

---

# Condition de préservation de l'orientation

## Application en hyperélasticité compressible

François Peyraut — Nadia Labeled

Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM)

Laboratoire Mécatronique 3M (M3M)

Rue du Château, Sévenans

90010 Belfort cedex

francois.peyraut@utbm.fr

nadia.labeled@utbm.fr

---

*RÉSUMÉ.* Pour le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko, il a été établi qu'un défaut de préservation de l'orientation conduit à la divergence de l'algorithme de Newton-Raphson. Il est donc important de disposer de critère permettant de détecter un tel défaut au cours d'un calcul numérique. Le critère usuel, qui porte sur le signe du déterminant de la matrice gradient des déformations  $F$ , n'est pas toujours suffisant. Il peut en effet être mis en défaut par un retournement de surface avec un déterminant de  $F$  positif. On propose alors un critère plus efficace, basé sur le changement de signe des valeurs propres de  $F$  entre les configurations déformée et non déformée. L'application de ce critère est illustrée avec le modèle de Blatz-Ko dans le cas d'une éprouvette en traction-compression.

*ABSTRACT.* For the Blatz-Ko compressible hyperelastic model, it was established that an orientation preservation defect leads to the divergence of Newton-Raphson algorithm. It is thus significant to have criterion in order to detect such a defect during a numerical calculation. The usual criterion, which relates to the sign of the deformation gradient matrix  $F$  determinant, is not always sufficient. Indeed, a surface reversal can appear with a positive determinant of  $F$ . One then proposes a more effective criterion, based on the change of sign of  $F$  eigenvalues between the reference and the deformed configurations. The application of this criterion is illustrated with the Blatz-Ko model, in the case of a specimen subjected to a tensile or compressive loading.

*MOTS-CLÉS :* préservation de l'orientation, hyperélasticité compressible, modèle de Blatz-Ko, Newton-Raphson avec pilotage par longueur d'arc.

*KEYWORDS:* orientation preservation, compressible hyperelasticity, Blatz-Ko model, Newton-Raphson with arc length control.

---

## 1. Introduction

Actuellement, l'hyperélasticité compressible pose de nombreux problèmes. En particulier, l'existence et l'unicité du champ de déplacements ne sont pas garanties [ARO 98, CIA 85]. La perte d'ellipticité des équations d'équilibre [ARO 98, HOR 95, HOR 96]) peut par ailleurs entraîner des difficultés numériques à proximité des valeurs critiques de chargement [WIN 95]. Enfin, la mise en défaut de la préservation de l'orientation peut être une source de divergence numérique comme cela a été démontré dans le cas d'un cube en compression dans un container rigide [PEY 01]. Il est donc important de disposer de critères fiables pour éviter une violation de la préservation de l'orientation au cours d'un calcul numérique.

Dans cet article, on se propose d'établir que le critère usuel, qui porte sur la positivité du déterminant de la matrice gradient des déformations  $F$ , n'est pas toujours suffisant. En effet, ce critère, qui se base sur les changements de volume infinitésimaux entre les configurations déformée et non déformée, ne prend pas en compte les retournements de surface. Or, pour de tels retournements, l'orientation n'est pas préservée bien que le déterminant de  $F$  soit positif. C'est la raison pour laquelle on propose un nouveau critère basé sur le changement de signe des valeurs propres de  $F$  entre les configurations déformée et non déformée. On établit en effet qu'un tel critère est symptomatique, soit d'un défaut de préservation de l'orientation avec un déterminant de  $F$  négatif, soit d'un phénomène de retournement de surface avec un déterminant de  $F$  positif.

Ce critère est illustré en pratique avec le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko, dans le cas d'une éprouvette rectangulaire en traction-compression simple. Pour cet exemple, on constate que l'algorithme de Newton-Raphson diverge lorsqu'un changement de signe des valeurs propres de  $F$  est observé. Ce constat est établi à l'aide du code de calcul aux éléments finis ANSYS et avec une méthode de pilotage par longueur d'arc. Dans le cas contraire, lorsque l'orientation est préservée, on montre qu'il est possible de choisir un rayon d'arc optimal, c'est-à-dire le plus grand possible pour minimiser le temps de calcul tout en étant suffisamment petit pour assurer la convergence.

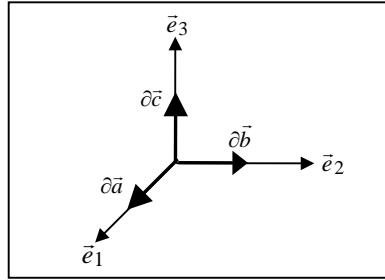
## 2. Contrôle de la préservation de l'orientation par les valeurs propres de $F$

Pour contrôler la préservation de l'orientation, un critère usuel consiste à étudier le signe du déterminant de la matrice gradient des déformations. Si le déterminant est strictement positif, l'orientation est préservée. Si le déterminant est négatif ou nul, l'orientation n'est pas préservée. Mais ce critère, basé sur les changements infinitésimaux de volume, ne permet pas de détecter les retournements de surface.

