

---

# Algorithmes d'intégration temporelle implicites couplés avec des résolveurs d'ordre élevé

**Bouazza Braikat\*** — **Mohammad Jamal\*** — **Noureddine Damil\***  
**Michel Potier-Ferry\*\***

*\*Laboratoire de Calcul Scientifique en Mécanique  
Faculté des Sciences Ben M'Sik  
Université Hassan II – Mohammadia, BP 7955 Sidi Othman, Casablanca, Maroc  
braikat@caramail.com*

*\*\*Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux,  
UMR CNRS 7554, Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique  
Université de Metz, Ile du Saulcy, F-57045 Metz cedex 01, France  
potier-ferry@lpm.univ-metz.fr*

---

*RÉSUMÉ. Nous développons dans cet article quelques nouveaux algorithmes implicites pour la résolution de problèmes non linéaires instationnaires. Les algorithmes proposés sont des variantes des Méthodes Asymptotiques Numériques (MAN), obtenus en associant la méthode de perturbation, la technique d'homotopie et des procédures classiques de discrétisation en temps et en espace. La performance de ces algorithmes est testée sur un modèle classique des phénomènes de propagation d'ondes non linéaires, décrit par l'équation de Fisher. Les résultats obtenus attestent d'une économie notable en temps CPU par comparaison à d'autres méthodes de résolution de problèmes non linéaires.*

*ABSTRACT. In this paper, we develop some new implicit algorithms for solving instationary non-linear problems. The proposed algorithms are variants of Asymptotic Numerical Methods (ANM). They are obtained by coupling the perturbation method, the homotopy technique and classical time-space discretization procedures. The efficiency of these algorithms is tested on a model for non-linear wave propagation phenomena typified by the Fisher equation. The obtained results prove a computational cost save in comparison with other algorithms for non-linear problems.*

*MOTS-CLÉS : non linéaire, instationnaire, algorithmes implicites, homotopie, perturbation, Méthode Asymptotique Numérique, ondes non linéaires.*

*KEYWORDS: non-linear, instationary, implicit algorithms, homotopy, perturbation, Asymptotic Numerical Method, non-linear waves.*

---

## 1. Introduction

Les écoulements de fluide, les transferts de chaleur, la propagation des ondes de nature différentes (matérielles ou de rayonnement, élastiques ou non élastiques), la propagation des déchets nucléaires en profondeur sous-marine ou dans l'air, les problèmes de vibrations des structures utilisées dans les constructions ou dans des équipements industriels, le flambage dynamique, etc., sont des processus physiques de nature non linéaire et à évolution temporelle. Ce genre de phénomènes est souvent rencontré aussi bien dans la vie quotidienne que dans de nombreux domaines industriels tels que les industries aéronautiques, pétrolières, nucléaires, navales, les prévisions météorologiques, etc. Ces phénomènes sont modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles ou d'équations différentielles ordinaires non linéaires, parfois couplées, complétées souvent par des conditions aux limites également non linéaires.

La détermination par voie analytique des solutions exactes de ces équations demeure exceptionnelle. L'accès aux solutions de ces problèmes d'évolution non linéaires ne peut donc se faire que par des analyses approximatives moyennant trois méthodes principales : les méthodes purement analytiques, les méthodes semi-analytiques ou semi-numériques et les méthodes purement numériques.

Les premières méthodes sont limitées à des problèmes à géométrie et à conditions aux limites simples. Les résolutions spatiale et temporelle sont faites analytiquement. La résolution en espace se fait par les procédures de type Galerkin ou de Ritz ou par le principe de superposition modale (Bathe, 1986) comme en dynamique des structures. L'intégration temporelle (Nayfeh, 1973), (Nayfeh *et al.*, 1979), (Nayfeh, 1981) est effectuée par la méthode de la balance harmonique, la technique de Poincaré-Linsdedt, la méthode de la moyenne ou la méthode des échelles multiples.

