
Méthode d'analyse simplifiée appliquée aux structures tridimensionnelles

Leila Khalij — Said Hariri — Rachel Vaucher

*Ecole des Mines de Douai
Département MCM
941 rue Charles Bourseul BP 838
F-59508 Douai cedex
khalij@ensm-douai.fr*

RÉSUMÉ. Cet article présente une méthode d'analyse simplifiée des structures inélastiques. Cette approche a été proposée par J. Zarka et al. afin de prédire la nature de l'état limite et le comportement des structures sollicitées cycliquement. Elle permet une diminution du temps et de la complexité des calculs, comparée aux formulations incrémentales classiques. Suite à une décomposition de la réponse réelle (en une partie élastique et une partie plastique) et à un changement de variable, les champs de contraintes résiduelles et de déformations plastiques sont déterminés en tout point de la structure grâce à un calcul purement élastique. De plus, l'application de l'analyse simplifiée va nous permettre de nous affranchir de la sous-intégration des éléments.

ABSTRACT. This paper presents a simplified analysis method for the inelastic structures. This approach has been proposed by J. Zarka et al. in order to predict the nature of the limit state and the behaviour of structures under cyclic load. It decreases significantly the computational complexity and duration of the calculations in comparison to incremental formulations. By means of a decomposition of the real response (into an elastic and a plastic part) and of a change of variable, the plastic strains and the residual stresses can be determined in the whole structure thanks to a purely elastic calculation.

MOTS-CLÉS: analyse inélastique simplifiée, état limite, chargement cyclique radial, contraintes résiduelles, déformations plastiques, sous-intégration des éléments.

KEYWORDS: simplified analysis, limit state, cyclic radial loading, residual stresses, plastic strain, under-integration of elements.

1. Introduction

Les problèmes de technologie actuels nécessitent la connaissance du comportement des structures sous chargements mécaniques qui varient périodiquement et peuvent ainsi induire des déformations irréversibles. Ceci conduit à une analyse inélastique de structure s'effectuant habituellement par l'utilisation de méthodes de type incrémental. Dans le cas des chargements cycliques, ces méthodes entraînent des coûts et des temps de calcul très élevés. Dans cette étude, nous nous intéresserons à la Méthode d'Analyse Simplifiée des Structures Inélastiques proposée par le Professeur Zarka et son équipe [ZAR 90]. Elle repose, par un calcul purement élastique, sur la décomposition de la réponse réelle et sur un changement de variable adéquat qui permettent de déterminer l'état limite d'une structure ainsi que les déformations plastiques et les contraintes résiduelles en tout point.

La validité de cette méthode a été prouvée dans plusieurs domaines : à partir d'exemples simples [ING 84, VAS 96, TRI 83, GAT 93] ; d'application concrètes sous chargements sismiques ou dynamiques [ZAR 88] ; pour les études de contact par roulement, grenailage ou galetage [ZAR 90, FRE 91, LU 91, BRA 91] ou encore avec prise en compte des effets géométriques [JAR 87].

Au bout d'un grand nombre de cycles, trois états limites peuvent apparaître (figure 1) :

- a) adaptation. En tout point de la structure, la déformation plastique atteint un état limite stabilisé constant ;
- b) accommodation. En tout point de la structure, la déformation plastique atteint un état limite stabilisé périodique ;
- c) rochet. Il existe au moins un point de la structure où la déformation plastique s'accroît de manière incrémentale et ce, jusqu'à obtenir la ruine de la structure.

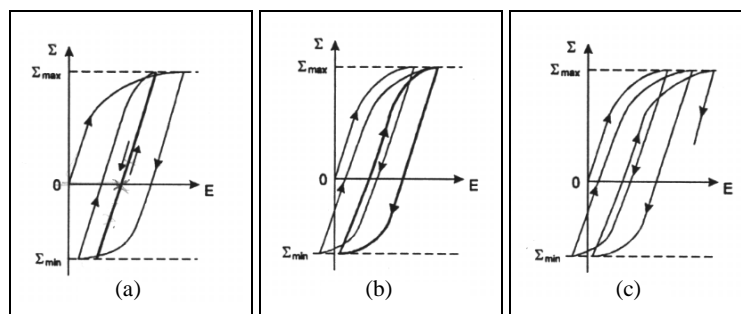


Figure 1. *Etats limites d'une structure*

Nous verrons la méthode d'analyse simplifiée puis l'intégration de cette méthode dans un code éléments finis. Enfin par un exemple, nous montrerons l'influence de la sous-intégration des éléments sur la méthode par le biais des répartitions des champs de contraintes résiduelles et de la déformation plastique.

2. La méthode d'analyse simplifiée

Les chargements retenus sont de type quasi statique sous l'hypothèse des petites perturbations. La structure est constituée d'un matériau dit Standard Généralisé (MSG) [HAL 75]. Ces matériaux sont supposés stables au sens de Drucker [DRU 64] et obéissent au Principe du Travail Plastique Maximal (PTPM) de Hill [HIL 50]. Ceci entraîne la normalité du vecteur accroissement des déformations plastiques et la convexité de la surface de charge f .

