

---

# Modélisation du comportement viscoélastique d'une membrane thermoplastique par la méthode des éléments finis

Fouad Erchiqui\* — Augustin Gakwaya\*\*

\*Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, DSA  
445 boulevard de l'Université, Rouyn-Noranda (Québec), J9X 5E4, Canada  
fouad.erchiqui@uqat.ca

\*\*Université Laval, 1314-F Pavillon Adrien-Pouliot  
Sainte-Foy, Québec, Canada  
Augustin.Gakwaya@gmc.ulaval.ca

---

*RÉSUMÉ.* Dans cet article nous nous intéressons à la modélisation et à la simulation par la méthode dynamique des éléments finis du comportement viscoélastique d'une membrane thermoplastique mince, isotrope et incompressible. Le modèle de comportement intégral viscoélastique de Lodge est considéré. La formulation lagrangienne et l'hypothèse de la théorie des membranes sont utilisées pour la modélisation. Pour les validations des calculs numériques nous avons confronté nos résultats numériques à des mesures expérimentales pour le soufflage libre d'une membrane polymérique en ABS (Acrylonitrile butadiène styrène). Ensuite, nous avons étudié l'influence de la loi de comportement de Lodge sur la distribution des épaisseurs et des contraintes au sein de la feuille thermoplastique pour trois types de chargement. Finalement, un exemple simple de thermoformage d'une pièce en ABS est présentée.

*ABSTRACT.* In this work, we are interested in the modelling and numerical simulation using the dynamic finite element method for the viscoelastic behaviour of a thin, isotropic and incompressible thermoplastic membrane. Thereby, the viscoelastic behaviour of the Lodge model is considered. The lagrangian formulation together with the assumption of the membrane theory are used. The numerical validation is performed by comparing the obtained results with the experimental measured data for the polymeric ABS membrane inflation. Moreover, the effect of the Lodge model behaviour on the thickness and stress distribution in the membrane are analysed for three different loads. Finally, a simple example of thermoforming part in ABS is presented.

*MOTS-CLÉS :* viscoélasticité, déformation biaxiale, éléments finis, validation, soufflage.

*KEYWORDS:* viscoelasticity, biaxial deformation, finite element, validation, inflation.

---

## 1. Introduction

Souvent, l'industrie de mise en forme des matériaux plastiques recourt à un nombre élevé d'essais avant d'entamer une production de masse qui occasionne des opérations coûteuses. Il en est de même lors de l'élaboration de nouveaux produits ou encore lors de l'amélioration de procédés déjà existants. En effet, les procédés de fabrication rencontrés dans ces industries impliquent, en général, des phénomènes mécaniques et thermiques fortement non linéaires, tant du point de vue comportement interne des matériaux que du point de vue interaction entre les divers composants du système de fabrication. Dans ces conditions, la simulation numérique devient une alternative justifiable pour analyser et améliorer ces procédés de fabrication.

Pour l'industrie des thermoplastiques, la simulation numérique des procédés de mise en forme (thermoformage, injection étirement-soufflage) nécessite une bonne connaissance du comportement des matériaux utilisés. Ces matériaux sont des polymères thermoplastiques (HDPE, ABS, PP, PS, etc.) chauffés entre la température de transition vitreuse et la température de fusion pour être ensuite mis en forme. Afin d'étudier le comportement de ces matériaux en mode de déformation biaxiale, nous nous intéressons au soufflage de membranes circulaires. Ce type d'expérience a été fréquemment réalisé par le passé à des températures moins élevées que celles de mise en forme [JOY 72], [SCH 75], [DEV 77] et fait encore l'objet de travaux de recherches plus récentes [VER 01], [RAS 00], [LI 01], [NOV 99], [XIA 01]. Cependant, les codes de calcul utilisés pour ce genre de problème ne concernent, en général, que les problèmes quasi statiques ; à titre d'exemple on peut citer les références [XIA01], [ERC 98], [DEL 91], [LAR 00] dans le cas des matériaux hyperélastiques et [LAR 00], [LAR 98] dans le cas des matériaux viscoélastiques. Pour ces problèmes, les fortes non-linéarités mécaniques et géométriques impliquent des instabilités lors du soufflage et nécessitent un contrôle précis des chargements utilisés pour la simulation [KHA 92]. Pour contourner ce problème, nous considérons un problème dynamique de soufflage libre d'une membrane viscoélastique circulaire et nous adoptons, via une formulation *lagrangienne*, la méthode des éléments finis. Les hypothèses de la théorie des membranes et de l'incompressibilité du matériau thermoplastique sont considérées. La structure thermoplastique de la membrane est discrétisée par des éléments finis plans (éléments triangulaires plans à trois noeuds) [DHA 84] et l'intégration dans le temps, à cause de la présence du terme d'inertie, par un algorithme explicite basé sur la technique des différences finies centrées qui est conditionnellement stable [DOK 89]. Le modèle intégral de comportement viscoélastique de Lodge est considéré [LOD 64]. Les paramètres rhéologiques non linéaires utilisés pour le modèle de Lodge ont été obtenus par une technique bi-axiale en soufflage libre d'une membrane thermoplastique circulaire [DER 00]. Une analyse comparative de l'approche numérique et des résultats expérimentaux est présentée dans le cas de soufflage libre de l'ABS (Acrylonitrile butadiène styrène). Ensuite, nous avons étudié l'influence de la loi de comportement de Lodge sur la distribution des épaisseurs et des contraintes au sein de la feuille thermoplastique, pour trois types de chargement.