Afin d'introduire un critère plus efficace, on commence par définir la notion de retournement de surface. Pour cela, on considère un trièdre direct de trois vecteurs infinitésimaux  $\partial \vec{a}$ ,  $\partial \vec{b}$  et  $\partial \vec{c}$  orthogonaux deux à deux (figure 1). Pour simplifier,

on suppose que ces trois vecteurs, de longueurs  $\delta a$ ,  $\delta b$  et  $\delta c$  strictement positives, sont parallèles aux axes.

$$\partial\vec{a} = \delta a \vec{e}_1 ; \partial\vec{b} = \delta b \vec{e}_2 ; \partial\vec{c} = \delta c \vec{e}_3 \quad [1]$$



**Figure 1.** Trièdre formé par trois vecteurs infinitésimaux

On suppose également que la matrice gradient des déformations est diagonale :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad [2]$$

La condition classique de préservation de l'orientation s'écrit alors :

$$\det(F) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0 \quad [3]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 \text{ et } \lambda_3 > 0 & [4] \\ \text{ou} & \\ \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 > 0 \text{ et } \lambda_3 < 0 & [5] \\ \text{ou} & \\ \lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 \text{ et } \lambda_3 < 0 & [6] \\ \text{ou} & \\ \lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 > 0 \text{ et } \lambda_3 > 0 & [7] \end{cases}$$

Parmi ces quatre conditions, on va montrer que seule la condition [7] permet d'empêcher un retournement de surface. Pour cela, considérons la surface  $S_0$  portée par  $\partial\vec{a}$  et  $\partial\vec{b}$  et orientée par la normale :

$$\vec{n}_0 = \frac{\partial\vec{a} \wedge \partial\vec{b}}{\|\partial\vec{a} \wedge \partial\vec{b}\|} = \vec{e}_3 \quad [8]$$

La surface déformée  $S$  est alors portée par les vecteurs  $d\vec{a}$  et  $d\vec{b}$  définis par :

$$d\vec{a} = F\partial\vec{a} = \lambda_1 \partial a \vec{e}_1 \quad ; \quad d\vec{b} = F\partial\vec{b} = \lambda_2 \partial b \vec{e}_2 \quad [9]$$

De plus, la surface  $S$  est orientée par la normale :

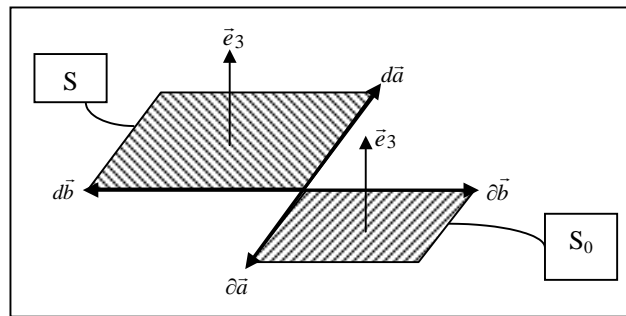
$$\vec{n} = \frac{d\vec{a} \wedge d\vec{b}}{\|d\vec{a} \wedge d\vec{b}\|} = \text{signe}(\lambda_1 \lambda_2) \vec{n}_0 \quad [10]$$

Enfin, si on suppose que les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont toutes les deux négatives, les normales déformée et non déformée sont identiques :

$$\vec{n} = \vec{n}_0 \quad [11]$$

Sous réserve que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  soient toutes les deux négatives, la surface  $S$  a donc la même normale que  $S_0$ . Par ailleurs, d'après [1] et [9],  $\partial\vec{a}$  et  $d\vec{a}$  ont des directions opposées ainsi que  $\partial\vec{b}$  et  $d\vec{b}$ . La surface  $S$  se déduit donc de  $S_0$  par un retournement (figure 2).

Ce retournement n'ayant pas de sens physique, il faut le proscrire. Pour cela, il suffit d'empêcher les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  d'être négatives simultanément. Ce qui conduit à la suppression de la condition [4] pour la préservation de l'orientation. On élimine de la même façon les conditions [5] et [6] en raisonnant avec les couples de vecteurs  $(\partial\vec{a}, \partial\vec{c})$  et  $(\partial\vec{b}, \partial\vec{c})$ . Au final, on ne conserve que la condition [7]. L'orientation sera donc préservée si les trois valeurs propres de  $F$  sont positives.

