
Formulation du modèle MiSP coque tridimensionnel dégénéré

Rezak Ayad* — **Jean-Louis Batoz**** — **Gouri Dhatt*****

* Université de Reims Champagne-Ardenne
Groupe de Mécanique Matériaux et Structures (GMMS)
EA 2617, ESIEC, Esp Roland Garros
BP 1029, F-51686 Reims
rezak.ayad@univ-reims.fr

** InSIC, 27 rue d'Hellieule
F-88100 Saint-Dié des Vosges
batoz@insic.fr

*** Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne
UPRES A 6066, Centre de Recherche de Royallieu
BP 20529, F-60205 Compiègne cedex
Gouri.dhatt@utc.fr

RÉSUMÉ. Ce travail traite d'une approche variationnelle mixte pour l'analyse linéaire des coques. Le modèle MiSP (Mixed Shear Projection) est basé sur le principe de Hellinger-Reissner, avec une représentation particulière des déformations de cisaillement transversal. Pour améliorer le comportement membranaire des coques, une représentation 3D du concept « Fiber Rotation » est faite. Elle sera adaptée à la formulation du modèle MiSP dégénéré. Deux éléments de coque à 4 nœuds sont développés : MiSP4-Q4 et MiSP4-FRQ. Des tests de validation standards sont présentés. Ils montrent une bonne convergence des deux éléments finis.

ABSTRACT. This work deals with a mixed variational approach for the linear analysis of shells. MiSP model (Mixed Shear Projection) is based on the Hellinger-Reissner principle with a particular representation of the transverse shear strains. To improve the membrane behaviour of shells, a 3D representation of the "Fiber Rotation" concept is made and adapted to the formulation of the degenerated MiSP model. Two 4-node shell finite elements are developed: MiSP4-Q4 and MiSP4-FRQ. Several tests usually used to validate shell elements are presented. These show a quite good behaviour of these two elements.

MOTS-CLÉS : élément fini, coque, formulation mixte, Reissner-Mindlin, rotation de fibre plane.

KEYWORDS: finite element, shell, mixed formulation, Reissner-Mindlin, in-plane fiber rotation.

1. Introduction

Les éléments finis utilisés pour la discrétisation géométrique des coques sont parmi les plus difficiles à concevoir. Deux approches sont aujourd'hui largement utilisées : la première est celle qui consiste à approcher la coque par un ensemble de surfaces (ou facettes) planes de préférence triangulaires pour tenir compte des surfaces gauches si elles existent, c'est l'approche dite « facettes planes », les normales aux nœuds sont en général discontinues. Les éléments finis correspondants sont obtenus par combinaison des éléments de membrane et de plaque en flexion avec ou sans effet de cisaillement transversal (CT). Le couplage membrane flexion est mis en évidence après transformation des variables nodales locales dans le repère global. Les travaux ou articles traitant de cette approche sont très nombreux. On pourra consulter les ouvrages [COO 89, ZIE 91, BAT 92] pour plus de détails. Les éléments de coque à facettes planes sont simples à formuler et sont capables de représenter les mouvements de corps rigides. Ces éléments ont quelques inconvénients [YAN 90], à savoir une limitation à leur forme triangulaire si la coque discrétisée présente un gauchissement, et une lenteur de la convergence dans le cas des problèmes sensibles aux défauts de géométrie, tels que le flambement [LAR 90]. L'approche par facettes planes a été introduite pour la première fois en 1961 par Green *et al.* [GRE 61]. Une liste d'éléments plats assez connus est présentée par Yang *et al.* [YAN 90]. Des éléments mixtes et hybrides sont également formulés à l'aide de cette approche ([MAU 73, YOS 74]). Batoz *et al.* [BAT 80, BAT 82, POL 92, CHA 87,...] ont utilisé cette approche en combinant les éléments de plaque de Kirchhoff discret DKT et DKQ aux éléments de membrane classiques CST (Constant Strain Triangle) et Q4 bilinéaire standard. Ils ont obtenu de bons résultats pour des problèmes non linéaires statiques et dynamiques.

La deuxième approche géométrique est celle initiée au début des années 70 par Ahmad, Irons et Zienkiewicz [AHM 70]. Il s'agit de l'approche isoparamétrique courbe. Elle trouve son application dans des domaines variés de calcul des structures : coques composites multicouches [VLA 87, VLA 90, RAM 91, WIL 90], etc., analyse des non-linéarités géométriques et matérielles [BAT 86, BAT 83, COF 91, DVO 91, DVO 84, FEZ 81, HUG 81, PAR 91, RAM 86, BOI 91, SIM 89, SIM 90]... Cette approche, appelée également approche du solide 3D-dégénéré, permet de discrétiser directement les équations tridimensionnelles de la mécanique des solides. L'introduction d'hypothèses cinématiques et mécaniques conduit à une formulation dégénérée avec une représentation isoparamétrique de la géométrie \bar{x}_p et des déplacements \bar{u}_p d'un point de la surface moyenne. Le vecteur \bar{u}_p est défini par ses composantes cartésiennes (U, V, W) . Les composantes de rotation sont au nombre de deux ou trois suivant que les normales aux nœuds sont continues ou discontinues d'un élément à un autre. L'introduction de l'hypothèse des sections droites (Hencky-Mindlin-Reissner) permet de retenir une mesure des déformations de CT. Une revue historique conduisant à la formulation d'éléments basés sur ce type d'approche est faite par Irons [IRO 76]. Les travaux de Stanley [STA 85] et les

ouvrages de Bathe [BAT 82], Crisfield [CRI 86], Hughes [HUG 87], Cook *et al.* [COO 89], Zienkiewicz et Taylor [ZIE 91] et Batoz et Dhett [BAT 92] offrent des possibilités assez variées sur la manière de présenter le formalisme variationnel relatif à cette approche. Ces possibilités incluent notamment les différentes formes du principe des travaux virtuels avec intégration numérique ou explicite suivant l'épaisseur des matrices élémentaires. Dans ce travail, nous retenons cette approche pour le développement de deux éléments de coque mixtes à 4 nœuds de forme quadrilatérale quelconque à épaisseur constante et avec discontinuité des normales aux nœuds.

2. Formulation théorique du modèle MiSP coque dégénéré à 4 nœuds

Nous commençons par définir les quantités géométriques, cinématiques et mécaniques nécessaires à la construction du modèle mixte projeté en cisaillement MiSP coque. Celui-ci est obtenu à partir de l'élément mixte de flexion/CT MiSP4 développé par Ayad *et al.* [AYA 98]. Celui-ci est robuste et simple à formuler. La partie membrane est représentée dans un premier temps par l'élément quadrilatéral standard à 4 nœuds et 3 ddl par nœud (U,V,W). On notera cet élément MiSP4-Q4. La prise en compte des rotations autour de la normale à la surface moyenne pour formuler le modèle FRQ (Fiber Rotation Quadrilateral) sera traitée par la suite (section 2.7). L'élément de coque correspondant portera le nom de MiSP4-FRQ.

2.1. Géométrie de l'élément MiSP4-Q4

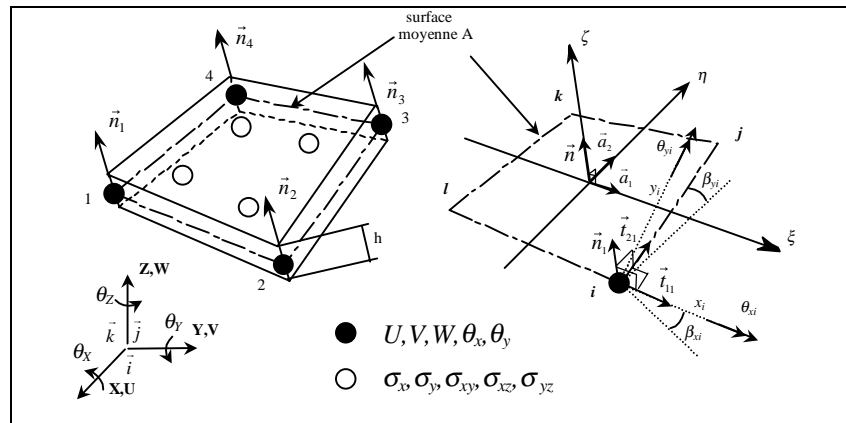


Figure 1. Elément de coque courbe MiSP4-Q4

La géométrie de l'élément MiSP4-Q4 est représentée par la surface moyenne A et l'épaisseur h considérée constante. Le vecteur position d'un point quelconque s'écrit en fonction des coordonnées isoparamétriques (figure 1):

$$\bar{x}_q(\xi, \eta, \zeta) = \bar{x}_p(\xi, \eta) + z\bar{n}(\xi, \eta) \quad ; \quad z = \zeta \frac{h}{2} \quad [1]$$

\bar{x}_p est le vecteur position du point p de la surface moyenne, défini par :

$$\bar{x}_p(\xi, \eta) = \sum_{i=1,4} N_i(\xi, \eta) \bar{x}_{pi} \quad ; \quad \langle x_{pi} \rangle = \langle X_i \quad Y_i \quad Z_i \rangle \quad [2]$$

X_i, Y_i, Z_i sont les coordonnées cartésiennes du nœud i dans le repère global $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $N_i(\xi, \eta)$ sont les fonctions d'interpolation bilinéaires standards définies pour un élément à 4 nœuds. La base covariante au point p est donnée par :

$$[F_0] = [\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \bar{n}] \quad (\text{en } \zeta = 0) \quad [3]$$

Les vecteurs de base \bar{a}_1 et \bar{a}_2 (figure 1) sont généralement non orthogonaux. Ils sont définis par :

$$\bar{a}_1 = \bar{x}_{p,\xi} = \sum_{i=1,4} N_{i,\xi} \bar{x}_{pi} \quad \text{et} \quad \bar{a}_2 = \bar{x}_{p,\eta} = \sum_{i=1,4} N_{i,\eta} \bar{x}_{pi} \quad [4]$$

$$\langle a_1 \rangle = \langle a_{1X} \quad a_{1Y} \quad a_{1Z} \rangle \quad ; \quad \langle a_2 \rangle = \langle a_{2X} \quad a_{2Y} \quad a_{2Z} \rangle$$

La normale \bar{n} au point p s'écrit :

$$\bar{n} = \frac{\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2}{|\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2|} \quad ; \quad \bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 = \begin{Bmatrix} a_{1Y}a_{2Z} - a_{1Z}a_{2Y} \\ a_{1Z}a_{2X} - a_{1X}a_{2Z} \\ a_{1X}a_{2Y} - a_{1Y}a_{2X} \end{Bmatrix} \quad [5]$$

Un repère tangent orthonormé, sur lequel seront définies les composantes cartésiennes locales $\vec{\sigma}_i$ et $\vec{\varepsilon}_i$ des tenseurs de contraintes et de déformations, est nécessaire. L'épaisseur h étant constante, le repère tangent $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \bar{n})$ est tel que la normale \bar{n} soit orthogonale à la surface moyenne ($\zeta = 0$). Le vecteur tangent \vec{t}_1 est considéré comme étant porté par le vecteur de base \bar{a}_1 et normalisé par rapport à son module $|\bar{a}_1|$:

$$\vec{t}_1 = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|}$$

Le vecteur normal étant donné par la relation [5], le vecteur tangent \vec{t}_2 sera défini par le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{t}_1$. On définit ainsi un repère tangent orthonormé unique au point p, représenté par la matrice [Q] suivante :

$$[Q] = [\vec{t}_1 \quad \vec{t}_2 \quad \vec{n}] = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{2X} & n_X \\ t_{1Y} & t_{2Y} & n_Y \\ t_{1Z} & t_{2Z} & n_Z \end{bmatrix} \quad [6]$$

En conséquence, nous pouvons définir une base orthonormée $[Q_i] = [\vec{t}_{1i} \quad \vec{t}_{2i} \quad \vec{n}_i]$ en chaque nœud en utilisant la relation [6].