## 2. Développement théorique

Soit un milieu matériel thermoplastique, occupant un domaine  $\Omega$  de surface  $\Gamma$ . Pour la description mathématique de la cinématique du milieu  $\Omega$ , considéré comme milieu continu, on utilise une description lagrangienne. L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho(x)\ddot{u}_i \quad \text{dans } \Omega \quad [1]$$

avec

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{dans } \Omega \quad [2]$$

$$\sigma_{ij} n_i = t_j \quad \text{sur } \partial\Omega \quad [3]$$

où  $\sigma_{ij}$  sont les composantes de tenseur des contraintes de Cauchy,  $f_i$  sont les composantes de la force de volume,  $\ddot{u}_i$  sont les composantes du vecteur accélération,  $\rho$  est la densité du milieu thermoplastique,  $t_i$  sont les composantes du vecteur de traction et  $(\bullet)_{,j}$  indique la dérivée partielle de  $(\bullet)$  par rapport à la jème coordonnée spatiale.

Dans le procédé de thermoformage, la feuille polymérique est entièrement définie initialement. Ainsi nous considérons pour le problème de soufflage de la membrane une formulation lagrangienne totale et la configuration de référence sera la configuration initiale non déformée. Il s'ensuit que dans la configuration de référence, les équations [1]-[3] s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial X_M} \left( S_{MN} \frac{\partial x_j}{\partial X_N} \right) + f_{0,j} = \rho_0(X)\ddot{u}_j \quad \text{dans } \Omega_0 \quad [4]$$

$$S_{MN} = S_{NM} \quad \text{dans } \Omega_0 \quad [5]$$

$$\left( S_{MN} \frac{\partial x_j}{\partial X_N} \right) N_M = t_{0,j} \quad \text{sur } \partial\Omega_0 \quad [6]$$

où,  $S$  représente le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff et les vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{X}$  sont respectivement les positions d'un point de la membrane dans la configuration déformée et non déformée. Ces vecteurs sont reliés au vecteur déplacement  $\vec{u}$  par la relation :  $\vec{X} = \vec{x} + \vec{u}$ .  $\Omega_0$  et  $\Gamma_0$  représentent respectivement le volume et la surface frontière sur laquelle le chargement est appliqué initialement,  $\rho_0$  est la masse volumique et  $t_{0i}$  sont les composantes du vecteur traction appliqué initialement sur  $\Gamma_0$ .

Par substitution de l'expression du tenseur de Green-Lagrange  $E$  dans l'équation d'équilibre, puis en multipliant cette dernière par le vecteur déplacement virtuel  $\delta\vec{u}$ , le principe des travaux virtuels en absence de force de volume, par rapport à la configuration de référence, s'écrit :

$$\int_{\Omega_0} \rho_0(X) \ddot{u}_j \delta u_j d\Omega + \int_{\Omega_0} S_{MN} \delta E_{MN} d\Omega = \int_{\Gamma_0} t_{0j} \delta u_j d\Gamma \quad [7]$$

Introduisant l'expression virtuelle du tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\delta E_{MN} = \frac{1}{2} \left[ \left( \delta_{jM} + \frac{\partial u_j}{\partial X_M} \right) \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_N} + \left( \delta_{jN} + \frac{\partial u_j}{\partial X_N} \right) \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_M} \right] \quad [8]$$

qui s'écrit encore :

$$\delta E_{MN} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_M}{\partial X_N} + \frac{\partial \delta u_N}{\partial X_M} + \frac{\partial u_j}{\partial X_M} \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_N} + \frac{\partial u_j}{\partial X_N} \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_M} \right] \quad [9]$$

le principe des travaux virtuels devient :

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{\Omega_0} S_{MN} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_M}{\partial X_N} + \frac{\partial \delta u_N}{\partial X_M} + \frac{\partial u_j}{\partial X_M} \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_N} + \frac{\partial u_j}{\partial X_N} \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_M} \right] d\Omega \\ + \int_{\Omega_0} \rho_0(X) \ddot{u}_j \delta u_j d\Omega - \int_{\Gamma_0} t_{0j} \delta u_j d\Gamma \end{aligned} \quad [10]$$

### 3. Formulation par éléments finis

Dans cette section, nous utilisons la méthode des éléments finis avec deux types de discrétisation : spatiale et temporelle, pour simuler le soufflage d'une membrane thermoplastique. La discrétisation spatiale consiste à subdiviser la feuille thermoplastique en éléments finis triangulaires. Le principe des travaux virtuels est écrit alors pour chacun de ces éléments et, ensuite, sommé sur l'ensemble des éléments qui forment la membrane [DHA 84]. Pour la discrétisation temporelle, à cause de la présence de la force d'inertie, nous considérons la technique des différences finies centrées qui est conditionnellement stable [DOK 89].

#### 3.1. Discrétisation spatiale

Pour chaque élément de la membrane thermoplastique, le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta W^{(e)} = \int_{\Omega_0^{(e)}} S_{MN} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_M}{\partial X_N} + \frac{\partial \delta u_N}{\partial X_M} + \frac{\partial u_j}{\partial X_M} \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_N} + \frac{\partial u_j}{\partial X_N} \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_M} \right] d\Omega \\ + \int_{\Omega_0^{(e)}} \rho_0(X) \ddot{u}_j \delta u_j d\Omega - \int_{\Gamma_0^{(e)}} t_{0j} \delta u_j d\Gamma \end{aligned} \quad [11]$$

