \end{cases} \quad [66]$$

Le système (66) fournit une condition de radiation classique pour h :

$$\frac{\partial h^*}{\partial x} = j \frac{\omega_i}{C(\omega_0)} h^* \quad [67]$$

Dans cette condition de radiation, nous prenons par défaut, pour le calcul de la célérité C , la pulsation de la houle incidente ω_0 . Sur un cas pratique en effet, il y a un seul choix possible pour la pulsation entrant dans le calcul de C alors qu'il y a un certain nombre d'harmoniques générées de pulsation ω_i .

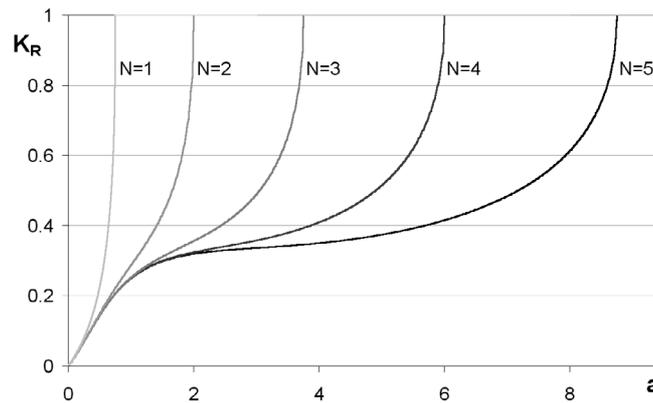


Figure 17. Coefficients de réflexion K_R pour l'harmonique $2\omega_0$ pour N variant de 1 à 5

L'équation de propagation (65), écrite pour la pulsation ω_i , et la condition de radiation (67) permettent d'identifier un coefficient de réflexion K_R à la frontière aval. Cette réflexion numérique est due à l'approximation associée à la condition de radiation (67) :

$$K_R = \frac{C(\omega_0) - C(\omega_i)}{C(\omega_0) + C(\omega_i)} \quad [68]$$

Si on trace K_R en fonction de a pour la deuxième harmonique ($2\omega_0$) et pour plusieurs valeurs de N , on obtient la figure 17. Rappelons que pour des bases de fonctions comportant 1, 2, 3, 4 et 5 termes, les pulsations de coupures au delà desquelles l'onde est complètement amortie correspondent respectivement à $a = 3$, $a = 8$, $a = 15$, $a = 24$ et $a = 35$. Comme a est proportionnel à ω^2 , si on prend en considération la première harmonique pour le calcul de a , les pulsations de coupure de la seconde harmonique correspondent alors à $a = 3/4$, $a = 2$, $a = 15/4$, $a = 6$ et $a = 35/4$. On remarque, avec la figure 17, que l'erreur de réflexion de la seconde harmonique est plutôt faible pour les basses fréquences (a plus petit que 1), mais que pour les fréquences plus élevées, il apparaît une sorte de courbe limite, enveloppe de toutes les courbes, qui semble présenter un palier de valeur $K_R = 0.3$. Dans le cas où $a = 0.39$ qui correspond au cas A des tests réalisés par Delft Hydraulics, on obtient pour la première harmonique des coefficients K_R valant 15% pour $N = 1$ et 11% pour des

valeurs de N supérieures. Si on trace les mêmes courbes pour la deuxième harmonique $3\omega_0$ on obtient alors des coefficients K_R valant 100% pour $N = 1$, 30% pour $N = 2$ et 27% pour des valeurs de N supérieures. Ces courbes représentant K_R en fonction de a pour différentes valeurs de N permettent d'évaluer l'erreur de réflexion due à la condition de radiation.

7.2. Frontière activement absorbante

En s'inspirant des concepts de Troch et De Rouck [TRO 99], nous considérons maintenant que la frontière aval, située sur l'abscisse x_2 , est précédée d'une portion plane de longueur l dont l'extrémité amont est située sur l'abscisse x_1 comme indiqué sur la figure 18.