2.2. Cinématique de l'élément MiSP4-Q4

2.2.1. Champ de déplacements d'un point quelconque de la coque

Le champ de déplacements d'un point quelconque q de la coque s'écrit avec l'hypothèse de sections droites de Hencky/Mindlin/Reissner :

$$\vec{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = \vec{u}_p(\xi, \eta) + z\vec{\beta}(\xi, \eta) ; \quad \vec{\beta} = \beta_x \vec{t}_1 + \beta_y \vec{t}_2 ; \quad \vec{\beta} \cdot \vec{n} = 0 \quad [7]$$

$\vec{u}_p(\xi, \eta)$ est le vecteur déplacement du point p (z ou $\zeta=0$), $\vec{\beta}(\xi, \eta)$ le vecteur rotation orthogonal à la normale \vec{n} . $\vec{\beta}$ s'écrit également :

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} \wedge \vec{n} = \theta_y \vec{t}_1 - \theta_x \vec{t}_2 ; \quad \vec{\theta} = \theta_x \vec{t}_1 + \theta_y \vec{t}_2 \quad \text{car } \vec{u}_q = \vec{u}_p + \vec{\theta} \wedge \vec{p}q$$

Ainsi, au nœud i (figure 1), $\beta_{xi} = \theta_{yi}$ et $\beta_{yi} = -\theta_{xi}$; θ_x et θ_y sont les rotations de la normale \vec{n} autour des axes x et y respectivement. Le vecteur \vec{u}_q est donné par :

$$\vec{u}_q = \sum_{i=1,4} N_i \vec{u}_{pi} + z \sum_{i=1,4} N_i (-\theta_{xi} \vec{t}_{2i} + \theta_{yi} \vec{t}_{1i})$$

$$\{\vec{u}_q\} = \sum_{i=1,4} N_i \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} + z \sum_{i=1,4} N_i \left(-\theta_{xi} \begin{Bmatrix} t_{2X_i} \\ t_{2Y_i} \\ t_{2Z_i} \end{Bmatrix} + \theta_{yi} \begin{Bmatrix} t_{1X_i} \\ t_{1Y_i} \\ t_{1Z_i} \end{Bmatrix} \right) \quad [8]$$

Les variables nodales sont définies par :

$$\langle u_n \rangle = \langle U_i \quad V_i \quad W_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \dots \quad i=1 \text{ à } 4 \rangle \quad [9]$$

où U_i, V_i, W_i sont les composantes cartésiennes du vecteur \vec{u}_{pi} dans le repère global, θ_{xi}, θ_{yi} les composantes du vecteur rotation de la normale \vec{n}_i autour des vecteurs \vec{t}_{1i} et \vec{t}_{2i} respectivement. Le passage du repère tangent local $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$ à chaque nœud au repère global $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ permet d'obtenir 6 ddl par nœud : les déplacements globaux U_i, V_i, W_i et les rotations globales $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ autour des axes X, Y, Z (figure 2). le passage aux rotations globales est obtenu en utilisant la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \vec{t}_{1i} \rangle \\ \langle \vec{t}_{2i} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix} ; \langle \vec{t}_{1i} \rangle \text{ et } \langle \vec{t}_{2i} \rangle \text{ est la représentation en ligne des}$$

vecteurs tangents \vec{t}_1 et \vec{t}_2 au nœud i .

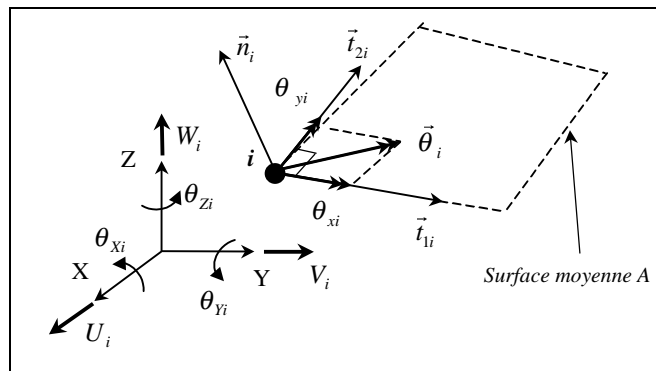


Figure 2. Composantes locales et globales de la rotation $\vec{\theta}$ au nœud i

2.2.2. Champ de déformations

Nous avons retenu une approximation linéaire en z pour les déformations $\{\epsilon_s\}$ incluant la membrane et la flexion et constante en z pour les déformations de cisaillement transversal $\{\gamma_s\}$. Une description plus complète de celles-ci, sous forme de fractions rationnelles quadratiques en z , est donnée par [BAT 92]. Nous avons pu montrer, par exemple, pour le modèle déplacement simplifié Q4 γ -Q4 [AYAD 93] ou Q4 γ -24 [BAT 92], que l'on peut aboutir à des expressions beaucoup plus simples ($\{\epsilon_s\}$ linéaire en z et $\{\gamma_s\}$ constante en z) sans toutefois affecter la forme des résultats obtenus par l'élément MITC4 [DVO 84] en utilisant une description quadratique complète. Ainsi, pour MiSP4-Q4, nous écrivons :

$$\{\varepsilon_s\} = \{\varepsilon_0\} + z\{\varepsilon_1\} \text{ et } \{\gamma_s\} = \{\gamma\} \quad [10]$$

Les déformations de membrane $\langle \varepsilon_0 \rangle = \langle e_x \ e_y \ \gamma_{xy} \rangle$, de flexion $\langle \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_{x1} \ \varepsilon_{y1} \ \gamma_{xy1} \rangle$ et de cisaillement transversal $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{xz} \ \gamma_{yz} \rangle$ sont définies respectivement par les expressions suivantes :

$$\{\varepsilon_0\} = [B_0]\{u_n\} ; \{\varepsilon_1\} = [B_1]\{u_n\} ; \{\gamma_s\} = [\bar{B}_c]\{u_n\} \quad [11]$$

Les matrices $[B_0]$, $[B_1]$ et $[\bar{B}_c]$ ainsi que la procédure ayant conduit à leur définition sont détaillées en annexe A.

2.3. Formulation de la matrice de rigidité mixte

2.3.1. Forme généralisée du PTV

L'expression du PTV est définie sous sa forme généralisée en pondérant les relations de comportement suivantes :

$$\{\varepsilon_s\} - [H]^{-1}\{\sigma_s\} = \{0\} \text{ et } \{\gamma_s\} - [G]^{-1}\{\tau_s\} = \{0\} \quad [12]$$

par les contraintes virtuelles $\{\sigma_s^*\}$ et $\{\tau_s^*\}$.

$$W = \sum_{e=1,n} (W_{\text{int}}^e - W_{\text{ext}}^e) = 0 \quad \forall \bar{u}_q^* \text{ avec } \bar{u}_q^* = 0 \text{ sur } S_u \quad [13]$$

$$W_{\text{int}}^e = W_{mf}^e + \bar{W}_c^e \quad [14]$$

$$W_{mf}^e = \int_{V^e} (-\langle \sigma_s^* \rangle [H]^{-1}\{\sigma_s\} + \langle \sigma_s^* \rangle \{\varepsilon_s\} + \langle \varepsilon_s^* \rangle \{\sigma_s\}) dV \quad [15]$$

$$\bar{W}_c^e = \int_{V^e} (-\langle \tau_s^* \rangle [G]^{-1}\{\tau_s\} + \langle \tau_s^* \rangle \{\gamma_s\} + \langle \gamma_s^* \rangle \{\tau_s\}) dV \quad [16]$$

$$\langle \sigma_s \rangle = \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \rangle ; \langle \tau_s \rangle = \langle \tau_{xz} \ \tau_{yz} \rangle$$

Les matrices de comportement $[H]$ et $[G]$ sont définies, comme pour les plaques, par les relations suivantes pour un matériau homogène et isotrope :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ et } [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [17]$$

(E : module d'Young, ν : coefficient de poisson) :

2.3.2. Approximation locale des contraintes (continuité C^1)

Le choix des fonctions de base pour l'approximation des contraintes est très important dans les formulations mixtes. Plusieurs considérations peuvent influencer ce choix. Par exemple, pour le modèle MiSP4-Q4 avec 5 ddl par nœud :

– l'approximation des vecteurs $\{\sigma_s\}$ et $\{\tau_s\}$ doit contenir au moins cinq termes constants et trois termes de $\{\sigma_s\}$ linéaires en z (état de contraintes pour une plaque en membrane-flexion/CT) ;

– les paramètres d'approximation $\langle \alpha_\sigma \rangle$ et $\langle \alpha_\tau \rangle$ doivent assurer un rang correct à la matrice de rigidité obtenue après leur élimination par condensation statique. Ils doivent donc vérifier la condition de stabilité (nécessaire et non suffisante) suivante : ($n(\alpha_\sigma)$ inclue les paramètres de membrane et de flexion) ;

$$n(\alpha_\sigma) + n(\alpha_\tau) \geq n(u_n) - 6 ; n(u_n) = 20$$

– le choix du nombre de paramètres α_σ et α_τ est tel que le modèle mixte final ne soit pas équivalent au modèle déplacement correspondant.