Considérons alors les interpolations isoparamétriques sur les variables élémentaires suivantes :

$$\vec{u} = [N] \cdot \vec{u}_n^{(e)} \quad [12]$$

$$\vec{\delta u} = [N] \cdot \delta \vec{u}_n^{(e)} \quad [13]$$

$$\vec{X} = [N] \cdot \vec{X}_n^{(e)} \quad [14]$$

où  $[N]$  est la matrice d'interpolation sur chaque élément. Les vecteurs nodaux  $\vec{u}_n^{(e)}$ ,  $\delta\vec{u}_n^{(e)}$  et  $\vec{X}_n^{(e)}$  sont respectivement des déplacements, des déplacements virtuels compatibles et des positions. L'expression du principe des travaux virtuels devient alors après substitution des équations [12]-[14] :

$$\begin{aligned} \delta W = & \left\{ \delta u_n^{(e)} \right\}^T \cdot \left[ \int_{\Omega_0^{(e)}} \rho_0 ([N]^T \cdot [N]) \cdot \left\{ \ddot{u}_n^{(e)} \right\} d\Omega + \int_{\Omega_0^{(e)}} [B]^T \cdot \left\{ S_n^{(e)} \right\} d\Omega \right] \\ & - \left\{ \delta u_n^{(e)} \right\}^T \cdot \left[ \int_{\Gamma_0^{(e)}} [N]^T \cdot \left\{ t_0^{(e)} \right\} d\Gamma \right] = 0 \end{aligned} \quad [15]$$

qui, sous forme condensée, s'écrit :

$$\delta W^{(e)} = \left\{ \delta_n^{(e)} \right\}^T \cdot \left( \left\{ F_{acc.}^{(e)} \right\} + \left\{ F_{int.}^{(e)} \right\} - \left\{ F_{ext.}^{(e)} \right\} \right) = 0 \quad [16]$$

avec :

$$\left\{ F_{acc.}^{(e)} \right\} = \int_{\Omega_0^{(e)}} \rho_0 ([N]^T \cdot [N]) \cdot \left\{ \ddot{u}_n^{(e)} \right\} d\Omega \quad [17]$$

$$\left\{ F_{int.}^{(e)} \right\} = \int_{\Omega_0^{(e)}} [B]^T \cdot \left\{ S_n^{(e)} \right\} d\Omega \quad [18]$$

$$\left\{ F_{ext.}^{(e)} \right\} = \int_{\Gamma_0^{(e)}} [N]^T \cdot \left\{ t_0^{(e)} \right\} d\Gamma \quad [19]$$

où  $F_{acc,j}^{(e)}$ ,  $F_{ext,j}^{(e)}$  et  $F_{int,j}^{(e)}$  sont respectivement les composantes élémentaires des efforts dus au terme d'accélération, aux forces extérieures et aux forces intérieures. La matrice  $[B]$ , qui apparaît dans l'expression des forces intérieures et qui peut être décomposée en une partie linéaire  $[B_l]$  et une partie non linéaire  $[B_{nl}]$ , relie l'expression virtuelle du tenseur gradient des déformations,  $\delta\vec{E}$ , au vecteur virtuel des déplacements compatibles,  $\delta\vec{u}$ , par :

$$\{\delta E\} = [B] \cdot \langle \delta u \rangle \quad [20]$$

Dans le cas d'une interpolation isoparamétrique sur un élément de membrane triangulaire, les expressions élémentaires des matrices  $[N]$  et  $[B]$  ( $= [B_l] + [B_{nl}]$ ) et des vecteurs nodaux  $\vec{u}_n$ , et  $\vec{X}_n$  sont donnés localement par les formules suivantes :

$$\{u_n\} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\} \quad [21]$$

$$\{X_n\} = \{X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3\} \quad [22]$$

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad [23]$$

$$[B_l]^T = \begin{bmatrix} -1/X_2 & 0 & 1/Y_2 (X_3/X_2 - 1) \\ 0 & 1/Y_2 (X_3/X_2 - 1) & -1/X_2 \\ 1/X_2 & 0 & -X_3/(X_2 Y_3) \\ 0 & -X_3/(X_2 Y_3) & -1/X_2 \\ 0 & 0 & 1/Y_3 \\ 0 & 1/Y_3 & 0 \end{bmatrix} \quad [24]$$

$$[B_{nl}]^T = \begin{bmatrix} -a u_2 & b(c-1)(u_3 - c u_2) & d(c u_2 - (u_2 + u_3)/2) \\ 0 & b(c-1)v_3 & -d v_3/2 \\ a u_2 & c b(u_3 - c u_2) & d(-c u_2 + u_3/2) \\ 0 & -c b v_3 & d v_3/2 \\ 0 & b(u_3 - c u_2) & b v_3 \\ 0 & b v_3 & 0 \end{bmatrix} \quad [25]$$

où :

$$a = \frac{1}{X_2^2} \quad b = \frac{1}{Y_3^2} \quad c = \frac{X_3}{X_2} \quad d = \frac{1}{X_2 Y_3}$$

et

$$N_1 = 1 - \xi - \eta \quad 0 \leq N_1 \leq 1 \quad [26]$$

$$N_2 = \xi \quad 0 \leq N_2 \leq 1 \quad [27]$$

$$N_3 = \eta \quad 0 \leq N_3 \leq 1 \quad [28]$$

Après sommation sur l'ensemble des éléments de la membrane, le problème de soufflage est réduit alors au système suivant :

$$\{F_{acc.}\} + \{F_{int.}\} - \{F_{ext.}\} = 0 \quad [29]$$

où  $\{F_{acc.}\}$ ,  $\{F_{ext.}\}$  et  $\{F_{int.}\}$  sont respectivement les vecteurs globaux des forces nodales d'accélération, des efforts externes et des efforts internes que subit la membrane. Introduisant la matrice masse  $[M]$  associée à l'équation [17], le problème de soufflage est réduit à un système d'équations différentielles ordinaires de deuxième ordre :

$$[M] \cdot \{\ddot{u}(t)\} = \{F_{ext.}\} - \{F_{int.}\} \quad [30]$$

En utilisant la méthode de diagonalisation [LAP 82], la matrice  $[M]$  est alors réduite à une matrice diagonale et chaque degré de liberté peut être traité d'une manière indépendante.