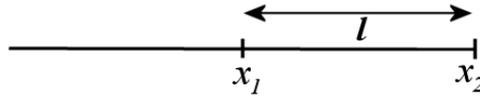


Figure 18. Section de référence et section aval

Idéalement, la frontière aval est considérée absorbante et $h^*(x) = h_{inc}^* e^{jkx}$.

La cote de la surface libre à la section aval x_2 est alors liée à la cote de la surface libre à la section de référence x_1 par la relation suivante :

$$h^*(x_2) = e^{jkl} h^*(x_1) \quad [69]$$

Nous introduisons la fonction de transfert $H_N(t)$, transformée de Fourier inverse de la fonction e^{jkl} , avec la célérité C calculée par la relation de dispersion pour N fonctions de base.

$$H_N(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\alpha\omega_{max}} \cos\left(\frac{\omega}{C(\omega)} l - \omega t\right) d\omega \quad [70]$$

ω_{max} est la pulsation maximale pour laquelle la relation de dispersion possède une solution réelle. ω_{max} est égal à $\sqrt{\frac{3g}{d}}$, $\sqrt{\frac{8g}{d}}$, $\sqrt{\frac{15g}{d}}$ pour N égal à 1, 2 et 3 respectivement. Comme la célérité C s'annule en ω_{max} , l'intégrale n'est pas définie à la pulsation de coupure. On introduit donc un coefficient α compris entre zéro et un. Plus ce coefficient est petit, plus la réponse impulsionnelle $H_N(t)$ s'amortit vite, mais en contrepartie, plus le domaine de validité fréquentielle se rétrécit. Réciproquement, plus il est grand, plus la plage de validité fréquentielle est grande mais moins il

s'amortit vite. Ce paramètre α influence également le temps de calcul de $H_N(t)$. Les courbes donnant $H_N(t)$ pour plusieurs valeurs de α sont données figure 19.

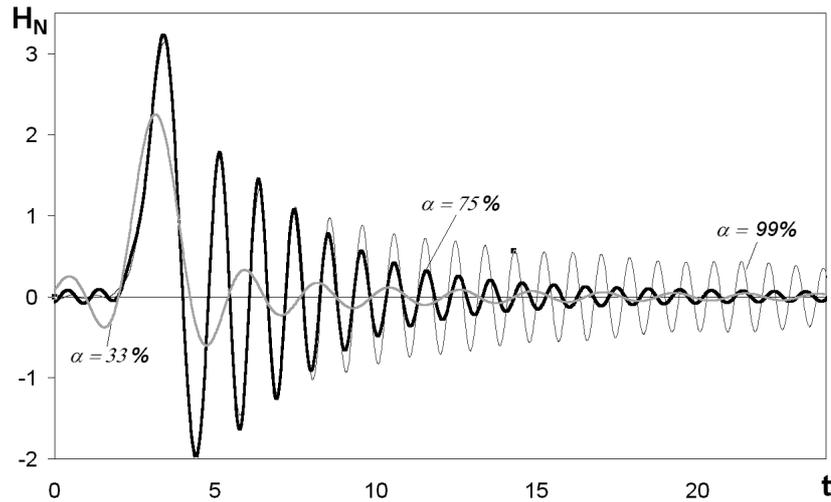


Figure 19. Fonction de transfert $H_N(t)$ pour plusieurs valeurs du paramètre α

La transformée de Fourier inverse de l'équation (69) donne :

$$h(x_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_N(\tau) h(x_1, t - \tau) d\tau \quad [71]$$