En conséquence nous retenons les approximations suivantes :

2.3.2.1. Approximation suivant ζ

$$\{\sigma_s\} = \{\sigma_0\} + \zeta \{\sigma_1\} \quad (\text{linéaire en } \zeta) \quad [18]$$

$$\{\tau_s\} = (1 - \zeta^2) \{\tau_0\} \quad (\text{quadratique en } \zeta) \quad [19]$$

$\{\sigma_0\}$, $\{\sigma_1\}$ et $\{\tau_0\}$ sont fonction de ξ, η uniquement. L'approximation des contraintes de CT $\{\tau_s\}$ tient compte des conditions d'équilibre sur les faces supérieures et inférieures de la coque ($\{\tau_s\} = 0$ pour $\zeta = \pm 1$)

2.3.2.2. Approximation suivant ξ, η

Nous considérons les approximations suivantes pour $\{\sigma_1\}$ et $\{\tau_0\}$:

$$\{\sigma_1\} = [p_1] \{\alpha_f\} ; \{\tau_0\} = [p_c] \{\alpha_c\} \quad [20a,b]$$

$$[p_1] = \begin{bmatrix} \langle p_2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle p_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle p_2 \rangle \end{bmatrix} ; [p_c] = \begin{bmatrix} \langle p_2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle p_2 \rangle \end{bmatrix} \quad [21a,b]$$

$$\langle p_2 \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle; \quad \langle \alpha_f \rangle = \langle \alpha_{f1} \cdots \alpha_{f12} \rangle; \quad \langle \alpha_c \rangle = \langle \alpha_{c1} \cdots \alpha_{f8} \rangle$$

Les contraintes de membrane $\{\sigma_0\}$ sont définies explicitement en fonction des déplacements aux nœuds par l'intermédiaire de la loi de comportement et des relations déformations-déplacements correspondantes :

$$\{\sigma_0\} = [H][B_0]\{u_n\}; \quad [B_0] \text{ (annexe A)} \quad [22]$$

2.3.2.3. Elimination des contraintes. Matrices de rigidité finales

La forme W_{int}^e [14] s'écrit en utilisant les approximations [18] et [19] et en intégrant explicitement suivant ζ :

$$W_{\text{int}}^e = W_{mf}^e + \bar{W}_c^e; \quad W_{mf}^e = W_0^m + W_1^f \quad [23]$$

$$\text{avec } W_0^m = \int_{A_r} \left(-\langle \sigma_0^* \rangle [H]^{-1} \{\sigma_0\} + \langle \sigma_0^* \rangle \{\epsilon_0\} + \langle \epsilon_0^* \rangle \{\sigma_0\} \right) h J_0 d\xi d\eta \quad [24]$$

$$W_1^f = \int_{A_r} \left(-\langle \sigma_1^* \rangle [H]^{-1} \{\sigma_1\} + \frac{h}{2} \langle \sigma_1^* \rangle \{\epsilon_1\} + \frac{h}{2} \langle \epsilon_1^* \rangle \{\sigma_1\} \right) \frac{h}{3} J_0 d\xi d\eta \quad [25]$$

$$\bar{W}_c^e = \int_{A_r} \left(\frac{4}{5} \langle \tau_0^* \rangle [G]^{-1} \{\tau_0\} + \langle \tau_0^* \rangle \{\gamma\} + \langle \gamma^* \rangle \{\tau_0\} \right) \frac{2}{3} h J_0 d\xi d\eta \quad [26]$$

$J_0 = \det[F_0] = |\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2|$ (fonction de ξ et η). A_r est l'aire de l'élément de référence isoparamétrique à 4 nœuds (Les bornes d'intégration sont $-1 \leq \xi \leq 1$ et $-1 \leq \eta \leq 1$).

La relation [22] étant satisfaite explicitement. En tenant compte des relations [a2], [a8] et [a16] de l'annexe A et des relations [20] et [21], W_{int}^e s'écrit :

$$W_{\text{int}}^e = \langle u_n^* \rangle [k_m^e] \{u_n\} + \langle \alpha^* \rangle \langle u_n^* \rangle [\bar{k}] \begin{Bmatrix} \{\alpha\} \\ \{u_n\} \end{Bmatrix} \quad [27]$$

$[k_m^e]$ est la matrice de rigidité de membrane définie par :

$$[k_m^e] = \int_{A_r} [B_0]^T [H_m][B_0] J_0 d\xi d\eta; \quad [H_m] = h[H] \quad [28]$$

$[\bar{k}]$ est la matrice du modèle mixte général en flexion/CT (non définie positive) :

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} -[k_1] & 0 & [k_{1u}] \\ 0 & -[k_\tau] & [k_{\tau u}] \\ [k_{1u}]^T & [k_{\tau u}]^T & 0 \end{bmatrix}; \langle \alpha \rangle = \langle \alpha_f \rangle \quad \langle \alpha_c \rangle \quad [29]$$

$$[k_1] = \int_{A_r} [p_1]^T [H]^{-1} [p_1] \frac{h}{3} J_0 d\xi d\eta; \quad [k_{1u}] = \int_{A_r} [p_1]^T [B_1] \frac{h^2}{6} J_0 d\xi d\eta \quad [29a,b]$$

$$[k_\tau] = \int_{A_r} [p_c]^T [G]^{-1} [p_c] \frac{8}{15} h J_0 d\xi d\eta; \quad [k_{\tau u}] = \int_{A_r} [p_c]^T [\bar{B}_c] \frac{2}{3} h J_0 d\xi d\eta \quad [30c,d]$$

$[p_1]$ et $[p_c]$ [21] étant polynomiales en ξ, η , les matrices ci-dessus sont donc intégrées exactement par un schéma de Gauss à 2 x 2 points. L'élimination successive des variables $\{\alpha_f\}$ et $\{\alpha_c\}$ au niveau local se traduit par :

$$\{\alpha_f\} = [k_1]^{-1} [k_{1u}] \{u_n\} \quad \text{et} \quad \{\alpha_c\} = [k_\tau]^{-1} [k_{\tau u}] \{u_n\} \quad [31a,b]$$

ainsi $W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [k^e] \{u_n\}$ où $[k^e]$ est la matrice de rigidité élémentaire finale :

$$[k^e] = [k_m^e] + [k_f^e] + [k_c^e]; \quad [k_m^e] \text{ (relation [28])} \quad [32]$$

$$[k_f^e] = [k_{1u}]^T [k_1]^{-1} [k_{1u}]; \quad [k_c^e] = [k_{\tau u}]^T [k_\tau]^{-1} [k_{\tau u}] \quad [33]$$

Les matrices ci-dessus sont de dimension (20 x 20). Les matrices à inverser [33] sont de dimensions (12 x 12) pour $[k_1]$ et (8 x 8) pour $[k_\tau]$. Les relations [31] seront utilisées par la suite pour évaluer les contraintes $\{\sigma_s\}$ et $\{\tau_s\}$ au point ξ, η, ζ .

2.4. Calcul des contraintes et des efforts généralisés

2.4.1. Contraintes

Les contraintes dans le plan tangent $\{\sigma_s\}$ sont calculées en utilisant les relations [18], [20a], [21a], [22] et [31a] :

$$\{\sigma_s\} = \left([H] [B_0] + \zeta [p_1] [k_1]^{-1} [k_{1u}] \right) \{u_n\}, \quad \langle \sigma_s \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rangle \quad [34]$$

Les contraintes de cisaillement transversal (CT) τ_{xz} et τ_{yz} sont quadratiques suivant l'épaisseur, ce qui constitue un avantage par rapport aux modèles déplacements où elles sont généralement calculées soit par la loi de comportement en CT, soit en intégrant les équations d'équilibre tridimensionnelles. Dans notre cas, elles sont calculées en fonction de $\{u_n\}$ en utilisant [19, 20b, 21b et 31b] :

$$\{\tau_s\} = (1 - \zeta^2) [p_c] [k_\tau]^{-1} [k_{tu}] \{u_n\}, \quad \langle \tau_s \rangle = \langle \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle \quad [35]$$

avec $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ pour $\zeta = \pm 1$

2.4.2. Efforts généralisés

Pour le modèle MiSP4-Q4, les efforts normaux $\{N\}$, les moments de flexion $\{M\}$ et les efforts de cisaillement transversal $\{T\}$ sont calculés en intégrant les composantes des vecteurs contraintes $\{\sigma_s\}$ et $\{\tau_s\}$ suivant l'épaisseur :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_s\} dz = h [H] [B_0] \{u_n\}, \quad \langle N \rangle = \langle N_x \quad N_y \quad N_{xy} \rangle \quad [36]$$

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_s\} z dz = \frac{h^2}{6} [p_1] [k_1]^{-1} [k_{1u}] \{u_n\}, \quad \langle M \rangle = \langle M_x \quad M_y \quad M_{xy} \rangle \quad [37]$$

$$\{T\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\tau_s\} dz = \frac{2}{3} h [p_c] [k_\tau]^{-1} [k_{tu}] \{u_n\}, \quad \langle T \rangle = \langle T_x \quad T_y \rangle \quad [38]$$

Connaissant $\{u_n\}$, nous pouvons calculer les efforts résultants en tout point ξ, η de la surface moyenne.

2.5. Rigidité fictive

Le passage de 5 ddl à 6 ddl par nœud conduit à une singularité de la matrice de rigidité globale si tous les éléments connectés à un nœud sont coplanaires. Pour éviter cette difficulté numérique, nous introduisons une matrice fictive $[k_{\theta_z}]$ associée aux quatre rotations nodales fictives θ_{zj} . Batoz et Dhett [BAT 92] ont proposé une matrice $[k_{\theta_z}]$ généralisant celle de Zienkiewicz [ZIE 77] pour le triangle équilatéral. Elle est basée sur la discrétisation d'une forme intégrale $W_{\theta_z}^e$ fictive associée à l'opérateur Laplacien de θ_z pondérée par θ_z^* :

$$W_{\theta_z}^e = \int_{A^e} \alpha H_{f1} (\theta_{z,x}^* \theta_{z,x} + \theta_{z,y}^* \theta_{z,y}) J_0 d\xi d\eta \quad [39]$$

$$\theta_z = \sum_{i=1,4} N_i \theta_{zi} ; \quad \begin{Bmatrix} \theta_{z,\xi} \\ \theta_{z,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \{\theta_{zn}\} = [N_{,\xi}] \{\theta_{zn}\} \quad [40]$$

$$\text{Sachant que } \begin{Bmatrix} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{Bmatrix} = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \theta_{z,\xi} \\ \theta_{z,\eta} \end{Bmatrix} \quad ([C_0] : \text{annexe A})$$

En effectuant les mêmes développements sur les termes virtuels, nous obtenons :

$$W_{\theta_z}^e = \langle \theta_{zn}^* \rangle [k_{\theta_z}^e] \{\theta_{zn}\} \quad [41]$$

$$\text{avec } [k_{\theta_z}^e] = \alpha H_{f1} \int ((C_0) [N_\xi])^T ((C_0) [N_\xi]) J_0 d\xi d\eta \quad [42]$$

H_{f1} est une valeur caractéristique de la matrice de comportement en flexion [H_f] (par exemple $H_{f1} = Eh^3/12(1-\nu^2)$). α est un coefficient petit (10^{-4} dans la programmation effectuée) dépendant de la précision de l'ordinateur. En ajoutant ainsi $[k_{\theta_z}^e]$ à la matrices de rigidité [k^e], nous évitons la singularité de la matrice globale [K].