### 3.2. Discrétisation temporelle et conditions initiales

Connaissant la vitesse et l'accélération au temps  $t_n$ , il est possible, par l'utilisation d'un schéma d'intégration temporelle, de calculer le vecteur déplacement au temps discret  $t_{n+1}$ . Pour cela, on utilise le schéma des différences finies centrées et pour laquelle on a [DOK 89] :

$$\dot{u}_i(t) = \frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t - \Delta t)}{2 \Delta t} \quad [31]$$

$$\ddot{u}_i(t) = \frac{u_i(t + \Delta t) - 2u_i(t) - u_i(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad [32]$$

et le problème [24] devient alors :

$$u_i(t + \Delta t) = \frac{\Delta t^2}{M_{ii}^d} (F_i^{ext.}(t) - F_i^{int.}(t)) + 2u_i(t) - u_i(t - \Delta t) \quad [33]$$

Comme le schéma des différences centrées est conditionnellement stable, il suffit alors de déterminer la plus grande valeur propre du système modal équivalent pour assurer la convergence [DOK 89].

Pour compléter le problème au niveau de la résolution, il faut ajouter les conditions initiales. Pour les problèmes qui nous intéressent, mise en forme des matériaux, nous considérons qu'au temps initial les vecteurs des déplacements et des vitesses sont nuls ( $u_i(t_0) = 0 \ \dot{u}_i(t_0) = 0$ ).

### 3.3. Implantation du modèle de comportement

Pour la modélisation et la simulation de la phase de soufflage de la membrane polymérique, qui est chauffée et ensuite soufflée, nous considérons les hypothèses des contraintes planes et de l'incompressibilité du matériau thermoplastique. Il s'ensuit que les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy ont les propriétés suivantes :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \quad [34]$$

Pour traiter les matériaux thermoplastiques isotropes nous considérons le modèle intégral de comportement viscoélastique de Lodge [LOD 64].

Pour les modèles intégraux viscoélastiques, on doit considérer l'histoire de la déformation qu'a subie le matériau thermoplastique afin de déterminer le champ des contraintes au temps présent. Dans ces modèles, en général, le tenseur des contraintes de Cauchy est relié à l'historique du tenseur gradient des déformations. Le modèle de Lodge est souvent utilisé pour décrire le comportement incompressible à l'état semi-solide des matériaux thermoplastiques. Dans ce modèle, le tenseur des contraintes de

Cauchy  $\sigma$ , au temps  $t$ , est relié à l'histoire du tenseur des déformations de Finger  $B$  par :

$$\sigma_{ij}(t) = -p\delta_{ij} + \int_0^t m(t-\tau) \frac{\partial B_{ij}(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau \quad [35]$$

où le tenseur de Finger  $B$  est relié au tenseur des déformations de Cauchy Green droit  $C$  par :

$$B = C^{-1} = (F^T F)^{-1} \quad [36]$$

où  $F$  est le tenseur gradient des déformations,  $p$  est la pression hydrostatique,  $m(t, \tau)$  est la fonction mémoire donnée par le spectre de relaxation de Maxwell :

$$m(t, \tau) = \sum_k g_k e^{-(t-\tau)/\tau_k} \quad [37]$$

où  $g_k$  et  $\tau_k$  sont respectivement des modules de rigidités et des temps de relaxations. La dépendance de ces modèles de la température est modélisée par l'utilisation de la fonction thermique WLF [FER 80].

### 3.4. Stratégie de résolution

La stratégie adoptée pour la mise en œuvre informatique de la méthode des éléments finis développée ci-dessus pour le calcul du vecteur nodal des déplacements  $\vec{u}_n$  au temps  $t_{n+1}$  est la suivante :

**Étape 0 :** conservation au temps  $t_{n-1}$  des valeurs locales des composantes  $C_{ij}$  du tenseur de Cauchy et des composantes  $S_{ij}$  du tenseur de Piola-Kirchhoff ;

**Étape 1 :** calcul au temps  $t_n$  des composantes  $C_{ij}$  du tenseur local des déformations de Cauchy à partir du vecteur des déplacements  $\vec{u}$  ;

**Étape 2 :** calcul au temps  $t_n$  des extensions principales  $L_1, L_2$  et  $L_3 = 1/(L_1 L_2)$  en utilisant les formules suivantes :

$$L_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( C_{xx} + C_{yy} + \sqrt{(C_{xx} - C_{yy})^2 + 4C_{xy}C_{yx}} \right)} \quad [38]$$

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( C_{xx} + C_{yy} - \sqrt{(C_{xx} - C_{yy})^2 + 4C_{xy}C_{yx}} \right)} \quad [39]$$

**Étape 3 :** via les hypothèses d'incompressibilité ( $C_{33} = L_3^2$ ) et d'un état plan des contraintes ( $\sigma_{33} = 0$ ), on calcule la pression hydrostatique à partir de l'expression [35] de la loi de comportement de Lodge :

$$p = \int_0^t m(t-\tau) \frac{\partial B_{zz}(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau \quad [40]$$



Ensuite, on substitue l'expression de la pression hydrostatique  $p$  dans [35] :

$$\sigma_{ij}(t) = - \left\{ \int_0^t m(t-\tau) \frac{\partial B_{zz}(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau \right\} \delta_{ij} + \int_0^t m(t-\tau) \frac{\partial B_{ij}(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau \quad [41]$$

et on calcul les composantes  $S_{ij}$  du tenseur local de Piolla-Kirchhoff via la relation :

$$S = F^{-T} \sigma F^{-1} \quad [42]$$

**Étape 4 :** connaissant les composantes  $S_{ij}$  du tenseur des contraintes de Piolla-Kirchhoff, on calcul les composantes,  $F_i^{int}$ , du vecteur des forces intérieures (équation [18]). Ensuite on calcul les composantes  $F_i^{ext}$  du vecteur des forces extérieures (équation [19]) et  $F_i^{acc}$  du vecteur des forces d'accélération (équation [17]);

**Étape 5 :** finalement on calcule le vecteur des déplacements  $\vec{u}$  au temps  $t_{n+1}$  en utilisant l'équation [33].