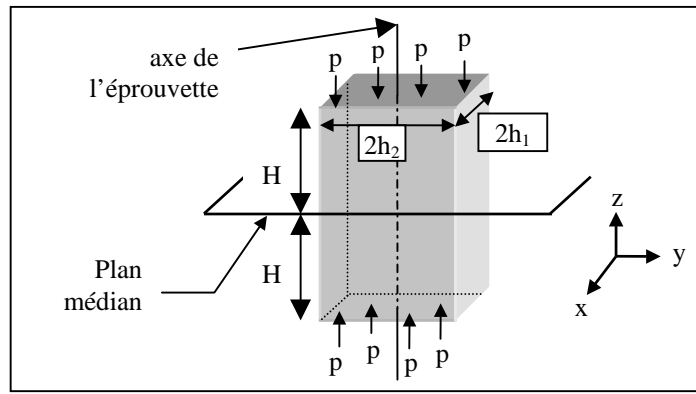


**Figure 2.** *Retournement de surface*

### 3. Application au cas d'une éprouvette en traction compression simple avec le modèle hyperélastique de Blatz-Ko

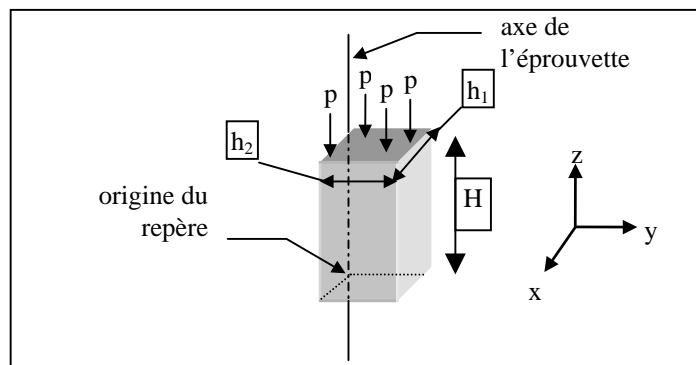
#### 3.1. Conditions aux limites

On considère une éprouvette de section rectangulaire soumise à une pression surfacique uniforme  $p$  sur ses faces inférieure et supérieure (figure 3). Si  $p$  est positif, le chargement s'opère en traction. Si  $p$  est négatif, le chargement s'effectue en compression. Les dimensions de l'éprouvette sont  $2h_1 \times 2h_2 \times 2H$ .



**Figure 3.** Eprouvette en traction ( $p > 0$ ) ou en compression ( $p < 0$ )

La structure et le chargement présentent une symétrie par rapport au plan médian d'une part et par rapport à l'axe de l'éprouvette d'autre part. On limite donc l'étude au 1/8 de la structure (figure 4).



**Figure 4.** Un huitième de l'éprouvette

L'origine du repère est située à l'intersection de l'axe de l'éprouvette et du plan médian (figure 4). Enfin, pour tenir compte de la symétrie du problème, les conditions aux limites suivantes ont été retenues :

$$u_x(0, y, z) = u_y(x, 0, z) = u_z(x, y, 0) = 0 \quad [12]$$

### 3.2. Contrôle de la préservation de l'orientation par les valeurs propres de la matrice gradient des déformations

On a donné à la section 2 un critère de contrôle de la préservation de l'orientation basé sur les valeurs propres de F. Pour appliquer ce critère, on va calculer successivement le déplacement u, la matrice F et les valeurs propres de F.

Le déplacement est obtenu en minimisant l'énergie potentielle totale qui s'écrit en l'absence de forces de volume :

$$I(v) = \iiint_{\Omega_0} \mathcal{W} \, d\Omega_0 - \iint_S p v_z \, dS \quad [13]$$

où  $\Omega_0$  est le volume initial occupé par l'éprouvette, S est la surface d'application des efforts dans la configuration déformée,  $v_z$  est la troisième composante d'un champ de déplacements admissible v et  $\mathcal{W}$  est la densité d'énergie du modèle de Blatz-Ko [BLA 62] :

$$\mathcal{W} = \frac{\mu}{2} \left[ \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right] \quad [14]$$

où  $\mu$  représente le module de cisaillement et  $I_2$  et  $I_3$  sont les deuxième et troisième invariants du tenseur des déformations de Cauchy-Green à gauche B :

$$I_2 = \frac{1}{2} \left\{ (Tr(B))^2 - Tr(B^2) \right\} ; I_3 = \det(B) \quad [15]$$

On suppose par ailleurs que les composantes du champ v sont linéaires par rapport aux coordonnées cartésiennes lagrangiennes x, y et z :

$$v_x(x) = \frac{V_x}{h_1} x ; v_y(y) = \frac{V_y}{h_2} y ; v_z(z) = \frac{V_z}{H} z \quad [16]$$

où  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  sont des constantes qui représentent les composantes de v en  $x=h_1$ ,  $y=h_2$  et  $z=H$ .

Avec cette hypothèse de linéarité, les composantes  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  du déplacement solution  $u$  s'écrivent :

$$u_x(x) = \frac{U_x}{h_1} x; u_y(y) = \frac{U_y}{h_2} y; u_z(z) = \frac{U_z}{H} z \quad [17]$$

En rappelant que  $F$  est la somme de l'identité et du gradient des déplacements et que  $B$  est le produit matriciel de  $F$  par  $F^T$ , on calcule successivement  $B$  à partir de [16],  $I_2$  et  $I_3$  à partir de [15] et  $\mathcal{W}$  à partir de [14]. On en déduit que le terme volumique de l'énergie potentielle totale donnée par [13] s'écrit :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_0} \mathcal{W} \, d\Omega_0 &= \frac{\mu}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{V_x}{h_1} \right)^{-2} + \left( 1 + \frac{V_y}{h_2} \right)^{-2} + \left( 1 + \frac{V_z}{H} \right)^{-2} \right. \\ &\left. + 2 \left| \left( 1 + \frac{V_x}{h_1} \right) \left( 1 + \frac{V_y}{h_2} \right) \left( 1 + \frac{V_z}{H} \right) \right| - 5 \right\} h_1 h_2 H \end{aligned} \quad [18]$$

où la valeur absolue provient du terme en racine dans [14].