2.6. Prise en compte des rotations autour de la normale.

Modèle FRQ tridimensionnel

2.6.1. Champ de déplacements

En introduisant le concept de « Fibre Plane en Rotation » [AYAD 93,[AYA 95] appliqué à l'élément de membrane de type déplacements FRQ, le champ de déplacements \vec{u}_q d'un point quelconque de la coque se traduit par :

$$\vec{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = \vec{u}_p(\xi, \eta) + z \vec{\theta} \wedge \vec{n}(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^4 N_i (\vec{\theta}_{z_i} \wedge \vec{r}_i) ; \vec{\theta}_{z_i} = \theta_{z_i} \vec{n}_i \quad [43]$$

$$\text{ou encore } \vec{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = \vec{u}_p + \sum_{i=1}^4 N_i ((\theta_{x_i} \vec{t}_{1i} + \theta_{y_i} \vec{t}_{2i}) \wedge z \vec{n}_i) + \sum_{i=1}^4 N_i (\theta_{z_i} \vec{n}_i \wedge \vec{r}_i) \quad [44]$$

avec $\vec{r}_i = \vec{i}p = \vec{x}_p - \vec{x}_i$ et $-h/2 \leq z \leq h/2$; ne pas confondre x,y,z avec X,Y,Z. [45]

θ_{z_i} est la rotation de la fibre \vec{r}_i (reliant le point p au nœud i) autour de la normale \vec{n}_i au nœud i (figure 3).

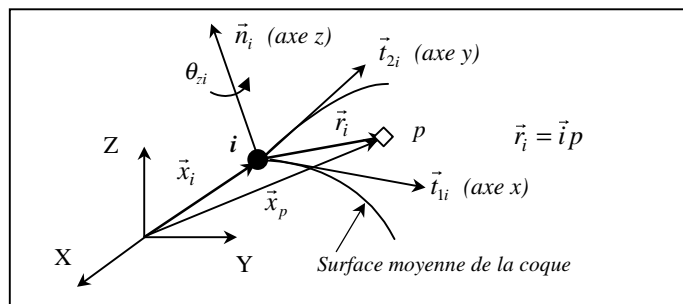


Figure 3. Rotation θ_z autour de la normale. Modèle FRQ tridimensionnel

Le terme $\theta_{z_i} \vec{n}_i \wedge \vec{r}_i$ [44] est introduit pour enrichir le comportement de l'élément de coque en membrane.

2.6.2. Matrice de rigidité de l'élément de coque MiSP4-FRQ

L'introduction du terme bulle $\theta_{z_i} \vec{n}_i \wedge \vec{r}_i$ [44] engendrera une modification dans les matrices $[B_0]$ et $[B_1]$ (annexe A, relations [a3] et [a9]) en créant quatre colonnes correspondant aux rotations nodales θ_{z_i} . Les composantes de déformations $\{\varepsilon_0\}$ et $\{\varepsilon_1\}$ [11] font intervenir les dérivées de \vec{u}_p par rapport à ξ, η , nous écrivons :

$$\vec{u}_{p,\xi} = \sum_{i=1}^4 \left(N_{i,\xi} \vec{u}_{p_i} + \vec{P}_{\xi_i} \theta_{z_i} \right); \quad \vec{u}_{p,\eta} = \sum_{i=1}^4 \left(N_{i,\eta} \vec{u}_{p_i} + \vec{P}_{\eta_i} \theta_{z_i} \right) \quad [46]$$

avec $\vec{P}_{\xi_i} = N_{i,\xi} \vec{n}_i \wedge \vec{r} + N_i \vec{n}_i \wedge \vec{a}_1$; $\vec{P}_{\eta_i} = N_{i,\eta} \vec{n}_i \wedge \vec{r} + N_i \vec{n}_i \wedge \vec{a}_2$

La prise en compte des vecteurs \vec{P}_{ξ_i} et \vec{P}_{η_i} dans l'expression de $\{\varepsilon_0\}$ et $\{\varepsilon_1\}$ est détaillée dans l'annexe B. Connaissant les nouvelles matrices $[B_0']$ (3 x 24) et $[B_1']$ (3 x 24) correspondant aux vecteurs $\{\varepsilon_0\}$ et $\{\varepsilon_1\}$ (modifiés par l'introduction des θ_{z_i}), la matrice de rigidité finale de dimension égale à 24 est définie par les relations [32] et [33] en remplaçant $[B_0]$ par $[B_0']$ et $[B_1]$ par $[B_1']$. Les termes en θ_{z_i} n'interviennent pas dans la matrice $[\bar{B}_c]$ ([a17], annexe A). Les contraintes et les efforts résultants sont calculés de la même façon que pour l'élément MiSP4-Q4.

3. Résultats numériques

Dans cette partie, nous analyserons les performances de convergence et de précision des deux éléments mixtes de coque développés MiSP4-Q4 et MiSP4-FRQ, à travers des cas tests standards considérés par les ingénieurs comme des outils importants de validation [NAF 90]. Ces tests ont pour but de vérifier la capacité d'un élément de coque à simuler des comportements complexes où les états de membrane ou de flexion sont dominants.

3.1. Toit cylindrique soumis à son propre poids

Le toit cylindrique de la figure 4 est soumis à son propre poids. Il repose sur deux diaphragmes rigides à ses extrémités. Les deux bords droits sont libres. Les rapports d'épaisseur sont importants ($R/h=100$ et $L/h=200$). Les déformations de cisaillement transversal sont négligeables et les déformations de membrane sont importantes par rapport à celles de flexion. Ce problème sert de test d'aptitude d'un élément à simuler des états complexes de contraintes ou de déformations de membrane. La solution de référence, basée sur la théorie des coques surbaissées, est

obtenue par Scordelis et Lo [SCO 69], celle basée sur la théorie des coques profondes est sensiblement différente. Nous avons traité ce problème en utilisant les deux éléments MiSP4-Q4 et MiSP4-FRQ. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de l'élément Q4 γ -Q4 [BAT 92, AYA 93] qui est une version plus simplifiée de l'élément MITC4 [DVO 84]. Le quart du toit est discrétisé en considérant des maillages réguliers avec N= 2 à 15 éléments sur les bords AB et AD. Les résultats du déplacement vertical en C et B sont reportés sur les figures 5 et 6.

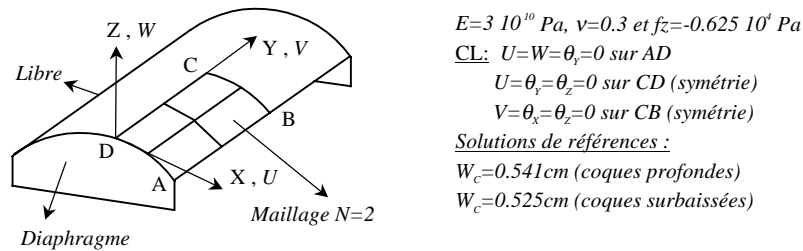


Figure 4. Toit cylindrique soumis à son poids propre

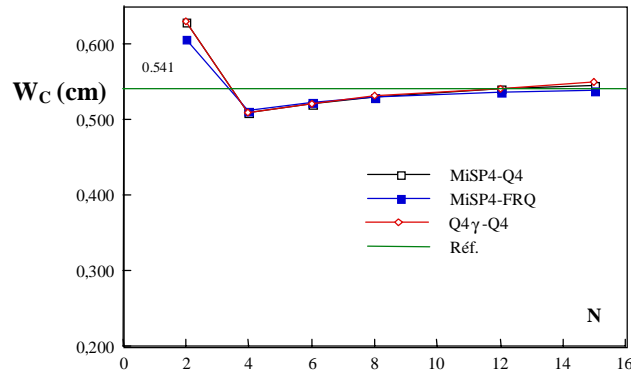


Figure 5. Toit cylindrique soumis à son poids propre. Convergence de W_c

Les effets de membrane étant très importants pour ce cas-test, on observe bien une meilleure convergence vers la solution théorique de l'élément de coque enrichi en membrane MiSP4-FRQ. Tous les éléments convergent rapidement vers la solution de coques profondes $W_c = 0.541\text{cm}$ et $W_b = -3.61\text{cm}$. Les éléments MiSP4-Q4 et Q4 γ -Q4 donnent des résultats sensiblement identiques.

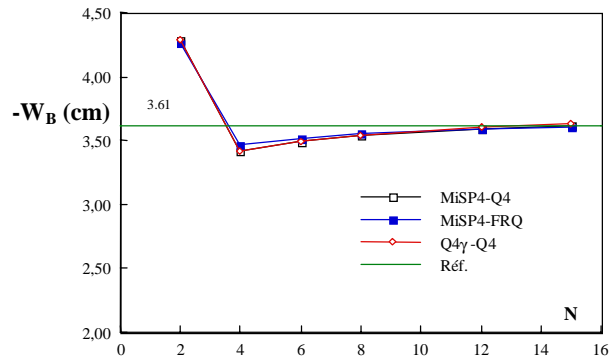


Figure 6. Toit cylindrique soumis à son poids propre. Convergence de $-W_B$

3.2. Cylindre pincé avec diaphragmes

Un des cas tests populaires, jugé sévère pour les problèmes de coque, est celui d'un cylindre court ($L/R = 2$) ($R/h = 100$) supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités et soumis à deux charges unitaires concentrées diamétralement opposées (figure 7). Ce test permet d'examiner l'aptitude d'un élément de coque à simuler des états de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne, notamment au niveau des zones sollicitées (point C). Par raison de symétrie, seul le huitième de la coque est étudié (portion ABCD).