### 3.5. Validation numérique du soufflage libre

Pour la validation numérique, nous avons utilisé, d'une part, les données expérimentales relatives à la charge dynamique en pression utilisée pour souffler, à l'aide d'un débit d'air de  $27 l/s$ , une membrane thermoplastique en ABS et, d'autre part, les paramètres rhéologiques associés à la loi de comportement de Lodge obtenus par une technique d'identification [DER 00]. L'épaisseur de la membrane d'ABS est de  $1.57 mm$  et son diamètre est de  $3.175 cm$ . La température de mise en forme est de  $143^\circ C$ . Les constantes rhéologiques obtenues sont données dans le tableau ci-dessous :

constantes rhéologiques	Modèle de Lodge
$g_1$	$0.23959 MPa$
$\tau_1$	$28.48130 s$

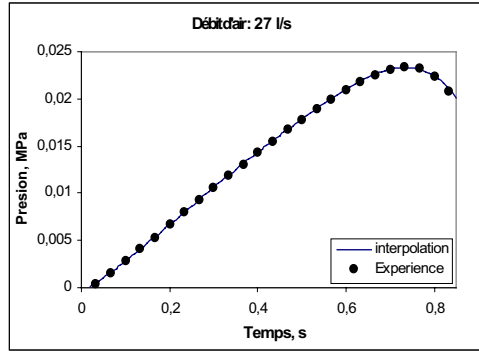
**Tableau 1.** Constantes matérielles de l'ABS

La distribution expérimentale de la charge dynamique de la pression est modélisée par une fonction d'interpolation polynomiale, voir figure 1. Cette fonction est donnée par le polynôme d'ordre 5 suivant :

$$P(t) = s_0 + s_1 t^1 + s_2 t^2 + s_3 t^3 + s_4 t^4 + s_5 t^5 \quad [43]$$

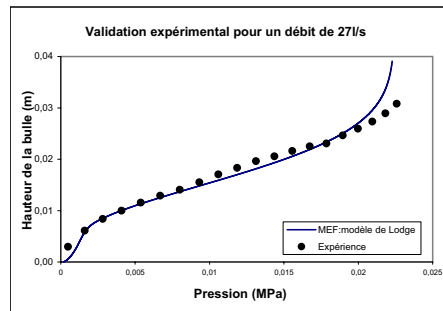
pour :  $0.02 s \leq t \leq 0.85$ , avec

$$\begin{aligned} s_0 &= -342.969, & s_1 &= 2.231 \cdot 10^4, & s_2 &= 1.249 \cdot 10^5 \\ s_3 &= -4.051 \cdot 10^5, & s_4 &= 5.895 \cdot 10^5, & s_5 &= -3.329 \cdot 10^5 \end{aligned} \quad [44]$$

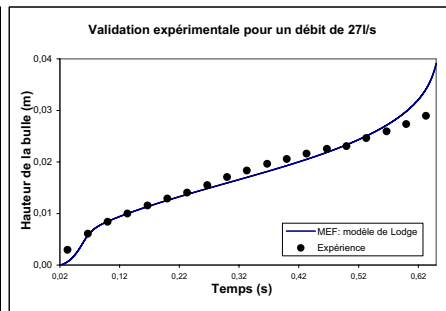


**Figure 1 :** Fonction de charge en pression

Pour le calcul numérique, la feuille thermoplastique est maillée à l'aide de 2782 éléments triangulaires (avec un total de 1458 nœuds). Les constantes matérielles utilisées pour la loi de comportement de Lodge sont données dans le tableau 1. Les figures 2-3 présentent une comparaison entre les résultats prédits par la méthode dynamique d'éléments finis et ceux obtenus par expérimentation [DER 00] relativement à la variation de la hauteur de la bulle vis-à-vis du temps et de la pression respectivement. Nous observons une bonne concordance entre l'expérimental et le numérique pour un intervalle de temps  $0.02 \leq t \leq 0.63 \text{ s}$ . Toutefois, pour un temps  $t > 0.63 \text{ s}$ , les résultats numériques divergent rapidement par rapport aux résultats expérimentaux. Ce phénomène est propre aux modèles utilisés et fait actuellement l'objet de plusieurs recherches [VER 99]. En effet, pour ces modèles, il existe une pression critique au-delà de laquelle le système diverge. Le travail tel que présenté ne concerne pas cette région de la solution et fera l'objet des travaux ultérieurs.



**Figure 2.** Hauteur de la bulle en fonction de la pression



**Figure 3.** Hauteur de la bulle en fonction du temps

#### 4. Résultats

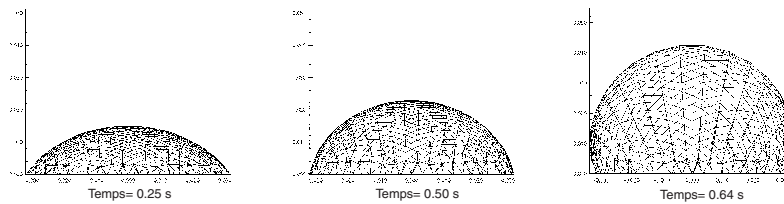
Du point de vue expérimental, le soufflage de la membrane circulaire s'effectue dans un temps relativement petit ( $\sim 1 s$ ). Ceci rend, à chaque instant, les mesures des variables géométriques et physiques en chaque point de la membrane très difficile. Pour remédier à cette situation, nous avons utilisé la simulation numérique pour étudier l'influence de la loi de comportement de Lodge sur la distribution finale des épaisseurs et des contraintes au sein de la feuille thermoplastique. Cette étude a été réalisée pour trois types de chargement en pressions : distribution polynômiale (équation [43]), trois distributions constantes (1000 Pa, 5000 Pa et 21000 Pa) et une distribution linéaire dans le temps ( $P = 0.004 t MPa$ ).