Par ailleurs, le terme surfacique de l'énergie potentielle s'obtient en utilisant [16] et [17] :

$$\iint_S p v_z \, dS = p V_z \left| (U_x + h_1)(U_y + h_2) \right| \quad [19]$$

où la valeur absolue provient du fait que la surface d'application des efforts doit être positive.

Pour obtenir l'expression de l'énergie potentielle totale, on retranche [19] de [18] :

$$\begin{aligned} I(V_x, V_y, V_z) &= \left[ \frac{\mu}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{V_x}{h_1} \right)^{-2} + \left( 1 + \frac{V_y}{h_2} \right)^{-2} + \left( 1 + \frac{V_z}{H} \right)^{-2} - 5 \right. \right. \\ &\left. \left. + 2 \left| \left( 1 + \frac{V_x}{h_1} \right) \left( 1 + \frac{V_y}{h_2} \right) \left( 1 + \frac{V_z}{H} \right) \right| \right] - p \frac{V_z}{H} \left| \left( 1 + \frac{U_x}{h_1} \right) \left( 1 + \frac{U_y}{h_2} \right) \right| \right] h_1 h_2 H \end{aligned} \quad [20]$$

La présence des deux valeurs absolues conduit à l'étude de quatre cas.

$$\text{Cas 1 : } \left(1 + \frac{V_x}{h_1}\right) \left(1 + \frac{V_y}{h_2}\right) \left(1 + \frac{V_z}{H}\right) > 0$$

En enlevant la première valeur absolue dans [20], en annulant les dérivées partielles par rapport à  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  et en remplaçant  $V_x$  par  $U_x$ ,  $V_y$  par  $U_y$  et  $V_z$  par  $U_z$ , on obtient les équations d'Euler associées à la minimisation de l'énergie :

$$\begin{cases} -\left(1 + \frac{U_x}{h_1}\right)^{-3} + \left(1 + \frac{U_y}{h_2}\right) \left(1 + \frac{U_z}{H}\right) = 0 \\ -\left(1 + \frac{U_y}{h_2}\right)^{-3} + \left(1 + \frac{U_x}{h_1}\right) \left(1 + \frac{U_z}{H}\right) = 0 \\ -\left(1 + \frac{U_z}{H}\right)^{-3} + \left(1 + \frac{U_x}{h_1}\right) \left(1 + \frac{U_y}{h_2}\right) - \frac{p}{\mu} \left| \left(1 + \frac{U_x}{h_1}\right) \left(1 + \frac{U_y}{h_2}\right) \right| = 0 \end{cases} \quad [21]$$

Il s'agit d'un système non linéaire couplé dont les inconnues sont  $U_x$ ,  $U_y$  et  $U_z$ . Afin de le simplifier, on exprime le déterminant de  $F$  en fonction de  $U_x$ ,  $U_y$  et  $U_z$  à partir de [17] :

$$\det(F) = \left(1 + \frac{U_x}{h_1}\right) \left(1 + \frac{U_y}{h_2}\right) \left(1 + \frac{U_z}{H}\right) \quad [22]$$

Ce déterminant étant non nul, on a le droit d'introduire les nouvelles inconnues :

$$\alpha = \left(1 + \frac{U_x}{h_1}\right)^{-1} ; \beta = \left(1 + \frac{U_y}{h_2}\right)^{-1} ; \gamma = \left(1 + \frac{U_z}{H}\right)^{-1} \quad [23]$$

Le système [21] s'écrit alors de manière plus simple :

$$\begin{cases} \alpha^3 \beta \gamma = 1 & [24] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \beta^3 \gamma = 1 & [25] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \beta \gamma^3 = 1 - \frac{p}{\mu} | \alpha \beta | \alpha^{-1} \beta^{-1} & [26] \end{cases}$$



En retranchant [25] à [24], on obtient :

$$\alpha = \pm\beta \quad [27]$$

ce qui amène à distinguer deux sous-cas.

**Cas 1.1 :**  $\alpha = \beta$

On reporte l'égalité entre  $\alpha$  et  $\beta$  dans [24]. Il s'en suit d'abord que  $\gamma$  est strictement positif et ensuite que  $\alpha$  et  $\gamma$  sont reliés par :

$$\alpha = \pm\gamma^{-1/4} \quad [28]$$

On reporte dans [26] et on obtient  $\gamma$  :

$$\gamma = \left(1 - \frac{p}{\mu}\right)^{2/5} \quad [29]$$

On obtient ensuite  $\alpha$  à partir de [28] :

$$\alpha = \pm \left(1 - \frac{p}{\mu}\right)^{-1/10} \quad [30]$$

**Cas 1.2 :**  $\alpha = -\beta$

En suivant un raisonnement similaire à celui du cas 1.1, on obtient  $\gamma$  (qui est cette fois-ci strictement négatif) puis  $\alpha$  :

$$\gamma = -\left(1 + \frac{p}{\mu}\right)^{2/5} ; \alpha = \pm \left(1 + \frac{p}{\mu}\right)^{-1/10} \quad [31]$$

$$\mathbf{Cas\ 2 :} \quad \left(1 + \frac{V_x}{h_1}\right) \left(1 + \frac{V_y}{h_2}\right) \left(1 + \frac{V_z}{H}\right) < 0$$

On procède de manière analogue au cas 1 en distinguant deux sous-cas.