Le critère de von Mises permet de représenter cette surface de charge dans l'espace des déviateurs du tenseur des contraintes. De plus, le matériau possède une loi d'évolution à écrouissage cinématique linéaire (modèle de Prager [PRA 55]) afin d'exclure l'état limite de type Rochet. L'état adapté ou accommodé de la structure est obtenu lorsque le cycle asymptotique est respectivement élastique ou périodique.

2.1. Détermination des différentes réponses de la structure

Soit $\mathbf{U}^{el}(\mathbf{t})$, $\mathbf{E}^{el}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{\Sigma}^{el}(\mathbf{t})$ la réponse élastique fictive de la structure en fonction du temps \mathbf{t} (respectivement déplacement, déformation et contrainte). Nous avons :

$$\mathbf{E}^{el}(\mathbf{t}) = \mathbf{M}\mathbf{\Sigma}^{el}(\mathbf{t}) + \mathbf{E}^I(\mathbf{t}) \quad [1]$$

$\mathbf{E}^I(\mathbf{t})$ étant la déformation initiale et \mathbf{M} la matrice de rigidité ou de souplesse.

Soit $\mathbf{U}(\mathbf{t})$, $\mathbf{E}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{t})$ la réponse réelle de la structure qui peut être décomposée en une partie élastique (-el) et une partie inélastique (-ine, R) auto-équilibrée :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(\mathbf{t}) = \mathbf{U}^{el}(\mathbf{t}) + \mathbf{U}^{ine}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}^{el}(\mathbf{t}) + \mathbf{E}^{ine}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{\Sigma}(\mathbf{t}) = \mathbf{\Sigma}^{el}(\mathbf{t}) + \mathbf{R}(\mathbf{t}) \end{cases} \quad [2]$$

De plus, il est aussi possible de décomposer, de façon traditionnelle, $\mathbf{E}(\mathbf{t})$ en une partie élastique, plastique et initiale :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}^e(\mathbf{t}) + \mathbf{E}^P(\mathbf{t}) + \mathbf{E}^I(\mathbf{t}) \\ \mathbf{E}^e(\mathbf{t}) = \mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{t}) \end{cases} \quad [3]$$

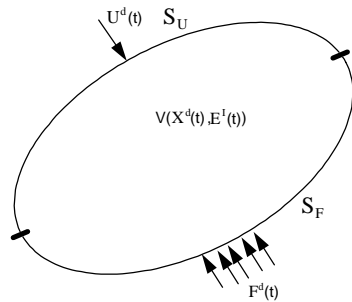
Les équations [2] et [3] donnent :

$$\mathbf{E}^{ine}(\mathbf{t}) = \mathbf{M}\mathbf{R}(\mathbf{t}) + \mathbf{E}^P(\mathbf{t}) \quad [4]$$

$\mathbf{R}(\mathbf{t})$ étant le champ des **contraintes résiduelles** et $\mathbf{E}^P(\mathbf{t})$ la **déformation plastique**.

Par l'intermédiaire d'un opérateur élastique de type éléments finis, noté **ELAS**, nous allons déterminer les champs de déplacements, de déformations et de contraintes selon la réponse considérée. **ELAS** est de la forme générale suivante (figure 2) et permet de déduire la réponse élastique de la structure :

$$\mathbf{ELAS}(\mathbf{V}, \mathbf{S}_U, \mathbf{S}_F, \mathbf{X}^d(\mathbf{t}), \mathbf{E}^I(\mathbf{t}), \mathbf{U}^d(\mathbf{t}), \mathbf{F}^d(\mathbf{t}), \mathbf{M}) \quad [5]$$



$\mathbf{X}^d(\mathbf{t})$: forces de volumes.
 $\mathbf{F}^d(\mathbf{t})$: forces de surfaces.
 $\mathbf{U}^d(\mathbf{t})$: déplacements imposés.

Figure 2. *Chargement de la structure*

En comparant les équations [1] et [4], on en déduit que le champ des contraintes inélastiques peut être obtenu en réalisant un calcul élastique homogène, avec comme déformation initiale $\mathbf{E}^P(\mathbf{t})$, autrement dit en utilisant l'opérateur **ELAS** avec les paramètres suivants :

$$\mathbf{ELAS}(\mathbf{V}, \mathbf{S}_U, \mathbf{S}_F, \mathbf{0}^d, \mathbf{E}^P(\mathbf{t}), \mathbf{0}^d, \mathbf{0}^d, \mathbf{M}^{-1}) \quad [6]$$

Cela signifie que le champ des contraintes résiduelles est une fonction linéaire de la déformation irréversible $\mathbf{E}^P(\mathbf{t})$ que l'on peut donc exprimer symboliquement sous la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{Z}_0 \mathbf{E}^P(\mathbf{t}) \quad [7]$$

\mathbf{Z}_0 est un opérateur linéaire symétrique et singulier. Par conséquent, à partir de $\mathbf{E}^P(\mathbf{t})$ on peut déterminer $\mathbf{R}(\mathbf{t})$, mais la réciproque n'est pas vraie. Nous allons donc découpler l'équation [7] par l'intermédiaire d'un changement de variable.