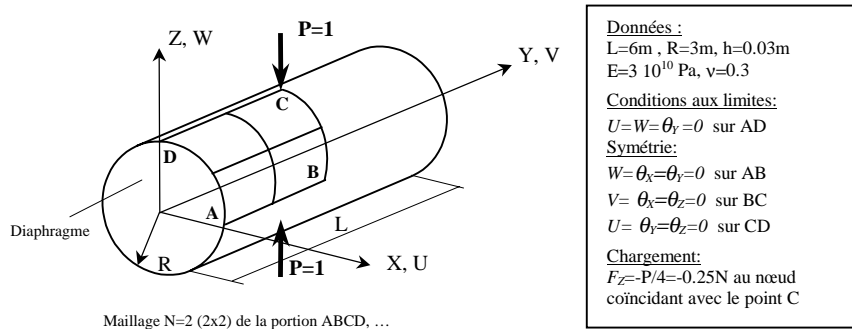


Figure 7. Cylindre pincé avec diaphragmes. Données

Les résultats des déplacements W_C et V_D en fonction du nombre N d'éléments suivant AB et BC (maillages réguliers $N=4$ à 15) sont reportés sur les figures

8 et 9. Une solution de référence basée sur une théorie de coques minces est donnée par Flügge [FLU 60] et Lindberg *et al.* [LIN 69] :

– déplacement W_c sous la charge : $\bar{W}_c = -W_c Eh/P = 164.24$

– déplacement V_D suivant Y : $\bar{V}_D = -V_D Eh/P = 4.11$

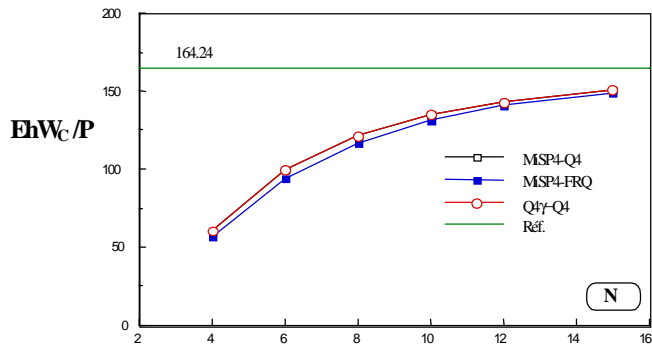


Figure 8. *Cylindre pincé avec diaphragmes*

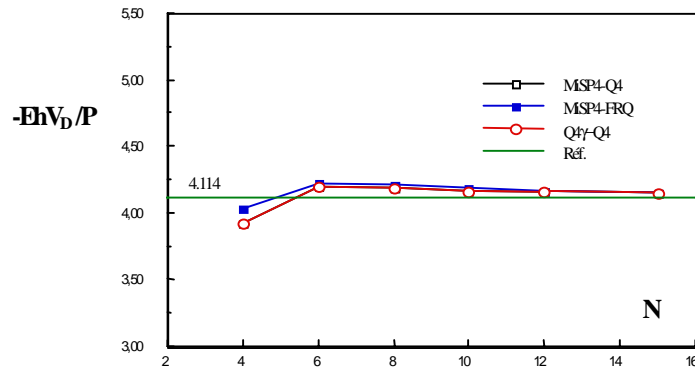


Figure 9. *Cylindre pincé avec diaphragmes. Convergence de V_D*

Concernant le déplacement W_c , une convergence monotone vers la solution de référence est obtenue par les éléments MiSP4-Q4, MiSP4-FRQ et Q4 γ -Q4 (figure 8). Cette convergence est un peu lente pour des maillages à faible nombre d'éléments ($N = 4$ et 6). Cela s'explique par l'approximation bilinéaire utilisée pour les rotations β_x et β_y , conduisant à une représentation moins riche de la flexion au niveau élémentaire. Rappelons que, dans le cas du cylindre pincé, la flexion est

dominante au voisinage du point C. Une approximation quadratique incomplète des rotations conduirait à des courbures de flexion plus riches ayant pour conséquence une meilleure vitesse de convergence de la flèche au point C. Dans le cas du déplacement V_D , les éléments MiSP4-Q4, MiSP4-FRQ et Q4 γ -Q4 convergent rapidement vers la solution de référence (figure 9).

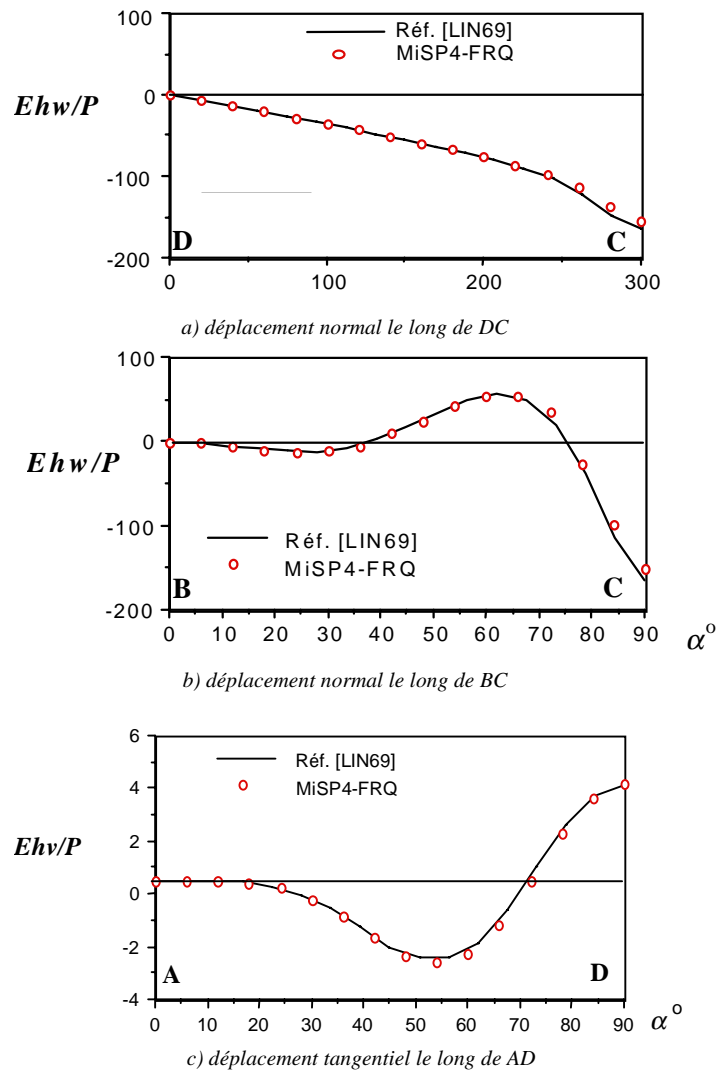


Figure 10. Cylindre pincé. Déplacements le long de DC, BC et AD ($R/h=100$)

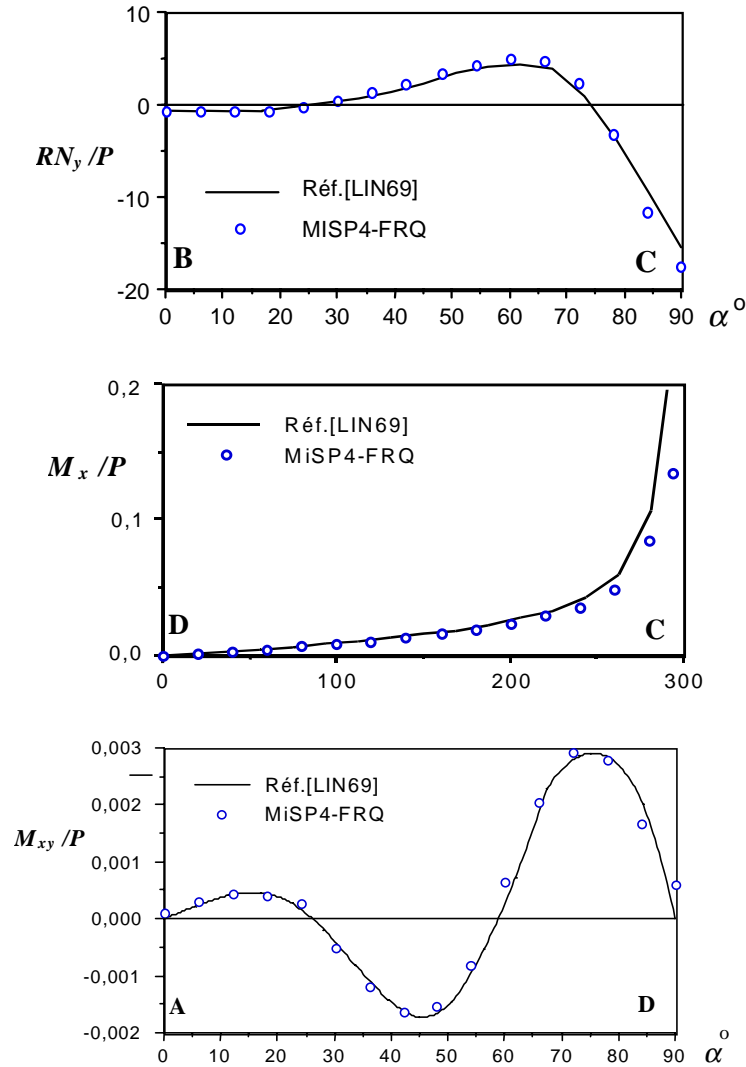


Figure 11. *Cylindre pincé. Distribution des efforts résultants*

Pour un maillage $N = 15$ associé à l'élément MiSP4-FRQ, nous avons reporté sur la figure 10 les résultats du déplacement normal w suivant DC et BC et du déplacement tangentiel v suivant AD. Nous avons également étudié la distribution des efforts résultants sur des points nodaux particuliers : l'effort normal sur BC, les moments de flexion M_x sur DC et M_{xy} sur AD ($\alpha = 0^\circ$ à 90°). Les résultats de ces

efforts, calculés aux nœuds, sont présentés sur la figure 11. Ils sont comparés aux solutions de référence données par Lindberg *et al.* [LIN 69]. L'élément FRQ étant riche en membrane, une bonne estimation est obtenue par exemple pour l'effort N_y sur BC et pour le déplacement tangentiel v sur AD. Les moments M_x et M_{xy} sont également bien répartis sur DC et AD respectivement. Un maillage raffiné au voisinage du point C est utile pour mieux représenter le moment M_x .

3.3. Poutre vrillée sous charges concentrées

Ce problème a été proposé par MacNeal et Harder [MAC 85]. Il s'agit d'une poutre vrillée ou d'une coque hélicoïdale encastrée à une extrémité et soumise à deux cas de chargement concentré à l'autre extrémité: une charge P_z dans le plan (suivant l'axe Z) et une autre hors plan P_y (suivant l'axe Y) (figure 12). Ce test met en évidence le gauchissement de la coque. Il constitue ainsi un bon examen de validation d'éléments finis de coque tenant compte du gauchissement de la surface moyenne, en particulier les éléments quadrilatéraux à 4 nœuds que nous proposons.