La figure 4 illustre l'évolution de la géométrie de la bulle thermoplastique aux temps 0.25 s, 0.50 s et 0.66 s pour le premier de cas de chargement en pression. La figure 5 illustre, aussi dans ce premier cas de chargement, la répartition des extensions méridienne  $L_1$  et circonférentielle  $L_2$  sur chaque point de la trace de la membrane circulaire. Les résultats numériques obtenus montrent que l'écart entre les extensions  $L_1$  et  $L_2$  est nul au pôle et croît rapidement avec le temps pour atteindre un maximum sur la périphérie de la membrane. En effet, au début du soufflage, les extensions sont égales à l'unité partout sur la membrane, et ensuite, sous l'action des charges de pression, la membrane s'étire et les extensions  $L_1$  et  $L_2$  augmentent. Toutefois, en raison de l'encastrement de la membrane sur sa périphérie circulaire ( $L_2 = 1$ ) et de l'action de la charge qu'elle subit, l'extension  $L_1$  augmente plus rapidement que  $L_2$  et l'écart  $L_1 - L_2$  passe de 11.2% au temps  $t = 0.20s$  à 42.2% au temps  $t = 0.66s$ . Ce phénomène conjugué à l'incompressibilité du matériau thermoplastique ( $L_1 L_2 L_3 = 1$ ) a un effet inverse sur la distribution des épaisseurs qui, dans la configuration déformée, sont proportionnelles à la répartition des extensions  $L_3$  par  $h = L_3 h_0$ . Il s'ensuit qu'au pôle de la membrane l'épaisseur est minimale et est maximale à ses bords, comme illustré sur la figure 6. La diminution des extensions  $L_3$  en chaque point de la trace favorise le développement des contraintes internes dans la matériau thermoplastique, la figure 7 illustre la répartition dans le temps des contraintes  $\sigma_{xx}$  du tenseur de Cauchy.

La figure 8 illustre, aussi pour le premier cas de chargement, l'évolution des extensions  $L_1 (= L_2)$  et  $L_3$  au pôle de la membrane en fonction de temps. Nous observons que  $L_1$  croît beaucoup plus rapidement que  $L_3$  au pôle. Ce comportement est normal puisqu'au pôle de la membrane, l'extension principale  $L_3$  est inversement proportionnelle au carré de  $L_1 (= L_2)$ . Il s'en suit qu'au pôle, l'épaisseur  $h$  tend rapidement vers des faibles valeurs et la membrane cède plus facilement à la charge de pression, qui augmente continuellement dans le temps, en favorisant le développement de contraintes internes au pôle, voir la figure 9 dans le cas des contraintes de Piola-Kirchhoff et la figure 10 dans le cas des contraintes de Cauchy. À ce stade, il faut distinguer entre les pressions qui sont inférieures à la pression maximale que la membrane peut supporter pour le soufflage dynamique, dite pression dynamique critique  $P_C$ , et pour lesquelles les solutions du système dynamique [30] sont stables et les pressions qui sont supérieures à  $P_C$  et pour lesquelles les solutions du système dynamique sont instables. Dans notre étude, ce problème d'analyse numérique de la stabilité de soufflage

n'est pas traité et nous conseillons les lecteurs intéressés de se référer à [VER 99] dans le cas de matériau hyperélastique.

Dans le cas des charges constantes de pression, nous observons un dépassement positif (overshoot) à la position  $x = 0.0081 s$  et un dépassement négatif (undershoot) à  $x = 0.0153 s$  pour la charge de  $21000 Pa$ . Ces phénomènes sont directement reliés aux composantes élastiques des lois de comportement viscoélastiques. Dans le deuxième cas de charges constantes des pressions, la membrane thermoplastique ne subit qu'un gonflement partiel qui ne dure que  $0,026 s$  dans le cas de  $1000 Pa$ ,  $0,012 s$  dans le cas de  $5000 Pa$  et  $0,0095 s$  dans le cas de  $21000 Pa$ . Au-delà de ces instants, les charges de pression n'ont aucun effet sur le soufflage de la membrane (la membrane reste en équilibre permanent). Ce phénomène est illustré sur les figures 9-10 pour les évolutions des contraintes et des extensions au pôle de la membrane respectivement. Par contre, dans le dernier cas de charge linéaire, la pression augmente continuellement et la membrane se gonfle dans le temps comme dans le premier cas. Les distributions des contraintes,  $\sigma_{xx}$ , et des extensions principales,  $L_1$  et  $L_2$ , au pôle sont illustrées sur les figures 11-12 respectivement.



**Figure 4.** *Évolution de la géométrie de la bulle dans le temps*

## 5. Application : thermoformage d'une pièce creuse

Dans un deuxième temps, nous avons utilisé l'approche dynamique pour étudier le thermoformage d'un récipient en ABS. La géométrie de moule, maillé à l'aide des éléments membranes triangulaires, est présentée sur la figure 15. La paraison initiale est une feuille rectangulaire d'épaisseur uniforme ( $0.46 mm$ ), dont les bords sont fixés. Les paramètres rhéologiques utilisés pour la lois de comportement de Lodge sont donnés dans la table 2. Ces paramètres ont été obtenus à l'aide de la technique biaxiale d'identification [ERC 98]. Pour le contact de la préforme et de moule, nous avons considéré l'hypothèse de contact collant, car on estime que le polymère se refroidit et se raidit rapidement (lors du contact entre la paraison thermoplastique, qui est très chaude, et le moule, qui est froid) et que la pression de mise en forme n'est pas suffisante pour déformer la partie de la paraison qui est en contact avec le moule [DEL 91], [LAR 00]. La figure 16 présente les évolutions des déformations au cours de la mise en forme. Dans la figure 17, nous avons présenté la répartition des exten-

sions  $L_3 = h/h_0$  ( $h_0$  et  $h$  sont les épaisseurs dans les configurations non déformée et déformée) sur le demi-plan de symétrie dans le récipient. Cet exemple simple d'application montre l'avantage de l'utilisation de la méthode des éléments finis, basé sur une approche lagrangienne totale, pour simuler, via un modèle de comportement de Lodge, la mise en forme d'une feuille thermoplastique incompressible et isotrope.