**Cas 2.1 :**  $\alpha = \beta$

$$\gamma = -\left(1 + \frac{p}{\mu}\right)^{\frac{2}{5}} ; \alpha = \pm \left(1 + \frac{p}{\mu}\right)^{-\frac{1}{10}} \quad [32]$$

**Cas 2.2 :**  $\alpha = -\beta$

$$\gamma = \left(1 - \frac{p}{\mu}\right)^{\frac{2}{5}} ; \alpha = \pm \left(1 - \frac{p}{\mu}\right)^{-\frac{1}{10}} \quad [33]$$

Lorsque  $\gamma$  est négatif (cas 1.2 et 2.1), la troisième égalité de [23] entraîne :

$$1 + \frac{U_z}{H} < 0 \Rightarrow U_z < -H \quad [34]$$

Cela correspond donc à un changement d'orientation de la surface de chargement. Il s'en suit une inversion du sens de chargement. En conséquence, si on raisonne avec le chargement en configuration de référence, il faut changer  $p$  en  $-p$ . Avec cette convention, et en revenant aux inconnues d'origine, les quatre cas étudiés précédemment peuvent être synthétisés par [35] et [36].

$$U_x = \left\{ \pm \left(1 - \frac{p}{\mu}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 \right\} h_1 ; U_y = \left\{ \pm \left(1 - \frac{p}{\mu}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 \right\} h_2 \quad [35]$$

$$U_z = \left\{ \pm \left(1 - \frac{p}{\mu}\right)^{-\frac{2}{5}} - 1 \right\} H \quad [36]$$

La solution en déplacement n'est donc pas unique. Pour chaque composante, il y a en effet deux solutions possibles. L'une est associée à un signe plus et l'autre à un signe moins. En combinant les diverses possibilités, il y a huit solutions. Pour déterminer la seule qui soit admissible physiquement, on applique le critère de préservation de l'orientation basé sur les valeurs propres de  $F$ . Ces valeurs propres sont obtenues en calculant  $F$  à l'aide de [17].

$$F = \begin{bmatrix} 1 + \frac{U_x}{h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{U_y}{h_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{U_z}{H} \end{bmatrix} \quad [37]$$

On déduit ensuite les valeurs propres de F en fonction du chargement p à l'aide de [35], [36] et [37] :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm \left(1 - \frac{p}{\mu}\right)^{1/10}; \lambda_3 = \pm \left(1 - \frac{p}{\mu}\right)^{-2/5} \quad [38]$$

D'après le critère du paragraphe 2 sur la préservation de l'orientation, la seule combinaison admissible est celle qui est associée à trois signes +. Les sept autres solutions peuvent conduire à la divergence de l'algorithme de Newton-Raphson comme cela est montré dans le paragraphe suivant.

### 3.3. Divergence de Newton-Raphson avec pilotage par longueur d'arc

Dans ce paragraphe, on choisit des conditions de chargement et de calcul qui conduisent à la divergence du code de calcul ANSYS. On considère pour cela un chargement en compression de  $p=1.9$  MPa, avec un module d'Young E choisi égal à 0.552 MPa conformément aux résultats d'essais obtenus par Blatz et Ko ([BLA 62]). Les dimensions de l'éprouvette ont été prises égales à  $H=25$  cm,  $h_1=2.5$  cm et  $h_2=1.25$  cm. On choisit enfin Newton-Raphson comme algorithme de résolution, avec une méthode de pilotage par longueur d'arc. Le rayon d'arc est pris égal à 1.

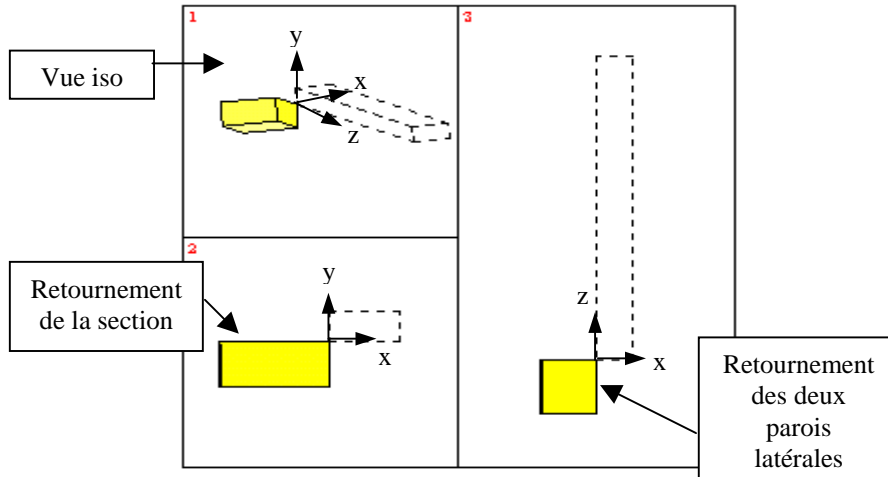
La structure déformée à la première itération est présentée sur la figure 5 (la structure non déformée est en pointillé). On remarque un triple retournement de surface, au niveau de la section et des deux parois latérales de l'éprouvette. Cela se traduit par :

$$U_x < -h_1; U_y < -h_2; U_z < -H \quad [39]$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{U_x}{h_1} < 0; 1 + \frac{U_y}{h_2} < 0; 1 + \frac{U_z}{H} < 0 \quad [40]$$

D'après [37], on est dans le cas où les trois valeurs propres de F sont négatives. L'orientation n'est donc pas préservée. Par la suite, lorsque le nombre d'itérations

augmente, la situation ne s'améliore pas et l'algorithme diverge. La connexion entre la préservation de l'orientation, le changement de signe des valeurs propres de F et la divergence de Newton-Raphson est ainsi mise en évidence. Le paragraphe suivant analyse de manière plus précise cette connexion afin de pouvoir spécifier le rayon d'arc assurant la convergence.