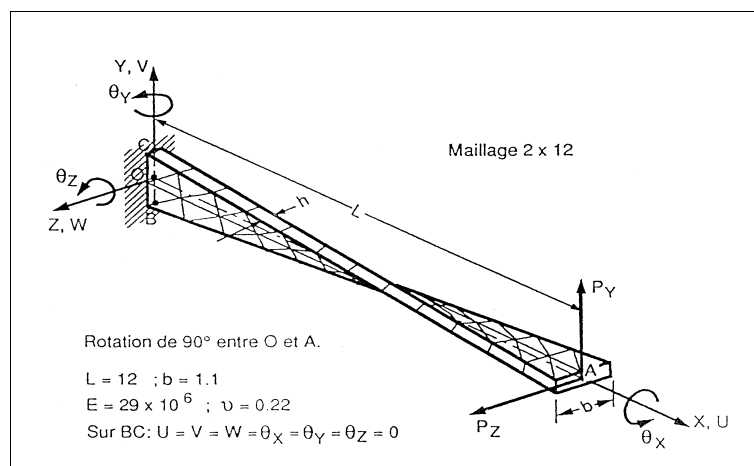


Figure 12. Poutre vrillée sous charges concentrées

Nous comparons les résultats des déplacements dans la direction de la charge à une solution exacte obtenue par Batoz *et al* [BAT 91] en utilisant un élément fini de poutre vrillée. Celui-ci est formulé en considérant un modèle variationnel mixte avec satisfaction des équations de l'équilibre interne. Les déplacements au point A (figure 12) sont donnés pour deux épaisseurs différentes :

- épaisseur $h=0,32$ ($L/h= 37,5$)

- chargement dans le plan $P_z=1 : W_A = 0,00542$
- chargement hors plan $P_y=1 : V_A = 0,00175$
- épaisseur $h=0,0032$ ($L/h = 3\ 750$)
- chargement dans le plan $P_z=1 : W_A = 5\ 316$
- chargement hors plan $P_y=1 : V_A = 1\ 296$

Nous avons analysé ce problème en considérant les maillages 2×12 (figure 12), 4×24 et 6×36 . Les résultats des éléments MiSP4-Q4 et MiSP4-FRQ sont comparés à ceux des éléments Q4 γ -Q4 et DKT-CST ou DKT18 (élément de plaque mince DKT combiné à l'élément de membrane classique CST). Les résultats pour les deux cas de chargement sont reportés sur les tableaux 1 et 2 pour l'épaisseur $h = 0,32$ et $h = 0,0032$ respectivement :

a. Chargement dans le plan : $P_z = 10^3, P_y = 0$

Maillage	MiSP4-Q4	MiSP4-FRQ	Q4 γ -Q4	DKT-CST
2x12	5.35	5.37	5.35	5.33
4x24	5.39	5.40	5.39	5.37
6x36	5.41	5.41	5.40	5.43
Référence	$W_A = 5.42$			

b. Chargement hors plan : $P_y = 10^3, P_z = 0$

Maillage	MiSP4-Q4	MiSP4-FRQ	Q4 γ -Q4	DKT-CST
2x12	1.61	1.72	1.61	1.46
4x24	1.71	1.74	1.71	1.62
6x36	1.73	1.75	1.73	1.68
Référence	$V_A = 1.75$			

Tableau 1. Poutre vrillée. Résultat des déplacements en A pour $h=0,32$

Pour $h = 0,32$ (tableau 1), les quatre éléments MiSP4-Q4, MiSP4-FRQ, Q4 γ -Q4 et DKT-CST convergent de façon monotone vers la solution de référence pour les deux cas de charge. Dans le cas du chargement hors plan, les effets de membrane dominant ceux de flexion au voisinage de l'encastrement, c'est pour cette raison que l'élément MiSP4-FRQ (riche en membrane) donne de très bons résultats. La convergence des éléments MiSP4-Q4, Q4 γ -Q4 et DKT-CST est plus lente car la partie membrane, représentée par les éléments standards bilinéaire Q4 (pour les quadrilatères) et linéaire CST (pour le triangle DKT), n'est pas assez riche en approximation pour simuler des effets membranaires dominants.

a. Chargement dans le plan : $P_z = 1, P_y = 0$

Maillage	MiSP4-Q4	MiSP4-FRQ	Q4 γ -Q4	DKT-CST
2x12	5127	5131	5127	5268
4x24	5205	5206	5204	5203
6x36	5227	5212	5227	5258
Référence	$W_A=5316$			

b. Chargement hors plan : $P_y = 1, P_z = 0$

maillage	MiSP4-Q4	MiSP4-FRQ	Q4 γ -Q4	DKT-CST
2x12	1257	1257	1256	1285
4x24	1283	1282	1283	1282
6x36	1288	1285	1288	1287
Référence	$V_A=1296$			

Tableau 2. Poutre vrillée. Résultat des déplacements en A pour $h=0,0032$

Pour une coque très mince ($h=0,0032$, tableau 2), les éléments MiSP4-Q4, MiSP4-FRQ et Q4 γ -Q4 convergent de façon monotone vers la solution de référence pour les deux cas de charge. Une petite divergence passagère est observée pour l'élément DKT-CST dans le cas du maillage 4 x 24, celui-ci reconverge à nouveau à partir de 6 x 36.

4. Conclusions

Deux nouveaux éléments finis de coques basés sur l'approche géométrique du solide tridimensionnel dégénéré sont présentés : les éléments quadrilatéraux courbes à 4 nœuds MiSP4-Q4 et MiSP4-FRQ. La partie flexion/CT est basée sur le modèle mixte MiSP (Mixed Shear Projected), proposé initialement par les auteurs pour formuler des éléments de plaques [AYA 93, AYA 98]. Ce modèle considère les déformations de CT comme étant indépendantes de l'approximation des variables cinématiques. Le modèle MiSP est dans ce cas de type Hellinger-Reissner avec déformations de CT projetées. Les éléments de coque développés possèdent les degrés de liberté les plus simples et les plus importants pour l'ingénieur, c'est-à-dire $U, V, W, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ au nœud i . Ces éléments n'utilisent pas de fonctions bulles pour leur stabilité, comme c'est le cas de beaucoup d'éléments mixtes. Ainsi, la condensation statique concernera uniquement les contraintes $\{\theta_s\}, \{\tau_s\}$, ce qui constitue un point fort de cette formulation, c'est-à-dire éviter le blocage en CT sans faire appel aux fonctions bulles. Les éléments du modèle MiSP Coque, qu'ils soient triangulaires MiSP3 coque [AYA 93, AYA 95] ou quadrilatéraux MiSP4-Q4 et

MiSP4-FRQ, peuvent être considérés comme parmi les plus simples des éléments mixtes de coque existant à l'heure actuelle.

Nous avons essayé d'améliorer le comportement de membrane en proposant un élément quadrilatéral avec rotation θ_z autour de la normale. L'élément FRQ est basé sur une approche originale le concept de « Fibre Plane en Rotation ». Le champ de déplacement d'un point de la surface moyenne est enrichi par adjonction d'une rotation plane quadratique particulière. Il est performant si une intégration réduite (2 x 2 points de Gauss) est utilisée pour évaluer la matrice de rigidité. De très bons résultats sont obtenus pour des problèmes plans [AYA 93]. Nous avons développé une représentation tridimensionnelle de l'élément de membrane FRQ en considérant θ_z comme une rotation locale autour de la normale à la surface moyenne en général courbe. Ceci est nécessaire pour que cet élément puisse intégrer l'approche isoparamétrique courbe utilisée pour formuler l'élément de coque MiSP4-FRQ.

L'extension du modèle MiSP Coque pour l'analyse non linéaire géométrique est en cours de développement. Elle concerne la formulation de la matrice de rigidité géométrique et du vecteur résidu, nécessaire à l'obtention de la matrice tangente dans le cadre d'une formulation lagrangienne actualisée à chaque itération. Actuellement, nous développons également un bloc de flambage et un bloc dynamique dans notre code interne MODEL'PACK, utilisant le modèle MiSP Coque. Ces deux blocs seront utilisés pour la modélisation de la résistance à la compression verticale et du comportement dynamique des emballages de transport en carton ondulé. Ce matériau étant orthotrope, nous essayons de développer, en partenariat avec la division composites de l'UTC, un modèle de comportement orthotrope homogénéisé, relatif au carton ondulé (recyclé ou non), qui sera intégré par la suite dans le code MODEL'PACK.

5. Bibliographie

- [AHM 70] AHMAD S., IRONS B.M. and ZIENKIEWICZ O.C., «Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements», *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 2, 1970, p. 419-451.
- [AYA 93] AYAD R., Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1993.
- [AYA 95] AYAD R., « Une nouvelle approche variationnelle mixte-hybride pour les coques avec effet de cisaillement transversal et un nouveau concept de rotation autour de la normale pour améliorer la membrane », Actes du 2^e colloque national en calcul des structures, 16-19 Mai 1995, Giens, France.
- [AYA 98] AYAD R., DHATT G. et BATOZ J.L., "A new hybrid-mixed variational approach for Reissner-Mindlin plates. The MiSP model", *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, Vol. 42, 1998, p. 1 149-1 179.
- [BAT 80] BATOZ J.L., BATHE K.J. and HO L.W., "A study of three-node triangular plate bending elements", *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, Vol. 15, 1980, p. 1 771-1 812.

- [BAT 82a] BATHE K.J., *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, 1982.
- [BAT 82b] BATOZ J.L. and BEN TAHAR M., "Evaluation of a new thin plate quadrilateral element", *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, Vol. 18, N° 11, 1982 ,p. 1 655-1 678.
- [BAT 83] BATHE K.J. and DVORKIN E., "Our discrete Kirchhoff and isoparametric shell elements for non-linear analysis", *Comput. Struct.*, Vol. 16, N° 1-4, 1983, p. 89-98.
- [BAT 86] BATHE K.J and DVORKIN E.N., "A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components", *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 22, 1986, p. 697-722.
- [BAT 91] BATOZ J.L. et TRIKI S., Développement d'un élément fini de poutre vrillée, Rapport interne, UTC/LG2MS/MNM, octobre 1991.
- [BAT 92] BATOZ J.L. et DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Vol.3: Coques, Eds Hermès, Paris 1992.
- [BOI 91] BOISSE P., DANIEL J.L. and GELIN J.C., "A new class of three node and four node shell elements for the finite/inelastic strain analysis. Applications in sheet metal forming", *European Conference on New Advances in Comp. Structural Mech.*, Giens, France, 1991, p. 529-537.
- [CHA 87] CHATELAIN J., Analyse non linéaire des coques minces isotropes et composites par éléments finis quadrilatéraux, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1987.
- [COF 91] COFER W.F. and Will K.M., "A three dimensional shell solid transition element for general nonlinear analysis", *Comput. Struct.*, Vol. 38, N°4, 1991, p. 449-462.
- [COO 89] COOK R.D., MALKUS D.S and PLESHA M.E., *Concepts and applications of finite element analysis*, 3rd Ed., J.Wiley 1989.
- [CRI 86] CRISFIELD M., *Finite elements and solution procedures for structural analysis, Vol. 1: Linear analysis*, Pineridge press, 1986.
- [DVO 84] DVOINRK E.N. and Bathe K.J., "A continuum mechanics based four node shell element for general non-linear analysis", *Eng. Comput.*, Vol. 1, 1984, p. 77-88.
- [DVO 91] DVORKIN E.N., "The Ahmad-Irons-Zienkiewicz shell element, the MITC4 shell element, the MITC8 shell element", Lectures in Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements, *CISM Course*, Udine, Italy, June 1991.
- [FEZ 81] FEZANS G., Analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques par éléments finis isoparamétriques tridimensionnels dégénérés, Thèse de Doctorat, ENSAE Toulouse, 1981.
- [FLU 60] FLUGGE W., *Sresses in shells*, Springer Verla, 1960.
- [GRE 61] GREENE B.E., STROME R. and WEIKEL R.C., "Application of the stiffness method to the analysis of shell structures", In *Proc. Aviation Conference of ASME*, Los Angeles, CA, March 1961.