Constantes rhéologiques	Modèle de Lodge
$g_1$	0.2205 MPa
$\tau_1$	2.4163 s

Tableau 2. Constantes matérielles de l'ABS

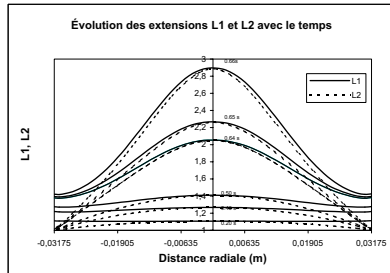


Figure 5. Évolution des extensions L1 et L2

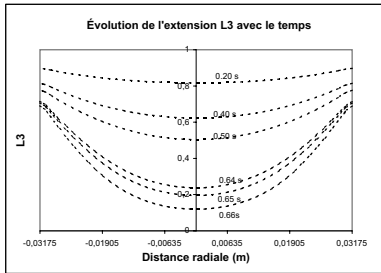


Figure 6. Évolution de l'extension L3

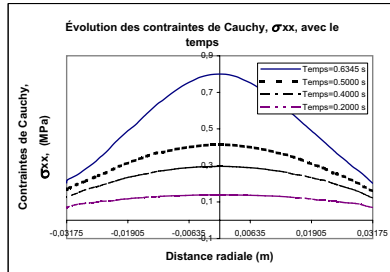


Figure 7. Évolution des contraintes  $\sigma_{xx}$

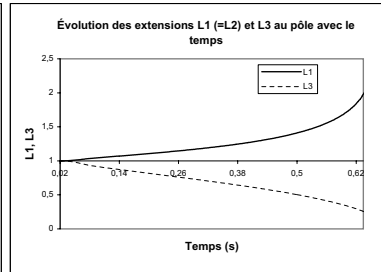


Figure 8. Évolution des extensions L1 et L3, pôle

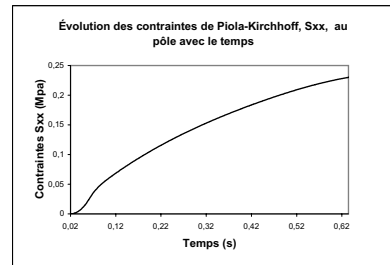


Figure 9. Évolution des contraintes Sxx au pôle

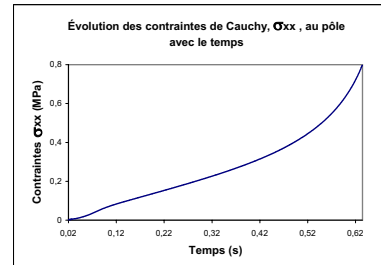


Figure 10. Évolution des contraintes  $\sigma_{xx}$  au pôle

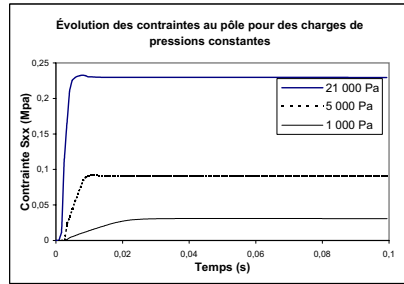


Figure 11. Évolution des contraintes  $S_{xx}$  au pôle, charges constantes de pression

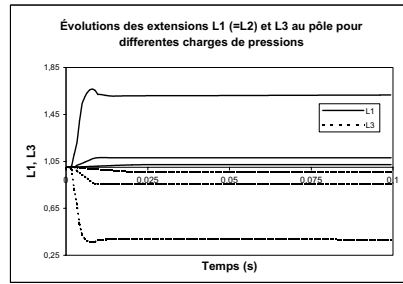


Figure 12. Évolution des extensions  $L1$  (=L2) et  $L3$  au pôle, charges constantes de pression

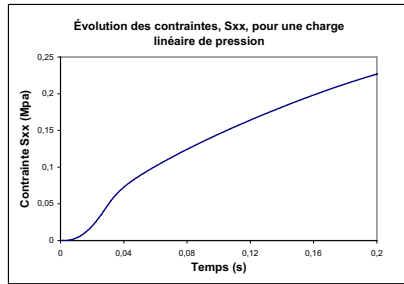


Figure 13. Évolution des contraintes  $S_{xx}$  au pôle, charge linéaire de pression

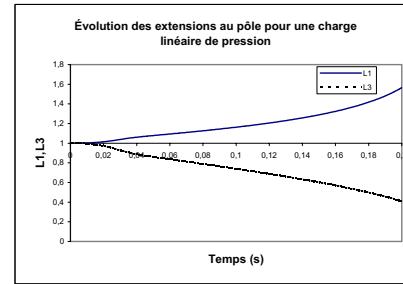


Figure 14. Évolution des extensions  $L1$  et  $L3$  au pôle, charge linéaire de pression

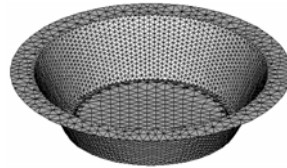


Figure 15. Moule utilisé pour la mise en forme de la pièce

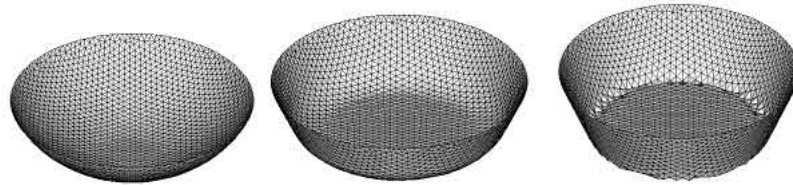
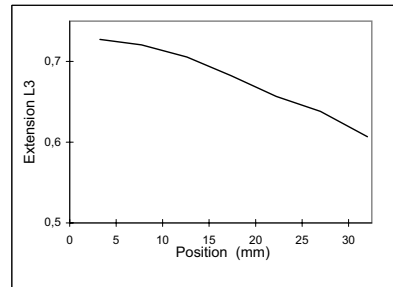