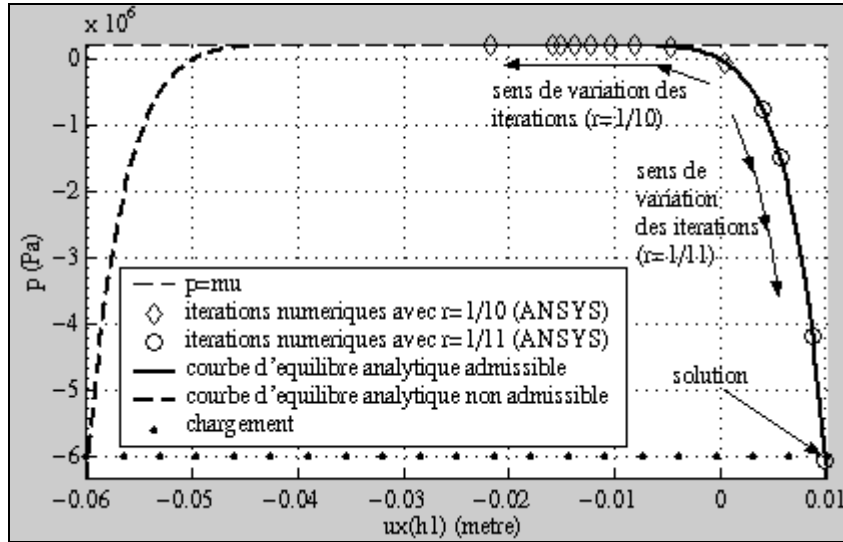
**Figure 5.** Première itération de Newton-Raphson (ANSYS)

### 3.4. Condition de convergence pour la méthode de Newton-Raphson avec pilotage par longueur d'arc

Pour établir une condition de convergence, il est nécessaire d'obtenir d'abord les relations entre les déplacements et les efforts. Celles-ci se déduisent de [35] et de [36]. On montre en effet aisément que [35] s'écrit :

$$\mu \left[ 1 - \left( 1 + \frac{U_x}{h_1} \right)^{10} \right] = p ; \left[ 1 - \left( 1 + \frac{U_y}{h_2} \right)^{10} \right] = p \quad [41]$$

A partir de [41], on a porté sur la figure 6 la courbe de  $U_x$  en fonction de  $p$  (celle de  $U_y$  en fonction de  $p$  adopte une forme similaire pour des raisons évidentes de symétrie). On note une parfaite correspondance avec les résultats numériques obtenus par ANSYS.



**Figure 6.** Déplacement horizontal  $U_x$  en fonction du chargement  $p$

Exploitions maintenant la relation [36]. Comme il y a deux solutions possibles, il faut distinguer deux cas :

**1<sup>er</sup> cas :**  $U_z > -H$

Le déplacement vertical correspond dans ce cas à la solution associée au signe plus. On en déduit que :

$$\mu \left[ 1 - \left( 1 + \frac{U_z}{H} \right)^{-5/2} \right] = p \quad [42]$$

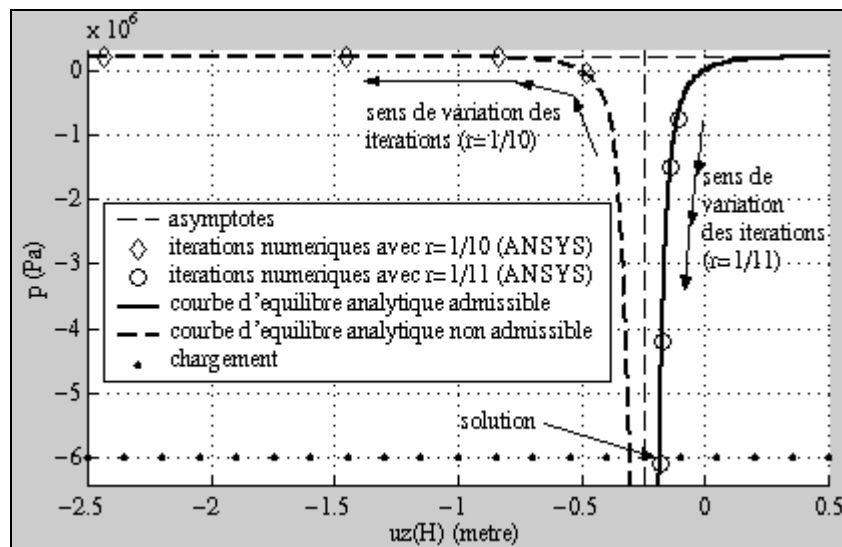
La courbe d'équilibre associée à cette équation est admissible. En effet, comme  $U_z$  est plus grand que  $-H$ , il n'y a pas de retournement des parois latérales de l'éprouvette. La courbe est représentée en traits pleins gras sur la figure 7.