- [HUG 81] HUGHES T.J. and LIU W.K., “Nonlinear finite element analysis of shells:
Part I: Three dimensional shells”, *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, 26, 1981, p. 331-362.
Part II: Two dimensional shells”, *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, 27, 1981, p. 167-181.
- [HUG 87] HUGHES T., *The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice Hall, 1987.
- [IRO 76] IRONS B., “The semi-loof shell elements”, In *Finite Elements for Thin shells and Curved Members*, Eds. Ashwell *et al.*, J. Wiley, 1976, p. 197-222.
- [KAT 93] KATILI I., *Formulation et évaluation de deux nouveaux éléments finis pour l’analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque*, Thèse de doctorat, UTC, France, 1993.
- [LAR 90] LARDEUR P., *Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transverse*, Thèse de Doctorat, UTC, 1990.
- [LIN 69] LINDBERG G.M. , OLSON M.D. and COWPER G.R., “New development in the finite element analysis of shells”, *Q. Bull Div. Mech. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment, National Research council of Canada*, Vol. 4, 1969.
- [MAC 85] MAC NEAL R. and HARDER R.L., “A proposed standart set of problems to test finite element accuracy”, *Finite Element Analysis Design*, Vol. 1, 1985, p. 3-20.
- [MAU 73] MAU S.T., PIAN T. H. H. and TONG P., “Vibration analysis of laminated plates and shells by a hybrid stress element”, *AIAA Jou.* ,11, 1973, p. 1 450-1 452.
- [NAT 90] National Agency for Finite Element Methods and Standards (NAFEMS), U.K. “The Standard NAFEMS Benchmarks”. *TNSB*, Rev. 3, October 1990.
- [PAR 91] PARISCH H., “An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element”, *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, Vol. 31, 1991, p. 127-150.
- [POL 92] POL P., *Modélisation du comportement élastoplastique de coques minces par éléments finis*, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1992.
- [RAM 86] RAMM E. and MATZENMILLER A., “Large deformation shell analysis based on the degeneration concept”, In *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, Vol. 1, Hughes, Hinton, Eds, 1986, p. 365-393.
- [RAM 91] RAMMERSTOFER F.G., “Composite and sandwich shells”, *Lecture in Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements, CISM Course*, Udine, Italy, June 1991.
- [SIM 89] SIMO J.C., FOX D.D. and RIFAI M.S., “Geometrically exact stress resultant shell models: formulation and computational aspects of the nonlinear theory”, In *Analytical and Computational Models of Shells*, (Noor, Belytschko and Simo Eds), CED-Vol. 3, ASME, 1989, p. 161-190.
- [SIM 90] SIMO J.C., FOX D.D. and RIFAI M.S., “On stress resultant geometrically exact shell model - Part III: Computational aspects on the nonlinear theory”, *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, Vol. 79, 1990, p. 21-70.

- [SCO 69] SCORDELIS A.C. and LO K.S., "Computer analysis of cylindrical shells", *J. Amer. Conc. Ins.*, Vol. 61, 1969, p. 539-561.
- [STA 85] STANLEY G., Continuum-based shell elements, Ph.d. thesis, Applied Mechanics Division. Stanford University, CA, 1985.
- [VLA 87] VLACHOUTSIS S., Eléments finis tridimensionnels dégénérés de coques avec intégration explicite suivant l'épaisseur, Thèse de Doctorat, ENSAE, Toulouse, 1987.
- [VLA 90] VLACHOUTSIS S., "Explicit integration for three dimensional degenerated shell finite elements", *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, Vol. 29, 1990, p. 861-880.
- [WIL 90] WILT T.E., SALEEB A.F. and CHANG T.Y., "A mixed element for laminated plates and shells", *Comput. Struct.*, Vol. 37, 1990, p. 597-611.
- [YAN 90] YANG H.T.Y., SAIGAL and LIAW, "Advances of thin shell finite elements and some applications - version 1", *Comp.Struct.*, 35, 1990, p. 481-504.
- [YOS 74] YOSHIDA Y., "A hybrid stress element for thin shell analysis", In Proc. *International Conference on Finite Element Method in Engineering*, 1974, p. 271-284., Univ. of N.S.W., Australia.
- [ZIE 77] ZIENKIEWICZ O.C., *The finite element method*, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1977.
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O.C. and TAYLOR R., *The finite element method, Volume 2: Plates, shell, fluids and non-linear problems*, 4th Ed., Mc Graw-Hill, London 1991.

Annexe A. Vecteurs $\langle \varepsilon_0 \rangle, \langle \varepsilon_1 \rangle$ et $\langle \gamma \rangle$

A.1. vecteur $\langle \varepsilon_0 \rangle = \langle e_x \quad e_y \quad \gamma_{xy} \rangle$

$$\begin{aligned} e_x &= \vec{t}_1 \bullet \vec{u}_{p,x} ; \vec{u}_{p,x} = c_{11}^0 \vec{u}_{p,\xi} + c_{21}^0 \vec{u}_{p,\eta} \\ e_y &= \vec{t}_2 \bullet \vec{u}_{p,y} ; \vec{u}_{p,y} = c_{12}^0 \vec{u}_{p,\xi} + c_{22}^0 \vec{u}_{p,\eta} \\ \gamma_{xy} &= \vec{t}_1 \bullet \vec{u}_{p,y} + \vec{t}_2 \bullet \vec{u}_{p,x} \end{aligned} \quad [a1]$$

$$[C_0] = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ C_{21}^0 & C_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}^1 \bullet \vec{t}_1 & \vec{a}^1 \bullet \vec{t}_2 \\ \vec{a}^2 \bullet \vec{t}_1 & \vec{a}^2 \bullet \vec{t}_2 \end{bmatrix},$$

\vec{a}^1, \vec{a}^2 sont les vecteurs de la base contravariante au point p définis par :

$\vec{a}^1 = \frac{1}{a} (a_{22} \vec{a}_1 - a_{12} \vec{a}_2) ; \vec{a}^2 = \frac{1}{a} (-a_{21} \vec{a}_1 - a_{11} \vec{a}_2)$ où $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sont les termes du tenseur métrique au point p de la surface moyenne.

En utilisant l'approximation [8], nous obtenons :

$$\{\varepsilon_0\} = [B_0] \{u_n\} \quad [a2]$$

La matrice $[B_0]$ fait intervenir uniquement les termes relatifs aux variables U_i, V_i, W_i :

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle c_{1i} & 0 & 0 \\ \langle t_2 \rangle c_{2i} & 0 & 0 \dots i=1 \text{ à } 4 \\ \langle t_1 \rangle c_{2i} + \langle t_2 \rangle c_{1i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [a3]$$

$$c_{1i} = N_{i,\xi} c_{11}^0 + N_{i,\eta} c_{21}^0 ; \quad c_{2i} = N_{i,\xi} c_{12}^0 + N_{i,\eta} c_{22}^0 \quad [a4]$$

Les colonnes « zéros » correspondent aux rotations locales θ_{xi} et θ_{yi} .

A.2. vecteur $\langle \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_{x1} \quad \varepsilon_{y1} \quad \gamma_{xy1} \rangle$

$$\varepsilon_{x1} = \chi_x + \bar{\varepsilon}_{x1} ; \quad \varepsilon_{y1} = \chi_y + \bar{\varepsilon}_{y1} ; \quad \varepsilon_{xy1} = \chi_{xy} + \bar{\gamma}_{xy1} \quad [a5]$$

$\bar{\varepsilon}_{x1}, \bar{\varepsilon}_{y1}$ et $\bar{\gamma}_{xy1}$ interviennent lorsque les nœuds ne sont pas coplanaires, ce qui distingue l'approche iso paramétrique courbe de celle par facettes planes où les trois termes précédents sont nuls. χ_x, χ_y et χ_{xy} sont les courbures de flexion :

$$\begin{aligned} \chi_x &= \vec{t}_1 \bullet \vec{\beta}_{,x} ; \quad \vec{\beta}_{,x} = c_{11}^0 \vec{\beta}_{,\xi} + c_{21}^0 \vec{\beta}_{,\eta} \\ \chi_y &= \vec{t}_2 \bullet \vec{\beta}_{,y} ; \quad \vec{\beta}_{,y} = c_{12}^0 \vec{\beta}_{,\xi} + c_{22}^0 \vec{\beta}_{,\eta} ; \quad \vec{\beta} = \beta_x \vec{t}_1 + \beta_y \vec{t}_2 ; \quad \beta_x = \theta_y \text{ et } \beta_y = -\theta_x \\ \chi_{xy} &= \vec{t}_1 \bullet \vec{\beta}_{,y} + \vec{t}_2 \bullet \vec{\beta}_{,x} \end{aligned} \quad [a6]$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{x1} &= \vec{t}_1 \bullet \vec{\bar{u}}_{p,x} ; \quad \vec{\bar{u}}_{p,x} = b_{c11} \vec{u}_{p,\xi} + b_{c21} \vec{u}_{p,\eta} \\ \bar{\varepsilon}_{y1} &= \vec{t}_2 \bullet \vec{\bar{u}}_{p,y} ; \quad \vec{\bar{u}}_{p,y} = b_{c12} \vec{u}_{p,\xi} + b_{c22} \vec{u}_{p,\eta} \\ \bar{\gamma}_{xy1} &= \vec{t}_1 \bullet \vec{\bar{u}}_{p,y} + \vec{t}_2 \bullet \vec{\bar{u}}_{p,x} \end{aligned} \quad [a7]$$

b_{cij} sont les termes de la matrice $[b_c] = [A_n][C_0]$, $[A_n]$ est donnée par :

$$[A_n] = \begin{bmatrix} \vec{a}^2 \bullet \vec{n}_{,\eta} & -\vec{a}^1 \bullet \vec{n}_{,\eta} \\ -\vec{a}^2 \bullet \vec{n}_{,\xi} & \vec{a}^1 \bullet \vec{n}_{,\xi} \end{bmatrix}$$