2.2. Nouvelle écriture

Pour le matériau à écrouissage cinématique linéaire, le modèle de Prager associé au critère de von Mises permet d'intégrer la notion de paramètre interne et peut se mettre sous la forme suivante dans l'espace des déviateurs de contraintes \mathbf{S} :

$$f(\mathbf{S}, \mathbf{E}^P) = \frac{3}{2} (\mathbf{S}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})) (\mathbf{S}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})) \leq \sigma_0^2 \quad [8]$$

avec f la fonction de charge, σ_0 la limite élastique et $\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{E}^P(\mathbf{t})$ le champ des paramètres internes, \mathbf{C} étant le module d'écrouissage.

Comme $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{t}) = \mathbf{S}^{el}(\mathbf{t}) + \mathbf{R}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \text{dev}[\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{t})]$, on a $\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \mathbf{S}^{el}(\mathbf{t}) + \text{dev}\mathbf{R}(\mathbf{t})$ et :

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{S}^{el}(\mathbf{t}) - [\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \text{dev}\mathbf{R}(\mathbf{t})]$$

On pose finalement :

$$\mathbf{Y}(\mathbf{t}) = \mathbf{y}(\mathbf{t}) - \text{dev}\mathbf{R}(\mathbf{t}) \quad [9]$$

où $\mathbf{Y}(\mathbf{t})$ est le paramètre transformé de la structure. Il met en évidence le couplage qui existe entre les contraintes résiduelles et les paramètres internes caractérisant l'écrouissage \mathbf{y} . On se place désormais dans l'espace des \mathbf{Y} .

Le critère de von Mises s'écrit donc :

$$\frac{3}{2} (\mathbf{S}^{el}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})) (\mathbf{S}^{el}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})) \leq \sigma_0^2 \quad [10]$$

L'introduction de ce paramètre nous fournit les renseignements suivants :

– à chaque instant, ces paramètres doivent vérifier le critère de plasticité c'est-à-dire être plastiquement admissibles. Ils sont à l'intérieur du convexe centré sur $\mathbf{S}^{el}(\mathbf{t})$;

– s'il y a écoulement, il se fait à la vitesse :

$$\dot{\mathbf{E}}^P(\mathbf{t}) = \lambda [\mathbf{S}^{el}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})] \quad [11]$$

où $\lambda = 0$ si $f(\mathbf{S}, \mathbf{E}^P) < 0$ et $\lambda \geq 0$ si $f(\mathbf{S}, \mathbf{E}^P) = 0$

Dans l'espace des \mathbf{Y} , les positions de $\mathbf{Y}(\mathbf{t})$ sont connues dès lors que la solution élastique $\mathbf{S}^{\text{el}}(\mathbf{t})$ est connue indépendamment de l'histoire de chargement. Ces positions sont déterminées localement en tout point de la structure. Ainsi on peut exprimer la déformation inélastique $\mathbf{E}^{\text{P}}(\mathbf{t})$ en fonction de $\mathbf{Y}(\mathbf{t})$ et de $\mathbf{R}(\mathbf{t})$, soit :

$$\mathbf{E}^{\text{P}}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{Y}(\mathbf{t}) + \text{dev}\mathbf{R}(\mathbf{t})] \quad [12]$$

L'équation [13] injectée dans l'équation [4], nous donne :

$$\mathbf{E}^{\text{ine}}(\mathbf{t}) = \mathbf{M}\mathbf{R}(\mathbf{t}) + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}(\mathbf{t}) + \mathbf{C}^{-1}\text{dev}\mathbf{R}(\mathbf{t}) \quad [13]$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}^{\text{ine}}(\mathbf{t}) = [\mathbf{M} + \mathbf{C}^{-1}\text{dev}]\mathbf{R}(\mathbf{t}) + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}(\mathbf{t}) \quad [14]$$

On pose $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \mathbf{C}^{-1}\text{dev}$ où $\hat{\mathbf{M}}$ est l'opérateur de souplesse modifié.

On détermine les champs inélastiques et donc $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ par l'intermédiaire de l'opérateur élastique adapté à l'état limite considéré, mis alors sous la forme :

$$\text{ELAS}(\mathbf{V}, \mathbf{S}_{\text{U}}, \mathbf{S}_{\text{F}}, \mathbf{0}^{\text{d}}, \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}(\mathbf{t}), \mathbf{0}^{\text{d}}, \mathbf{0}^{\text{d}}, \hat{\mathbf{M}}^{-1}) \quad [15]$$

avec comme déformation initiale $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}(\mathbf{t})$ et comme loi de comportement $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$.

On a finalement le champ des contraintes résiduelles tel que :

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{M}}^{-1}[\mathbf{E}^{\text{ine}}(\mathbf{t}) - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}(\mathbf{t})] \quad [16]$$

La loi de comportement modifiée $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ est fonction d'un module de Young modifié \hat{E} et d'un coefficient de Poisson $\hat{\nu}$ modifié :

$$\begin{cases} \hat{E} = \frac{3EC}{2E + 3C} \\ \hat{\nu} = \frac{3\nu C + E}{2E + 3C} \end{cases} \quad [17]$$

2.3. Nature de l'état limite de la structure

L'état limite peut être immédiatement déterminé à partir des analyses inélastiques de la structure c'est-à-dire en obtenant $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{el}}(\mathbf{t})$ pour un cycle $[0, T]$.

Le critère de von Mises est représenté par une sphère. Dans l'espace des \mathbf{Y} , cette sphère est centrée en $\mathbf{S}^{\text{el}}(\mathbf{t})$ et est de rayon $\boldsymbol{\sigma}_0$.