La fonction $H_N(t)$ n'est pas totalement causale, c'est-à-dire $H_N(t) \neq 0$ pour $t < 0$. Or lors de la mise en œuvre du schéma numérique de résolution du modèle de Boussinesq étendu, nous n'avons pas d'information sur le futur de $h(x_1, t)$: la somme de la convolution (71) doit donc être tronquée à t égal à zéro. De plus la discrétisation de la convolution amène à une sommation finie sur un temps T_l et conduit à une seconde troncature, ce qui fait que l'équation (71) devient :

$$h(x_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{T_l} H_N(\tau) h(x_1, t - \tau) d\tau \quad [72]$$

L'équation (72) est la condition de radiation mise en œuvre en pratique. Examinons maintenant la réflexion parasite générée par la troncature. Nous introduisons la transformée de Fourier H_N^* définie de la façon suivante :

$$H_N^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{T_l} H_N(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \quad [73]$$

En pratique, T_l doit être suffisamment grand pour que $H_N(T_l)$ soit le plus petit possible (voir figure 19). Par contre, plus le paramètre de troncature T_l est grand plus le temps de calcul s'allonge.

Compte tenu de la troncature nécessaire en pratique sur la fonction de transfert, la relation (69) devient :

$$h^*(x_2) = H_N^* h^*(x_1) \quad [74]$$

Reprenant l'équation (65), les cotes de la surface libre $h^*(x_1)$ et $h^*(x_2)$ sont aussi reliées par la relation suivante :

$$h^*(x_2) = \frac{e^{jkl} + K_R e^{-jkl}}{1 + K_R} h^*(x_1) \quad [75]$$

On en déduit la réflexion parasite due à la troncature sur la fonction de transfert :

$$K_R = \frac{H_N^* - e^{jkl}}{e^{-jkl} - H_N^*} \quad [76]$$

La forme du dénominateur de la formule (76) montre que celui-ci s'annule pour certaines valeurs de ω et que plus l est grand et plus le nombre de fréquences où le coefficient K_R devient infini est important. Si T_l est suffisamment grand, on a en effet H_N^* qui est voisin de e^{jkl} et donc le numérateur est voisin de $-2j \sin(kl)$ qui s'annule lorsque $k_n l = n\pi$ soit encore $w_n = \frac{n\pi}{l} C(w_n)$ où $n = 0, 1, 2, \dots$

La figure 20 représente les variations du module du coefficient K_R pour les basses fréquences et pour différentes valeurs de l . Pour tracer cette figure, nous avons effectué les calculs pour $N = 3$, $\alpha = 90\%$, $T_l = 20$ s et plusieurs valeurs de l . On remarque pour les basses fréquences que plus l est grand, plus le niveau moyen du coefficient K_R est faible mais qu'en contrepartie le nombre de pics où ce coefficient devient infini augmente, ce qui peut être gênant si la fréquence de notre signal ou d'une de ces harmoniques tombe justement sur ces fréquences de résonance.

La figure 21 représente les variations du module complexe de K_R pour toute la gamme de fréquences sur laquelle notre relation de dispersion a un sens. On s'aperçoit avec cette figure que le niveau moyen des coefficients de réflexion est globalement faible (si on enlève les pics de résonance) et que bien évidemment, K_R tend vers 1 lorsqu'on se rapproche de la pulsation de coupure inhérente à notre relation de dispersion. Sur cette figure, K_R devient proche de 1 pour $\omega = 0.9 \omega_{max}$ qui est notre pulsation de troncature pour le calcul de $H_N(t)$ (voir équation (70)).

On remarque également que les pics ne sont pas uniformément répartis sur la gamme de fréquence étudiée et que l'intervalle entre 2 pics se rétrécit lorsque ω augmente. Cette figure montre aussi clairement que plus l est grand, plus il y a de pics, mais plus ceux-ci sont étroits.