En utilisant l'approximation [8], nous obtenons :

$$\{\varepsilon_1\} = [B_1] \{u_n\} \quad [a8]$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \bar{b}_{c1i} & \langle T_{1i} \rangle c_{1i} & \\ \langle t_2 \rangle \bar{b}_{c2i} & \langle T_{2i} \rangle c_{2i} & \dots \\ \langle t_1 \rangle \bar{b}_{c2i} + \langle t_2 \rangle \bar{b}_{c1i} & \langle T_{1i} \rangle c_{2i} + \langle T_{2i} \rangle c_{1i} & \end{bmatrix} \quad (i = 1,4) \quad [a9]$$

$$\bar{b}_{c1i} = N_{i,\xi} b_{c11} + N_{i,\eta} b_{c21} \quad ; \quad \bar{b}_{c2i} = N_{i,\xi} b_{c12} + N_{i,\eta} b_{c22}$$

$$\langle T_{1i} \rangle = \langle -\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{2i} \quad \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{1i} \rangle ; \quad \langle T_{2i} \rangle = \langle -\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{2i} \quad \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{1i} \rangle$$

A.3. vecteur $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle$

$$\{\mathcal{Y}\} = [C_0]^T \{\mathcal{V}_\xi\} \quad [a10]$$

$\langle \gamma_\xi \rangle = \langle \gamma_{\xi z} \quad \gamma_{\eta z} \rangle$ sont les déformations covariantes de CT :

$$\gamma_{\xi z} = \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,\xi} + \vec{a}_1 \cdot \vec{\beta} \quad \text{et} \quad \gamma_{\eta z} = \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,\eta} + \vec{a}_2 \cdot \vec{\beta} \quad [a11]$$

L'utilisation de l'approximation [8] pour évaluer $\langle \gamma_\xi \rangle$ conduit à un blocage en CT. Pour éviter cela, nous utilisons l'approche des déformations de CT projetées. Les composantes covariantes $\gamma_{\xi z}$ et $\gamma_{\eta z}$ [a11] sont définies en fonction des déformations $\gamma_{\xi z}$ et $\gamma_{\eta z}$ calculées au milieu des côtés de l'élément (figure a1).

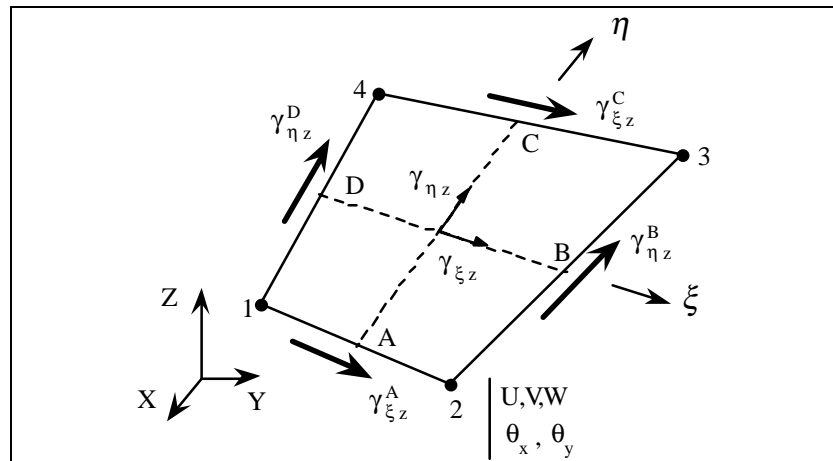


Figure a1. Déformations de CT covariantes projetées

$$\{\mathcal{V}_\xi\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = [A] \{\mathcal{Y}_{\xi k}\}; \quad [A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 \\ 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \quad [a12]$$

$$\langle \gamma_{\xi k} \rangle = \langle \gamma_{\xi z}^A \quad \gamma_{\eta z}^B \quad \gamma_{\xi z}^C \quad \gamma_{\eta z}^D \rangle; [A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 \\ 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \quad [\text{a13}]$$

Les déformations de bord $\langle \gamma_{\xi k} \rangle$ sont plus générales pour un élément de coque, elles sont projetées sur les variables nodales par une technique de collocation par point (hypothèses de Mindlin sous forme discrète). Les points considérés sont les milieux des côtés A, B, C et D (figure a1). Les quatre déformations $\gamma_{\xi z}^A, \gamma_{\eta z}^B, \gamma_{\xi z}^C$ et $\gamma_{\eta z}^D$ sont définies en appliquant les relations [a11] respectivement aux points A($\xi=0, \eta=-1$), B($\xi=1, \eta=0$), C($\xi=0, \eta=1$) et D($\xi=-1, \eta=0$). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi z}^A &= \bar{n}^A \cdot \bar{u}_{p,\xi}^A - \bar{a}_1^A \cdot (\bar{t}_2 \theta_x)^A + \bar{a}_1^A \cdot (\bar{t}_1 \theta_y)^A \\ \gamma_{\eta z}^B &= \bar{n}^B \cdot \bar{u}_{p,\eta}^B - \bar{a}_2^B \cdot (\bar{t}_2 \theta_x)^B + \bar{a}_2^B \cdot (\bar{t}_1 \theta_y)^B \\ \gamma_{\xi z}^C &= \bar{n}^C \cdot \bar{u}_{p,\xi}^C - \bar{a}_1^C \cdot (\bar{t}_2 \theta_x)^C + \bar{a}_1^C \cdot (\bar{t}_1 \theta_y)^C \\ \gamma_{\eta z}^D &= \bar{n}^D \cdot \bar{u}_{p,\eta}^D - \bar{a}_2^D \cdot (\bar{t}_2 \theta_x)^D + \bar{a}_2^D \cdot (\bar{t}_1 \theta_y)^D \end{aligned} \quad [\text{a14}]$$

$\bar{n}^A, \bar{n}^B, \bar{n}^C, \bar{n}^D$ sont les normales aux points A,B,C,D respectivement. \bar{u}_p et $\bar{\beta}$ des relations [a11] et [a14] sont calculés en fonction de $\langle u_n \rangle$ en utilisant l'approximation [8].

Le vecteur $\langle \gamma_{\xi} \rangle$ [a12] s'écrit, en effet :

$$\langle \gamma_{\xi} \rangle = [B_{c\xi}] \{u_n\}; [B_{c\xi}] = [A][B_{cs}] \quad [\text{a15}]$$

La matrice $[B_{cs}]$ (dimensions 4 x 20) est présentée en détail dans la référence [AYA93]. $\{ \gamma \}$ [a10] s'écrit ainsi :

$$\{ \gamma \} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [\bar{B}_C] \{u_n\}; \quad \langle u_n \rangle \text{ (relation [9])} \quad [\text{a16}]$$

$$[\bar{B}_C] = [C_o]^T [B_{c\xi}] \text{ (dimensions } 2 \times 20) \quad [\text{a17}]$$

La matrice $[\bar{B}_C]$ fait intervenir toutes les variables nodales.

Annexe B. Modèle FRQ tridimensionnel pour l'élément de coque MiSP4-FRQ

B.1. Déformations de membrane $\{\epsilon_0\}$

Le vecteur des déformations de membrane $\{\epsilon_0\}$ est défini par les relations [a1] de l'annexe A. Considérons par exemple la première composante e_x de $\{\epsilon_0\}$:

$$e_x = \vec{t}_1 \bullet \vec{u}_{p,x} ; \vec{u}_{p,x} = c_{11}^0 \vec{u}_{p,\xi} + c_{21}^0 \vec{u}_{p,\eta} ; \vec{u}_{p,\xi} \text{ et } \vec{u}_{p,\eta} \text{ (relation [46])} \quad [\text{b1}]$$

Pour simplifier les calculs, on adoptera la convention d'Einstein (sans le symbole $\sum_{i=1,4}$). e_x s'écrit :

$$e_x = \vec{t}_1 \bullet (c_{11}^0 N_{i,\xi} + c_{21}^0 N_{i,\eta}) \vec{u}_{pi} + \vec{t}_1 \bullet (c_{11}^0 \vec{P}_{\xi i} + c_{21}^0 \vec{P}_{\eta i}) \theta_{zi} \quad [\text{b2}]$$

En définissant quatre colonnes relatives à θ_{zi} dans la matrice $[B_\theta]$ qui devient $[B_\theta']$ de dimension 3x24, nous y introduisons le terme $\vec{t}_1 \bullet (c_{11}^0 \vec{P}_{\xi i} + c_{21}^0 \vec{P}_{\eta i})$ associé à θ_{zi} . La même démarche est utilisée pour calculer e_y et γ_{xy} .

B.2. Déformations $\{\varepsilon_I\}$

Considérons comme pour la section B.1 la première composante de $\{\varepsilon_I\}$ (relation [a5],[a6] et [a7] de l'annexe A) :

$$\varepsilon_{x1} = \chi_x + \bar{\varepsilon}_{x1} \quad [\text{b3}]$$

χ_x est une courbure de flexion; la rotation θ_{zi} ne peut y intervenir. Par contre, la composante $\bar{\varepsilon}_{x1}$ [a7] fait intervenir les dérivées du vecteur déplacement \vec{u}_p :

$$\bar{\varepsilon}_{x1} = \vec{t}_1 \bullet \vec{u}_{p,x} ; \vec{u}_{p,x} = b_{c11} \vec{u}_{p,\xi} + b_{c21} \vec{u}_{p,\eta} \quad [\text{b4}]$$

La démarche de calcul du terme associé à θ_{zi} dans la matrice $[B_I]$ est la même que celle décrite dans la section B.1. Nous aboutissons à une expression analogue à celle donnée par la relation [b2] en remplaçant la matrice $[C_\theta]$ par $[b_c]$:

$$\bar{\varepsilon}_{x1} = \vec{t}_1 \bullet (b_{c11} N_{i,\xi} + b_{c21} N_{i,\eta}) \vec{u}_{pi} + \vec{t}_1 \bullet (b_{c11} \vec{P}_{\xi i} + b_{c21} \vec{P}_{\eta i}) \theta_{zi} \quad [\text{b5}]$$

Le terme scalaire associé à θ_{zi} est introduit par la suite dans les colonnes correspondantes de la matrice $[B_I']$ de dimension 3x24. La même démarche est à suivre pour obtenir $\bar{\varepsilon}_{y1}$ et $\bar{\gamma}_{xy1}$ en fonction de θ_{zi} .