Pour des chargements cycliques et en chaque point \mathbf{P} de la structure, le champ des contraintes élastiques varie périodiquement sous la forme :

$$\Sigma^{\text{el}}(\mathbf{P}, t) = (1 - \Lambda(t))\Sigma_{\text{min}}^{\text{el}}(\mathbf{P}) + \Lambda(t)\Sigma_{\text{max}}^{\text{el}}(\mathbf{P}) \quad [18]$$

Le facteur $\Lambda(t)$ variant entre 0 et 1 puis entre 1 et 0.

Une construction élémentaire et locale est requise. Soit \mathbf{C}_L l'intersection entre le convexe $\mathbf{C}(\mathbf{S}_{\text{max}}^{\text{el}})$ centré en $\mathbf{S}_{\text{max}}^{\text{el}}$ et le convexe $\mathbf{C}(\mathbf{S}_{\text{min}}^{\text{el}})$ centré en $\mathbf{S}_{\text{min}}^{\text{el}}$. Ces deux convexes sont obtenus respectivement pour l'amplitude de chargement maximum et pour l'amplitude de chargement minimum. Posons donc :

$$\mathbf{C}_L = \mathbf{C}(\mathbf{S}_{\text{max}}^{\text{el}}) \cap \mathbf{C}(\mathbf{S}_{\text{min}}^{\text{el}}) \quad [19]$$

D'après Halphen [HAL 78], sur une période, l'état limite d'une structure peut être adapté si \mathbf{C}_L est non vide ($\mathbf{C}_L \neq \emptyset$) en tout point de la structure ou accommodé si \mathbf{C}_L est vide ($\mathbf{C}_L = \emptyset$) en au moins un point de la structure.

\mathbf{Y} doit être plastiquement admissible à chaque instant et donc appartenir aux deux convexes afin d'obtenir la solution finale de \mathbf{Y} notée \mathbf{Y}_L . En fonction de la position d'un \mathbf{Y}_0 (paramètre transformé structural initial), nous allons être amené à faire des projections orthogonales pour évaluer la solution \mathbf{Y}_L .

Nous supposons un état initial vierge de la structure c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{E}^I(0) = \mathbf{E}^P(0) = \mathbf{R}(0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad [20]$$

Ainsi, les cas possibles de projections peuvent être représentés suivant la figure 3.

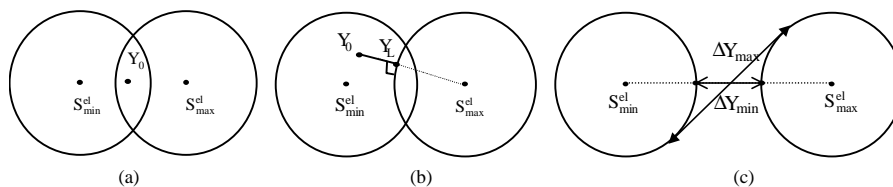


Figure 3. Règles de projection

2.3.1. *Cas adapté (figures 3.a et 3.b)*

– (a) $\mathbf{Y}_0 \in \mathbf{C}_L$. Il n'y a pas plastification et donc $\mathbf{E}^P = \mathbf{0}$. On a :

$$\text{ELAS}(\mathbf{V}, \mathbf{S}_U, \mathbf{S}_F, \mathbf{0}^d, \mathbf{E}^P, \mathbf{0}^d, \mathbf{0}^d, \mathbf{M}^{-1}) \quad [21]$$

– (b) $\mathbf{Y}_L = \text{proj}_{\mathbf{C}_L} \mathbf{Y}_0$ ¹. Il y a plastification :

$$\text{ELAS}(\mathbf{V}, \mathbf{S}_U, \mathbf{S}_F, \mathbf{0}^d, \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_L, \mathbf{0}^d, \mathbf{0}^d, \hat{\mathbf{M}}^{-1}) \quad [22]$$

Ces deux opérateurs permettent de déterminer les champs inélastiques adaptés.

2.3.2. *Cas accommodé (figure 3.c)*

– (c) On recherche une borne inférieure et une borne supérieure de $\Delta \mathbf{Y}$ qui permettront d'obtenir un encadrement de la quantité $\Delta \mathbf{E}^P$.

Borne inférieure : comme à chaque sommet la solution doit se trouver dans $\mathbf{C}(\mathbf{S}_{\min}^{\text{el}})$ puis dans $\mathbf{C}(\mathbf{S}_{\max}^{\text{el}})$, une borne inférieure immédiate est obtenue pour l'amplitude $\Delta \mathbf{Y}$ [ZAR 90].

$$\Delta \mathbf{Y}_{\min} = \left[\mathbf{1} - \frac{2\sigma_0}{\|\Delta \mathbf{S}^{\text{el}}\|} \right] \Delta \mathbf{S}^{\text{el}} \quad [23]$$

σ_0 est le rayon de la sphère, $\Delta \mathbf{S}^{\text{el}} = \mathbf{S}_{\max}^{\text{el}} - \mathbf{S}_{\min}^{\text{el}}$ et $\|\Delta \mathbf{S}^{\text{el}}\| \equiv \sqrt{3/2 (\Delta \mathbf{S}^{\text{el}})^T (\Delta \mathbf{S}^{\text{el}})}$.