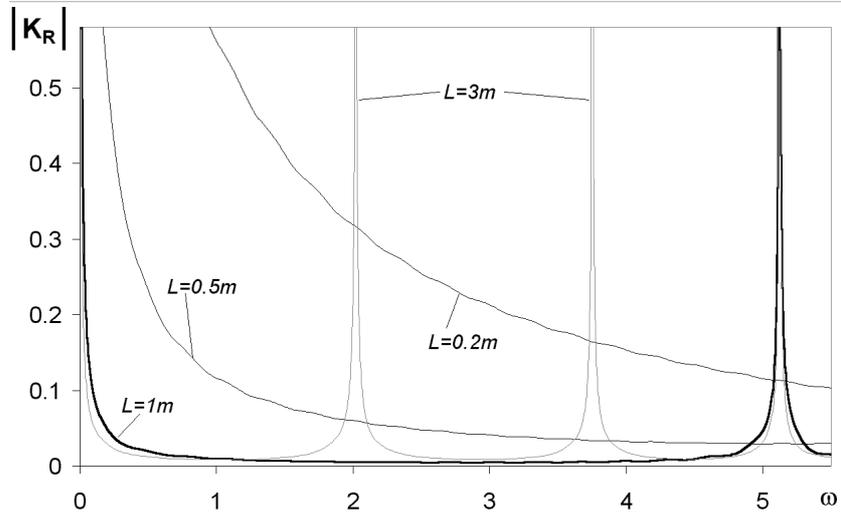


Figure 20. Module du coefficient de réflexion K_R pour plusieurs valeurs de l et pour les basses fréquences

En ce qui concerne l'influence de N sur la forme de K_R , plus N est grand, plus le domaine de validité du K_R est grand (voir les pulsations de coupure de la figure 1), mais les K_R obtenus pour des valeurs distinctes de N sont quasi-identiques sur le domaine de validité commun.

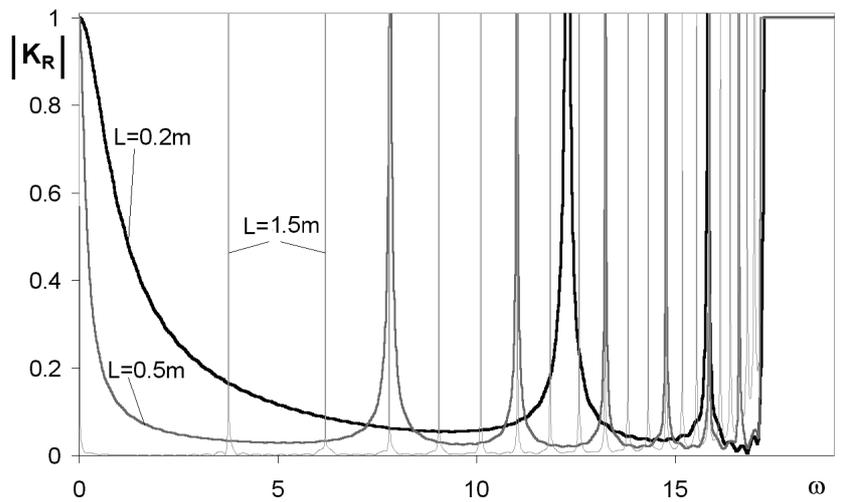


Figure 21. Module complexe du coefficient de réflexion K_R de 0 à ω_{max}

On se rend compte avec la figure 21 que le K_R obtenu en utilisant une frontière activement absorbante est globalement bien meilleur que le K_R obtenu en utilisant une frontière faiblement réfléchissante, sauf pour quelques bandes de fréquences très étroites où ce coefficient devient infini.

La difficulté pour utiliser ce type de conditions aux limites est de trouver un jeu de paramètres (α, T_l, l, N) qui permette à la fois de minimiser les temps de calcul tout en optimisant les réponses des différentes harmoniques sur cette condition aux limites, ce qui revient à trouver une forme de K_R optimale connaissant la pulsation fondamentale et les harmoniques générées.

7.3. Application

Nous reprenons les conditions expérimentales du test A des essais sur la barre trapézoïdale [DIN 94]. Une houle de période 2,02 s et de hauteur 2 cm est générée à l'extrémité amont du canal à houle.