**2<sup>e</sup> cas :**  $U_z < -H$

Le déplacement vertical correspond dans ce cas à la solution associée au signe moins. On en déduit l'équation [43].

$$\mu \left[ 1 - \left( -1 - \frac{U_z}{H} \right)^{-5/2} \right] = p \quad [43]$$

La courbe associée à cette équation n'est pas admissible. En effet, comme  $U_z$  est plus petit que  $-H$ , il y a un retournement des parois latérales de l'éprouvette. La courbe est représentée en traits pointillés gras sur la figure 7.

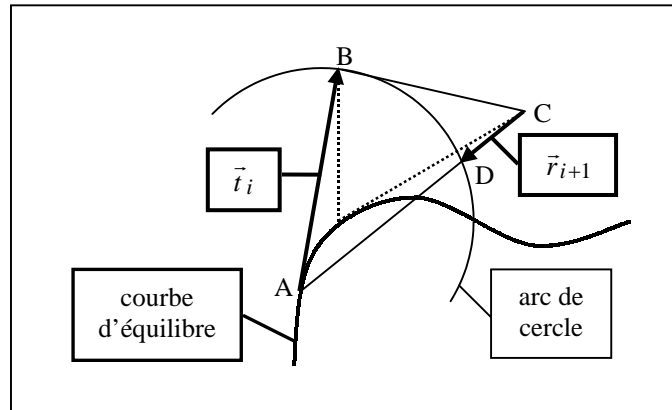


**Figure 7.** Déplacement vertical  $U_z$  en fonction du chargement  $p$

On note sur la figure 7 une parfaite corrélation entre les formules [42] et [43] d'une part et les résultats numériques obtenus par ANSYS d'autre part. Les deux formules sont donc validées. Elles vont nous aider à trouver une condition de convergence optimale adaptée à l'exemple traité.

Au préalable, il est nécessaire de comprendre l'implémentation de la méthode de Newton-Raphson avec pilotage par longueur d'arc dans le code de calcul ANSYS. Dans ce code, les itérations sur l'arc de cercle sont réalisées en deux étapes. La première consiste à effectuer une itération orthogonale (updated normal plane method [RAM 80]). Il s'agit du passage du point B au point C sur la figure 8. La deuxième étape apporte ensuite une correction permettant de se repositionner sur l'arc de cercle (passage du point C au point D). Le repositionnement s'effectue en prenant comme résidu le produit scalaire de deux vecteurs. Le premier vecteur, noté  $\vec{t}_i$ , représente la tangente actuelle. Il relie les points A et B. Le second vecteur, noté

$\vec{r}_{i+1}$ , est parallèle au vecteur tangent suivant  $\vec{t}_{i+1}$  (qui relie les points A et C). Il est orienté dans la direction opposée à  $\vec{t}_{i+1}$ . Il relie les points C et D. La combinaison des deux étapes constitue la méthode d'itération sphérique explicite [FOR 87]. Elle donne des résultats analogues à la méthode de Crisfield [CRIS 81].



**Figure 8.** *Itération sphérique explicite*

A la première itération, le point B est cherché à l'intersection entre la tangente à l'origine et la droite de chargement. Pour éviter la divergence, ce point doit être localisé sur la branche de courbe admissible où l'orientation est préservée. Dans l'exemple qui nous intéresse, il est clair que c'est toujours le cas pour ce qui concerne le déplacement horizontal (figure 6). En revanche, pour le déplacement vertical (figure 7), il y a une condition à imposer. Cette condition dépend du chargement et du rayon d'arc. Pour l'obtenir, on détermine l'équation de la tangente à l'origine à partir de [42] :

$$f = \frac{5\mu}{2H} U_z \quad [44]$$

Le chargement initial étant égal à  $pr$ , on obtient les coordonnées de l'intersection:

$$\left( \frac{2H}{5\mu} pr; pr \right) \quad [45]$$

Pour que l'intersection soit localisée sur la branche de courbe admissible, il faut que son abscisse soit plus grande que  $-H$ . Cela se traduit par les inégalités [46] et [47] qui suivent.

$$\left\{ \begin{array}{l} r > -\frac{5 \mu}{2 p} \text{ si } p > 0 \text{ (traction)} \\ r < -\frac{5 \mu}{2 p} \text{ si } p < 0 \text{ (compression)} \end{array} \right. \quad [46]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r > -\frac{5 \mu}{2 p} \text{ si } p > 0 \text{ (traction)} \\ r < -\frac{5 \mu}{2 p} \text{ si } p < 0 \text{ (compression)} \end{array} \right. \quad [47]$$

Le rayon d'arc  $r$  étant positif, la condition [46] est toujours satisfaite. Il n'y a donc aucune précaution particulière à prendre pour un chargement en traction. En revanche, pour un chargement en compression, il est nécessaire de choisir  $r$  en accord avec [47]. Si on tient compte du fait que le module de cisaillement  $\mu$  est relié au module d'Young  $E$  par [BLA 62] :

$$E = \frac{5}{2} \mu \quad [48]$$

la relation [47] s'écrit encore :

$$r < -\frac{E}{p} \quad [49]$$

Enfin, dans le code ANSYS, la longueur d'arc initiale est inversement proportionnelle à un entier naturel  $n$  spécifié par l'utilisateur. Le plus grand  $r$  assurant la convergence est donc donné par :

$$r = \frac{1}{\text{ent} \left[ -\frac{p}{E} \right] + 1} \quad [50]$$

où  $\text{ent}$  représente la partie entière.