On obtient finalement $\Delta \mathbf{U}_{\min}^{\text{ine}}$, $\Delta \mathbf{E}_{\min}^{\text{ine}}$ et $\Delta \mathbf{R}_{\min}$ par l'intermédiaire de l'opérateur :

$$\text{ELAS}(\mathbf{V}, \mathbf{S}_U, \mathbf{S}_F, \mathbf{0}^d, \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{Y}_{\min}, \mathbf{0}^d, \mathbf{0}^d, \hat{\mathbf{M}}^{-1}) \quad [24]$$

Borne supérieure : quand l'amplitude de charge est très grande, il est possible de démontrer qu'un état stationnaire est atteint dans lequel la vitesse d'évolution de \mathbf{Y}_{ij} est la même que celle de $\mathbf{S}_{ij}^{\text{el}}$. L'équation [18] devient :

$$\mathbf{S}^{\text{el}} = (\mathbf{1} - \Lambda) \mathbf{S}_{\min}^{\text{el}} + \Lambda \mathbf{S}_{\max}^{\text{el}} \quad [25]$$

Nous pouvons écrire :

1. \mathbf{Y}_L est la projection orthogonale de \mathbf{Y}_0 sur \mathbf{C}_L

$$\dot{S}^{el} = \frac{dS^{el}}{d\Lambda} = -S_{min}^{el} + S_{max}^{el} = \Delta S^{el} \quad [26]$$

$$\Rightarrow \dot{Y} = \dot{S}^{el} = \Delta S^{el} \quad [27]$$

et

$$\dot{E}^P = \Lambda(S^{el} - Y) = C^{-1}\dot{Y} \quad [28]$$

or

$$\sqrt{\frac{3}{2}(S^{el} - Y)^T(S^{el} - Y)} = \sigma_0 \quad [29]$$

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{\|C^{-1}\dot{Y}\|}{\sigma_0} \quad [30]$$

Les positions ultimes, comme l'illustre la figure 4, s'écriront :

$$Y_{min}^{ult} = S_{min}^{el} + \frac{1}{\Lambda} C^{-1}\dot{Y} \quad [31]$$

$$Y_{max}^{ult} = S_{max}^{el} - \frac{1}{\Lambda} C^{-1}\dot{Y} \quad [32]$$

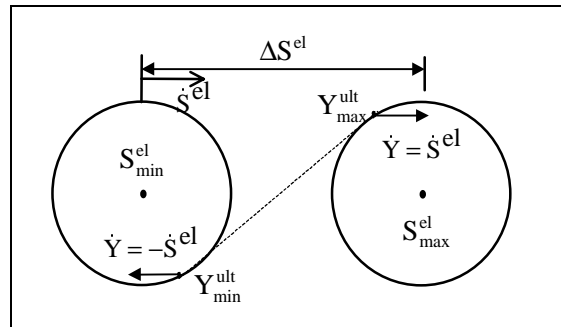


Figure 4. Bornes supérieures de l'accommodation

D'où finalement :

$$\Delta Y_{max} = Y_{max}^{ult} - Y_{min}^{ult} \quad [33]$$

On obtient : $\Delta \mathbf{U}_{\max}^{\text{ine}}$, $\Delta \mathbf{E}_{\max}^{\text{ine}}$ et $\Delta \mathbf{R}_{\max}$ par l'opérateur :

$$\mathbf{ELAS}(\mathbf{V}, \mathbf{S}_U, \mathbf{S}_F, \mathbf{0}^d, \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{Y}_{\max}, \mathbf{0}^d, \mathbf{0}^d, \hat{\mathbf{M}}^{-1}) \quad [34]$$

2.3.3. Partition mixte

Considérons deux types de la partition du volume \mathbf{V} qui suit (figure 5) :

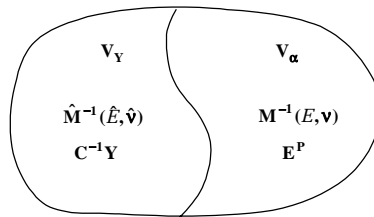


Figure 5. *Partition mixte*

- sur \mathbf{V}_α , il n'y a pas d'évolution plastique du mécanisme (Cf. équation [21]).
- sur \mathbf{V}_Y , \mathbf{Y} est connu et c'est la déformation plastique \mathbf{E}^P qui est recherchée (Cf. équations [22], [24] et [34]).

3. Intégration de la méthode d'analyse simplifiée dans un code Eléments Finis

Soit $\tilde{\mathbf{U}}$ une approximation de \mathbf{U} champ de déplacement en chaque point de l'élément elt :

$$\mathbf{U} \approx \tilde{\mathbf{U}} = \sum \langle \mathbf{N} \rangle_i \tilde{\mathbf{U}}_i^{\text{elt}} = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{\text{elt}} \quad [35]$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{\text{elt}}$ représente l'ensemble des déplacements nodaux pour un élément particulier elt. $\langle \mathbf{N} \rangle$ représente la matrice des fonctions d'interpolation sur l'élément ou matrice des fonctions de forme.