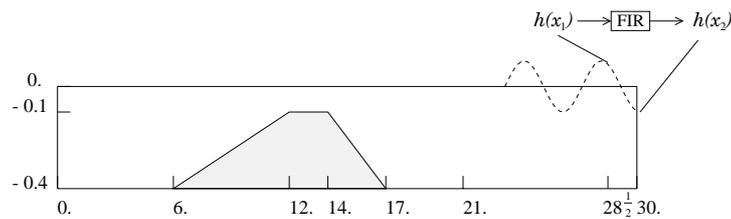


Figure 22. Profil de la barre trapézoïdale et position de la section de référence

Deux calculs sont menés avec un nombre N de polynômes de Legendre égal à 3 : le premier avec une frontière aval faiblement réfléchissante que nous noterons WRB ("Weakly Reflective Boundary") et le second avec une frontière aval activement absorbante que nous noterons AAB ("Active Absorbing Boundary"). Ce second calcul est réalisé avec les paramètres suivants : une distance entre section de référence et section aval égale à 1,5 mètre (voir figure 22), un coefficient α égal à 0,84, une durée T_l égale à 2 000 secondes.

La figure 23 montre les résultats numériques et expérimentaux pour les variations de la surface libre à l'abscisse $x = 21$ m avec les méthodes WRB et AAB. Comme on pouvait s'y attendre, la méthode AAB fournit de très bons résultats relativement aux mesures, contrairement à la méthode WRB.

Une analyse spectrale du signal obtenu en sortie nous montre qu'il y a un transfert d'énergie depuis la composante fondamentale qui compose le signal d'entrée vers les deux autres harmoniques générées par la barre.

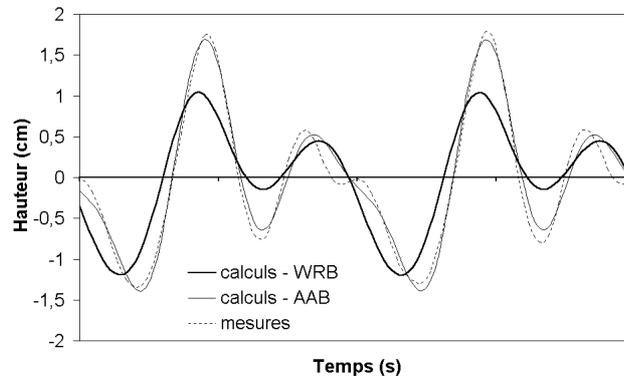


Figure 23. Evolution temporelle de la surface libre en $x = 21$ m

	AAB		WRB	
	Théorie	Calculs	Théorie	Calculs
ω_0	0.5%	3%	0 %	4 %
$2\omega_0$	0.6%	5%	11%	25%
$3\omega_0$	1.1%	7%	27%	100%

Tableau 2. Comparaison des $|K_R|$ théoriques et des $|K_R|$ mesurés pour plusieurs harmoniques

La figure 21 nous donne le coefficient K_R obtenu pour la composante fondamentale du signal ω_0 et pour les deux harmoniques générées, puis libérées, par la bosse $2\omega_0$ et $3\omega_0$. En utilisant une courbe du type de la figure 21 on obtient $K_R(\omega_0) = 0.5\%$, $K_R(2\omega_0) = 0.6\%$ et $K_R(3\omega_0) = 1.1\%$, ce qui montre que ce type de condition aux limites permet non seulement de bien traiter la composante fondamentale de notre signal, mais également les harmoniques générées.

Si l'on regarde plus en détail les composantes des trois premières harmoniques ω_0 , $2\omega_0$ et $3\omega_0$, on retrouve bien sur la figure 24 que la méthode AAB fournit une qualité de résultats équivalente pour les trois composantes harmoniques.