La formule [50] dépend du rapport adimensionnel  $p/E$ . Elle satisfait au mieux deux objectifs antagonistes. Le premier est la convergence de l'algorithme. Pour cela,  $r$  doit être petit. Le second objectif est un temps de calcul minimum. Pour cela,  $r$  doit être grand. Pour illustrer ce point, on considère deux cas avec un rapport  $p/E$  égal à  $-10.9$ . Dans le premier cas, on choisit  $r$  en conformité avec la formule [50]. On obtient alors  $r$  égal à  $1/11$ . On constate que l'algorithme converge (figures 6 et 7). Dans le second cas, on choisit le premier  $r$  qui met en défaut la formule [50] :

$$r = \frac{1}{\text{ent} \left[ -\frac{p}{E} \right]} \quad [51]$$



$r$  est alors égal à  $1/10$ . On note que l'algorithme diverge (figures 6 et 7). Dans un cas comme dans l'autre (convergence ou divergence), les résultats sont donc conformes aux prévisions de la formule [50]. Ils confirment qu'elle fournit une condition optimale de convergence.

#### 4. Conclusions et perspectives

Dans cet article, on a montré que le signe du déterminant de la matrice gradient des déformations  $F$  n'était pas toujours suffisant pour contrôler la préservation de l'orientation. Ce déterminant ne prend en effet pas en compte les problèmes de retournement de surface.

On propose alors un critère basé sur le changement de signe des valeurs propres de  $F$  entre la configuration de référence et la configuration déformée. On montre en effet qu'un tel changement de signe est symptomatique, soit d'un défaut de préservation de l'orientation avec un déterminant de  $F$  négatif, soit d'un retournement de surface avec un déterminant de  $F$  positif.

Le lien entre la préservation de l'orientation et les valeurs propres de  $F$ , établi dans le cas général, a été examiné avec succès dans le cas particulier d'une éprouvette hyperélastique compressible (modèle de Blatz-Ko), de section rectangulaire et soumise à un effort de traction ou de compression simple. Pour cet exemple, une formule analytique donnant la longueur d'arc initiale pour une convergence optimale a également été obtenue.

Pour le cas général, il n'existe pas a priori de formules analytiques permettant de choisir au mieux la longueur d'arc initiale. La continuité de ce travail consistera donc à prévenir numériquement les risques de divergence liés à la violation de la préservation de l'orientation. Cette prévention s'effectuera dans le cadre d'un algorithme traditionnel de Newton-Raphson, en contrôlant les valeurs propres de  $F$  aux points de Gauss du maillage et à chaque itération. L'algorithme qui en résulte est en cours d'implémentation dans le code aux éléments finis FER [FEN 02].

#### 5. Bibliographie

- [ARO 98] ARON M., CHRISTOPHER C. WANG Y., "On the straightening of compressible, nonlinearly elastic, annular cylindrical sectors", *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 3, p. 131-145, 1998.
- [BLA 62] BLATZ P.J. AND KO W.L., "Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials", *Transactions of the Society of Rheology*, vol. 6, p. 223-251, 1962.
- [CIA 85] CIARLET P.G., *Elasticité tridimensionnelle*, Masson, Collection RMA, 1985.
- [CRIS 81] CRISFIELD M.A., "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through", *Comput. Struct.*, 13, 55-62, 1981.

- [FEN 02] FENG Z.Q., CROS J.-M., “FER/SUBDomain: an integrated environment for finite element analysis using object-oriented approach”, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, to appear, 2002.
- [FOR 87] FORDE W.R.B. and STIEMER S.F., “Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis”, *Computer & Structures*, vol. 27, n° 5, p. 625-630, 1987.
- [HOR 95] HORGAN C.O. and POLIGNONE D.A., “A note on the pure torsion of a circular cylinder for a compressible nonlinearly elastic material with nonconvex strain-energy”, *Journal of Elasticity*, vol. 37, p. 167-178, 1995.
- [HOR 96] HORGAN C.O., “Remarks on ellipticity for the generalized Blatz-Ko constitutive model for a compressible nonlinearly elastic solid”, *Journal of Elasticity*, vol. 42, p. 165-176, 1996.
- [PEY 01] PEYRAUT F., LABED N., « Préservation de l’orientation et convergence de Newton-Raphson avec le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko », *Revue Européenne des Eléments Finis*, n° 5, vol. 10, 2001.
- [RAM 80] RAMM E., “Strategies for tracing the nonlinear response near limit points”, *In Europe-U.S. Workshop, nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, Ruhr-Universität Bochum, Germany (Edited by W. Wunderlich, E. Stein and K.J. Bathe), p. 63-89, 1980.
- [WIN 95] WINEMAN A.S. and WALDRON JR W.K., “Normal stress effects induced during circular shear of a compressible non-linear elastic cylinder”, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 30, n° 3, p. 323-339, 1995.