Les déformations sont obtenues par l'équation approchée suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{\text{elt}} \quad [36]$$

avec \mathbf{E} vecteur représentatif des déformations et \mathbf{B} matrice de dérivée des fonctions de forme. La matrice élémentaire de rigidité est la suivante :

$$\mathbf{K}^{\text{elt}} = \int_{V_\alpha} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} dV + \int_{V_Y} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{B} dV \quad [37]$$

Soit \mathbf{F}^{elt} le vecteur des forces nodales élémentaires tel que :

$$\mathbf{F}^{\text{elt}} = \int_{V_Y} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{E}^I dV + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X}^d dV + \int_{S_F} \mathbf{N}^T \mathbf{F}^d dS_F \quad [38]$$

Dans le cadre de l'analyse simplifiée, on cherche un champ de contraintes statiquement admissible avec des chargements nuls et un champ de déformations cinématiquement admissible avec des conditions aux limites nulles. La relation [38] devient :

$$\mathbf{F}^{\text{elt}} = \int_{V_Y} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{E}^I dV \quad [39]$$

L'arbre de programmation correspondant à l'implémentation de l'analyse simplifiée est représenté sur la figure 6.

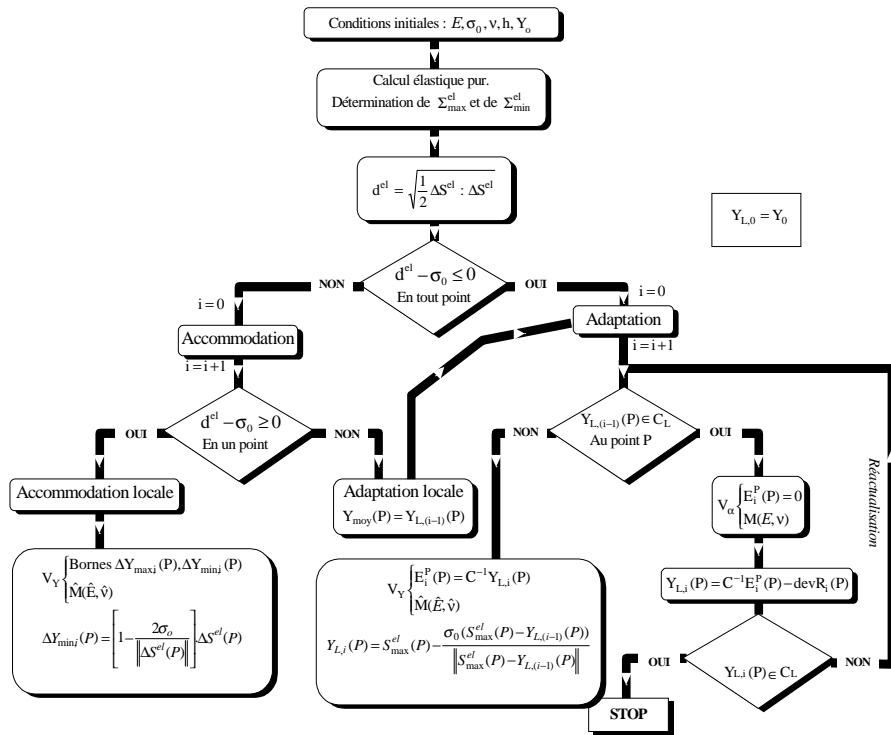


Figure 6. Arbre de programmation

4. Application

Cette méthode a été intégrée dans le code éléments finis SYSTUS afin de l'appliquer aux structures 3D. Nous l'avons donc testée sur un crochet de levage en acier soumis à une pression répartie de flexion (figure 7). Les caractéristiques mécaniques sont représentées dans le tableau 1.

Module de Young E	Coefficient de Poisson ν	Limite élastique σ_0	Module d'écroutissage C
210 000 MPa	0,28	300 MPa	$0,1 \times E$

Tableau 1. Caractéristiques mécaniques du crochet

Ce crochet est discrétisé 298 éléments et 1 744 nœuds (soit 5 232 degrés de liberté). Il est modélisé en éléments hexaédriques quadratiques (à 20 nœuds). Ces éléments sont sous-intégrés (8 points d'intégration) pour la résolution élastoplastique classique (sous SYSTUS, la sous-intégration des éléments est nécessaire).

Pour l'analyse simplifiée, des tests ont été effectués pour ces mêmes éléments en considérant le cas avec sous-intégration (8 points d'intégration) et le cas sans sous-intégration (27 points de Gauss).

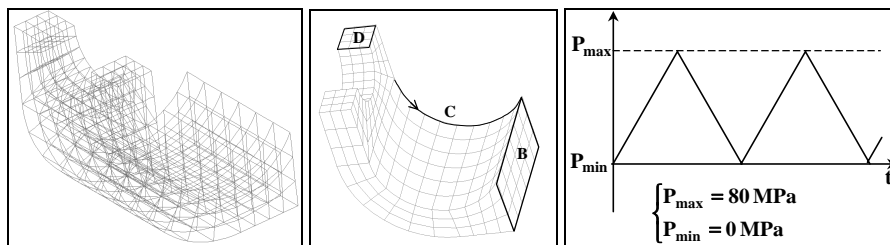


Figure 7. Modélisation du crochet de levage et chargement

La face B est bloquée dans les trois directions et une pression cyclique est appliquée sur la surface D. Nous choisissons de fixer la valeur de la pression minimum et d'appliquer un chargement maximum afin que la structure reste adaptée.