Figure 16. Évolution des déformations dans la pièce



**Figure 17.** *Distribution finale des extensions  $L_3$  dans la pièce*

## 6. Conclusion

Dans ce travail, nous avons développé un code numérique d'éléments finis, basé sur une formulation lagrangienne totale pour simuler le comportement des matériaux thermoplastiques incompressibles et isotropes. Ce code utilise l'approche dynamique. La validation a été effectuée pour le matériau ABS, dans le cas de soufflage libre d'une membrane circulaire. Ensuite, nous avons étudié l'influence de la loi de comportement de Lodge sur la distribution des épaisseurs et des contraintes au sein de la feuille thermoplastique pour trois types de chargement. Finalement une application simple est consacrée au thermoformage d'une pièce en ABS.

Les résultats obtenus ont montré l'importance de ces études pour l'accomplissement de nos travaux futurs concernant la modélisation et la simulation des procédés de mise en forme des thermoplastiques, en particulier les procédés de moulage par extrusion-soufflage et de thermoformage.

## Remerciements

Je remercie la Fondation de l'UQAT pour sa participation financière à ce projet de recherche dans le domaine de la caractérisation et de la modélisation des polymères thermoplastiques.

## 7. Bibliographie

- [DEL 91] DELORENZI H. G., NIED H. F., « Finite element simulation of thermoforming and blow molding », *Progress in polymer processing*, Hanser Verlag, 1991, p. 117-171.
- [DER 00] DERDOURI A., ERCHIQUI F., BENDADA H., VERRON E., « Viscoelastic behaviour of polymer membranes under inflation », *XIII International Congress on Rheology*, Cambridge, 2000, p. 394-396.

- [DEV 77] DEVRIES A. J., BONNEBAT C., BEAUTEPMIS J., « Uni and biaxial orientation of polymer films and sheets », *Journal of Polymer Science : Polymer Symposium*, vol. 58, 1977, p. 109-156.
- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Collection Université de Compiègne, 2<sup>ième</sup> édition, 1984.
- [DOK 89] DOKAINISH M. A., SUBBARAJ K., « A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics », *Comput. Struct.*, vol. 32, n° 6, 1989, p. 1371-1386.
- [ERC 98] ERCHIQUI F., DERDOURI A., LAROCHE D., « Biaxial characterization of softened polymers », *Polymer Processing Society, PPS*, Toronto, 17-19 August 1998, p. 115-116.
- [FER 80] FERRY J. D., *Viscoelastic properties of polymers*, Hohn Wily & Sons, 1980.
- [JOY 72] JOYE D. D., POEHLIN G. W., DENSON C. D., « A bubble inflation technique for the measurement of viscoelastic properties in equal biaxial extension flow. II », *Trans. Soc. Rheol.*, n° 16, 1972, p. 421-445.
- [KHA 92] KHAYAT R. E., DERDOURI A., GARCIA-RÉJON A., « Inflation of hyperelastic cylindrical membranes as applied to blow molding », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, n° 1, 1992, p. 69-87.
- [LAP 82] LAPIDUS L., PINDER G. F., *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, John Wiley & Sons, 1982.
- [LAR 98] LAROCHE D., ERCHIQUI F., « 3D modelling of the blow moulding process » *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and applications*, Huétink & Baaijens (eds) 1998, Balkema, Rotterdam, ISBN 90 5410 970 X, p. 483-488.
- [LAR 00] LAROCHE D., ERCHIQUI F., « Experimental and theoretical study of the thermoformability of industrial polymers », *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 19, n° 3, 2000, p. 231-239.
- [LI 01] LI Y., NEMES J. A., DERDOURI A., « Membrane Inflation of Polymeric Materials : Experiments and Finite Element Simulations », *Polymer Engineering & Science*, vol. 41, n° 8, 2001, p. 1399-1412.
- [LOD 64] LODGE A. S., *Elastic liquids*, Academic Press, London, 1964.
- [NOV 99] NOVOTNY P., SAHA P., KOUBA K., « Fitting of K-BKZ model parameters for the simulation of thermoforming », *International Polymer Processing XIV*, 1999, p. 291-295.
- [RAS 00] RASMUSSEN H. K., CHRISTENSEN J. H., GOTTSCHKE S. « Inflation of polymer melts into elliptic and circular cylinders », *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 93, Issues 2-3, 2000, p. 245-263.
- [SCH 75] SCHMIDT L. R., CARLEY J. F., « Biaxial stretching of heat-softened plastic : experiments and results », *Polymer Engineering & Science*, vol. 15, n° 1, 1975, p. 51-62.
- [VER 99] VERRON E., KHAYAT R. E., DERDOURI A., PESEUX B., « Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes », *Journal of Rheology*, vol. 43, n° 5, 1999, p. 1083-1097.
- [VER 01] VERRON E., MARCKMANN G., PESEUX B., « Dynamic inflation of non-linear elastic and viscoelastic rubberlike membranes », *Int. Journal for Num. Methods in Engineering*, vol. 50, n° 5, 2001, p. 1233-1251.
- [XIA 01] XIAOPING G., « Kinematic modeling of finite axisymmetric inflation for an arbitrary of polymeric of membrane inflation », *Polym -Plast.Technol.Eng*, 2001, p. 341-361.