On note aussi sur la figure 25 qu'avec la méthode WRB, seule l'harmonique ω_0 de l'onde incidente est absorbée convenablement à la frontière aval. La seconde harmonique et surtout la troisième harmonique sont sujettes à des erreurs de réflexion. On observe une réflexion d'environ 25 % pour la seconde harmonique et 100 % pour la troisième. Ces résultats sont un peu plus forts que la prévision théorique, qui prévoit 11% et 27% respectivement. Le tableau 2 récapitule les résultats obtenus avec notre code de calcul et les compare aux résultats prévus par la théorie.

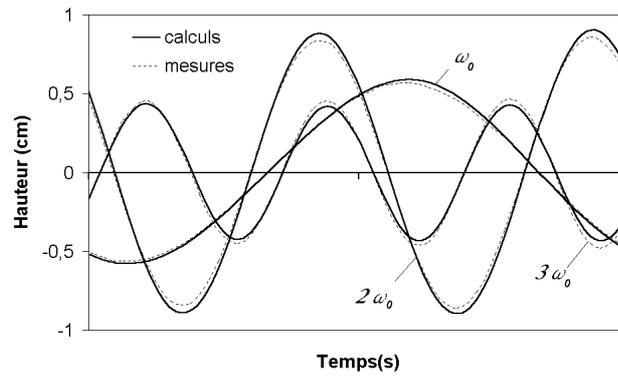


Figure 24. Evolution temporelle des trois premières harmoniques en $x = 21$ m avec la conditions aux limites AAB

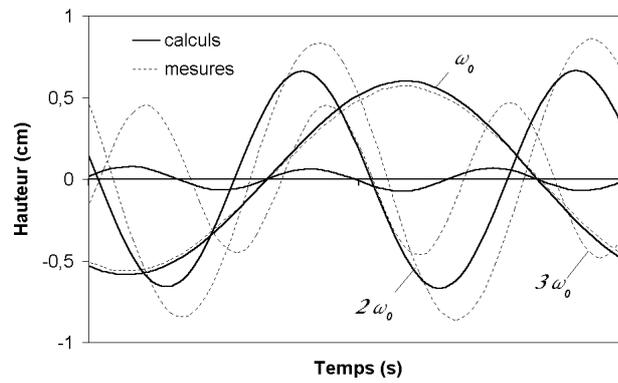


Figure 25. Evolution temporelle des trois premières harmoniques en $x = 21$ m avec la conditions aux limites WRB

8. Conclusions

Les difficultés inhérentes aux modèles de Boussinesq sont de plusieurs types. Tout d'abord les modèles de Boussinesq sont très performants pour les ondes longues (ou à basses fréquences), mais deviennent beaucoup moins performants pour des ondes courtes. C'est pourquoi de plus en plus de modèles, dits de Boussinesq étendus, essaient d'élargir leur domaine de validité en améliorant pour cela la relation de dispersion utilisée. Notre modèle Reflux 3D améliore implicitement la relation de dispersion si on augmente le nombre de fonctions de projection sur la verticale et ne propage pas d'ondes lorsqu'on se trouve hors de son domaine fréquentiel de validité. La deuxième difficulté est de bien traiter les conditions aux frontières ouvertes et que les conditions aux limites soient capables, non seulement de bien traiter la pulsation fondamentale du signal, mais également les harmoniques générées au cours de la propagation. Ces deux problèmes sont bien sûr étroitement liés car on peut très bien partir d'un signal basse fréquence où la relation de dispersion du modèle est valable, puis générer au cours de sa propagation des harmoniques de fréquences supérieures approximativement modélisées par la relation de dispersion et par les conditions aux limites.

Nous avons testé au cours de cette étude deux types de conditions aux limites : d'une part des conditions de radiation locale dites "frontière faiblement réfléchissante" qui s'avèrent fiables pour la composante fondamentale du signal, mais qui offrent un coefficient de réflexion qui peut être gênant lorsque la fréquence augmente (ce qui est le cas pour la génération d'harmoniques). Pour améliorer la propagation des harmoniques on peut alors décider d'augmenter le nombre N de fonctions sur la base de projection ce qui bien sûr augmente le temps de calcul. L'augmentation du nombre N de fonctions ne peut malheureusement pas améliorer sensiblement le traitement de la condition de radiation locale.