Les résultats obtenus par l'analyse simplifiée sont comparés à ceux de la résolution élastoplastique (appliquée sur la même structure, pour le même chargement et par le même code de calcul).

Les figures 8 et 9 représentent les répartitions des champs inélastiques (contraintes résiduelles selon von Mises et déformation plastique) obtenues par les deux méthodes.

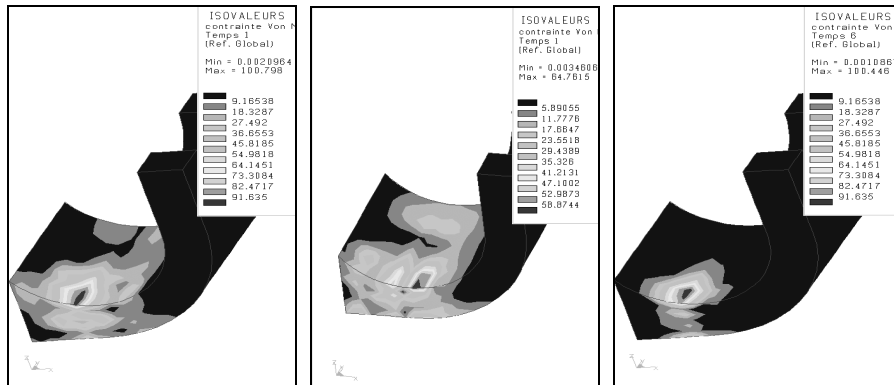


Figure 8. Répartition du champ de contraintes résiduelles (VMIS), (a) Analyse simplifiée (sans sous-intégration), (b) Analyse simplifiée (avec sous-intégration), (c) Méthode incrémentale (avec sous-intégration)

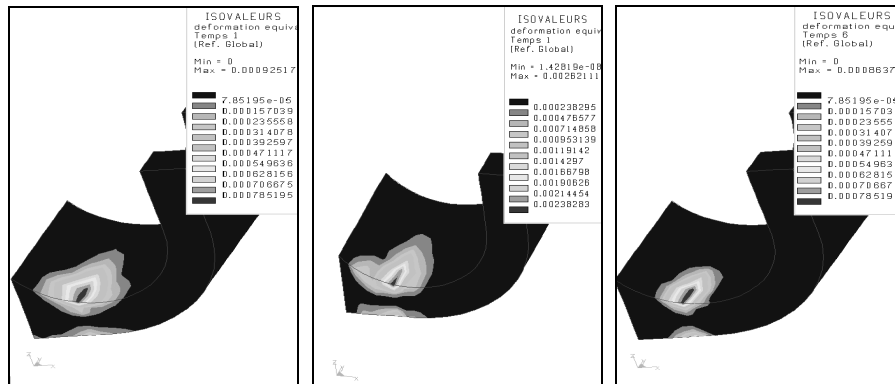


Figure 9. Répartition du champ de déformation plastique, (a) Analyse simplifiée (sans sous-intégration), (b) Analyse simplifiée (avec sous-intégration), (c) Méthode incrémentale (avec sous-intégration)

Afin de mieux illustrer les résultats, nous avons comparé la variation des contraintes résiduelles et de la déformation plastique le long de la courbe C (figures 10 et 11).

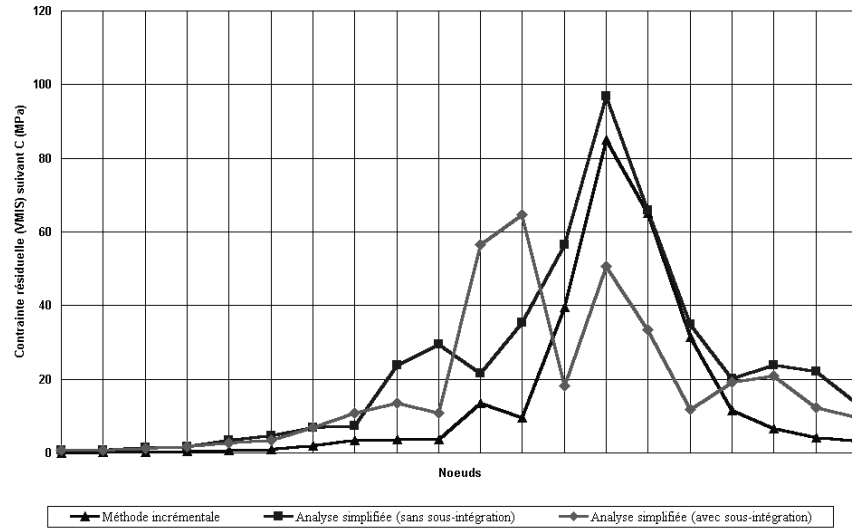


Figure 10. Evolution de la contrainte résiduelle suivant la courbe C

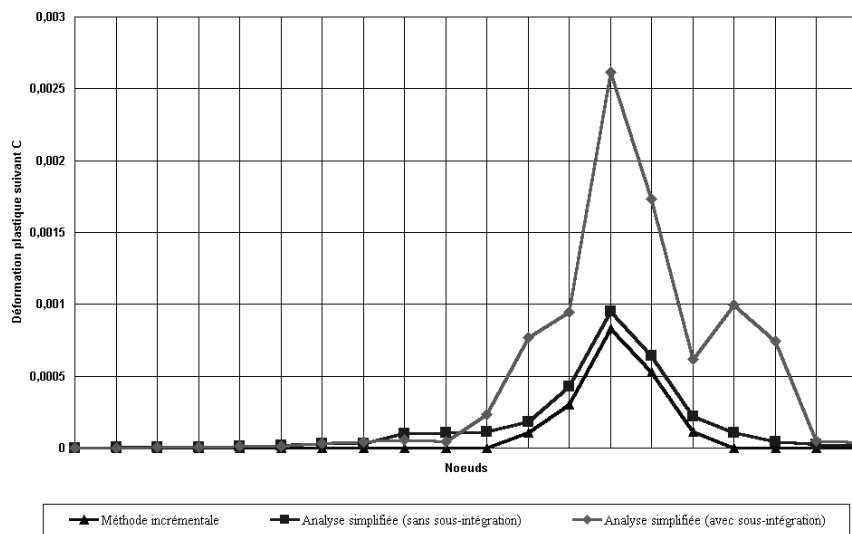


Figure 11. Evolution de la déformation plastique suivant C

5. Conclusion

Nous avons choisi de nous intéresser à l'intégration de la méthode d'analyse simplifiée dans le code éléments finis SYSTUS. Pour valider nos résultats nous avons adopté une approche élastoplastique classique. Nous nous sommes particulièrement intéressé à la sous intégration des éléments des deux méthodes.

L'analyse simplifiée associée aux éléments avec sous-intégration ne nous donne pas de résultats concluants si nous les comparons à ceux de la méthode incrémentale.

L'analyse simplifiée associée aux éléments sans sous-intégration permet une estimation correcte des champs de déformations plastiques et de contraintes résiduelles (au bout de trois itérations). Ceci est réalisé à coûts et à temps de calculs négligeables : 752,79 secondes temps CPU contre 4 799,53 secondes pour la résolution élastoplastique. Le calcul simplifié nécessite donc un temps proche de $1/6^e$ du temps de calcul pas à pas effectué sachant que l'erreur relative est très faible (environ 0,3 % pour les contraintes résiduelles et 7 % pour la déformation plastique).

Ainsi, les résultats pour la charge constante montrent un très bon accord entre le calcul simplifié et le calcul élastoplastique sachant que le nombre de points de Gauss n'a pas été réduit pour le calcul simplifié.

L'intégration trop faible des éléments conduit à des problèmes d'instabilité numérique [GMÛ 00]. Dans le cas de l'analyse simplifiée, la convergence vers une solution cohérente avec la résolution élastoplastique dépend de cette sous-intégration.

6. Bibliographie

- [BRA 91] BRAHAM S., Modélisation du galetage des vilebrequins. Evolution des contraintes résiduelles sous chargement de service, Thèse de doctorat, école polytechnique, 1991.
- [DRU 64] DRUCKER D.C., « On the postulate of stability of material in the mechanics of continua », *J. de Mécanique*, 3, pp. 235-249, 1964.
- [FRE 91] FRELAT J., Modélisation des traitements numériques de surfaces, CETIM, 1991.
- [GAT 93] GATT J.M., Etude théorique et expérimentale de la déformation progressive, Thèse de doctorat, 1993.
- [GMÛ 00] GMÜR T., Méthode des éléments finis en mécanique des structures, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2000.
- [HAL 75] HALPHEN B., NGUYEN Q.S., « Sur les matériaux standards généralisés », *J. de Mécanique*, 14 n° 1, pp. 39-63, 1975.

- [HAL 78] HALPHEN B., Problèmes quasi-statiques en viscoplasticité, Thèse de doctorat, Paris, 1978.
- [HIL 50] HILL R., *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford, chap. XII, 1950.
- [ING 84] INGLEBERT G., Analyse simplifiée des structures élasto-visco-plastiques sous chargement cycliques, Thèse de doctorat, Université Paris VI 1984.
- [JAR 97] JARADEH Y. Analyse simplifiée de l'instabilité des structures élastoplastiques sous chargements cycliques, Thèse de doctorat, ENPC, 1997.
- [PRA 55] PRAGER W., The theory of plasticity : a survey of recent achievements, Proc. Inst. Mech. Engrs, London, 169, pp. 41-57, 1955.
- [TRI 83] TRIBOUT J., INGLEBERT G., CASIER J., « A simplified method for the inelastic analysis of structures under cyclic loadings », Vol 105, août, *Transactions of the ASME*, 1983.
- [VAS 96] VASSEUR E., NAVIDI P., HARIRI S., « Direct determination of limiting cycle during cyclic loading », *Computational materials Sc.* 7, pp. 11-15, 1996.
- [ZAR 88] ZARKA J., PECKER A., Participation à la mise au point d'une méthode d'analyse simplifiée, LMS école polytechnique, Rapport final, 1988.
- [ZAR 90] ZARKA J., FRELAT J., INGLEBERT G., KASMAI-NAVIDI P., A new approach in inelastic analysis of structures, *CADLM*, Gif-sur-Yvette, 1990.