D'autre part, nous avons testé une condition aux limites de type activement absorbante qui, pour chaque instant t , calcule la condition de sortie connaissant le signal à une distance l de la frontière aval à ce même instant t . Cette condition aux limites doit être calibrée par un jeu de paramètres (α, T_l, l, N) dont les influences respectives sont importantes et liées. Contrairement aux conditions locales de radiation, ce type de condition aux limites permet de mieux traiter les hautes fréquences mais au prix d'un temps de calcul plus grand.

9. Bibliographie

- [BOU 72] BOUSSINESQ J., « Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond », *J. Math. Pures Appl.*, vol. 17, 1872, p. 55-108.
- [COW 87] COWAN A. D. M., « The range of application of Boussinesq type numerical short waves models », *International Association for Hydraulic Research*, Lausanne, Suisse, 1987, p. 379-384.

- [DIN 94] DINGEMANS M., « Comparison of Computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements », Mast-g8-m note, project 1, 1994.
- [DIN 97] DINGEMANS M., *Water Wave propagation over uneven bottoms*, Advanced Series on Ocean Engineering, 1997.
- [DON 97] DONGEREN A. V., SVENDSEN I., « Absorbing-generating boundary condition for shallow water models », *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 123, 1997, p. 303-313.
- [ENG 77] ENGQUIST B., MAJDA A., « Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves », *Mathematics of computation*, vol. 31, n° 139, 1977, p. 629-651.
- [GOB 99] GOBBI M., KIRBI J., « Wave evolution over submerged sills : tests of a high-order Boussinesq model », *Coastal Engineering*, vol. 37, 1999, p. 57-96.
- [MAD 91] MADSEN P., MURRAY R., SORENSEN O., « A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics », *Coastal Engineering*, vol. 15, 1991, p. 371-388.
- [MEF 98] MEFTAH K., « Modélisation tridimensionnelle de l'hydrodynamique et du transport par suspension », Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1998.
- [MEF 99] MEFTAH K., DHATT G., TANGUY J. M., « Ecoulement tridimensionnel à surface libre, approche h-s : partie II », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 8, n° 7, 1999, p. 747-791.
- [MUR 89] MURRAY R., « Short wave modelling using new equations of Boussinesq type », *Australian Conference on Coastal and Ocean Engineering, Institution of Engineers, Adelaide, Australie*, 1989, p. 331-336.
- [NAD 94] NADAOKA K., BEJI S., NAKAGAWA Y., « A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solution », *Proceedings 24th International Conference on coastal Engineering*, vol. 1, 1994, p. 427-441.
- [NWO 93] NWOGU O., « Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagations », *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 119, 1993, p. 618-638.
- [SCH 93] SCHAFFER H., MADSEN P., DEIGAARD R., « A Boussinesq model for waves breaking in shallow water », *Coastal Engineering*, vol. 20, 1993, p. 185-202.
- [TRO 98] TROCH P., ROUCK J. D., « Development of two-dimensional numerical wave flume for wave interaction with rubble mound breakwater », *Proceedings 26th International Conference on Coastal Engineering*, Copenhagen, Danemark, 1998.
- [TRO 99] TROCH P., ROUCK J. D., « An active wave generating-absorbing boundary condition for VOF type numerical model », *Coastal Engineering*, vol. 38, 1999, p. 223-247.
- [WEI 95] WEI G., KIRBY J., « Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations », *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 121, 1995, p. 251-261.
- [WIT 84] WITTING J., « A unified model for the evolution of nonlinear water waves », *Journal of Computational Physics*, vol. 56, 1984, p. 203-236.