Les approches semi-numériques se basent sur le principe de séparation de variables : la solution du problème non linéaire est cherchée sous forme d'un produit d'une fonction temporelle par une fonction qui ne dépend que de l'espace. Généralement, la fonction temporelle est supposée harmonique. On utilise la méthode de la balance harmonique (Nayfeh, 1973) qui conduit à un problème aux limites non linéaires vérifié par la fonction spatiale. La solution de ce problème se calcule numériquement en passant par des procédures de discrétisation (éléments finis, différences finies...) et on utilise des algorithmes itératifs (Bathe, 1986), (Zienkiewicz *et al.*, 1987), (Geradin *et al.*, 1993).

Quant aux méthodes purement numériques (Bathe, 1986), (Zienkiewicz *et al.*, 1987), (Argyris *et al.*, 1991), (Fletche, 1991), (Geradin *et al.*, 1993), elles se basent classiquement sur des intégrations directes des équations gouvernant le problème étudié. Le principe de ces méthodes s'appuie sur les procédures de discrétisation de l'espace par éléments finis ou par différences finies. L'intégration temporelle s'effectue par le choix d'un schéma en temps du genre Euler explicite ou implicite

ou Crank-Nicolson pour les problèmes d'évolution du premier ordre ou par des schémas explicites ou implicites appartenant à la famille de Newmark pour les problèmes du second ordre. Il est à noter que les schémas explicites sont conditionnellement stables et exigent un très grand nombre de pas de temps. Ces schémas sont plus efficaces pour les problèmes à hautes fréquences (Argyris *et al.*, 1991) ou pour des problèmes de dynamique rapide. Quant aux schémas implicites, ils sont souvent inconditionnellement stables mais exigent la résolution de toutes les équations en même temps.

Après avoir effectué une discrétisation en temps grâce à un schéma implicite, on obtient une équation non linéaire en espace. Dans cet article, on s'intéresse à la technique de résolution de cette équation spatiale. Deux types de stratégies sont possibles pour que le coût du calcul reste raisonnable. La première possibilité est une résolution itérative utilisant la même matrice à tous les pas de temps ou, au moins, pour un grand nombre de pas de temps. Cette méthode peut être utilisée lorsque les effets non linéaires ont assez peu d'influence au cours d'un pas de temps, en particulier pour de petits pas de temps. Cette méthode itérative est utilisée pour les problèmes de propagation d'ondes (Fornberg *et al.*, 1978), (Taha *et al.*, 1984), (Iskandar, 1989), (Fletche, 1991). Inversement, lorsqu'on choisit un pas plus grand ou que la non-linéarité est plus forte, il faut alors utiliser une méthode de prédiction-correction ou une méthode itérative de type Newton ou Newton modifié. Le nombre d'inversions de matrices et le temps de calcul d'un pas deviennent alors beaucoup plus important. C'est cette seconde stratégie qui est souvent utilisée en dynamique des structures (Bathe, 1986), (Argyris *et al.*, 1991), (Crisfield, 1997).

Dans cet article, on proposera divers algorithmes pour la résolution du problème non linéaire obtenu par discrétisation en temps d'un problème d'évolution. Ces algorithmes font partie des Méthodes Asymptotiques Numériques (MAN), qui associent une technique de perturbation et une discrétisation spatiale. Plus précisément, on discutera des algorithmes introduits en (Damil *et al.*, 1999) et (Mallil *et al.*, 2000) associant la MAN à une transformation par homotopie.

Rappelons brièvement les algorithmes introduits en (Damil *et al.*, 1999) et (Mallil *et al.*, 2000) pour un problème de la forme :

$$L_t u + F(u) + R = 0 \quad [1]$$

où  $u$  est l'inconnue,  $R$  est un vecteur donné (résidu initial),  $L_t$  est un opérateur tangent et  $F$  est un opérateur non linéaire de degré deux au moins. L'idée est de définir une transformation par homotopie, dépendant d'un paramètre  $\varepsilon$ . Cela se traduit, par exemple, par l'une des équations suivantes :

$$L_t v + \varepsilon(F(v) + R) = 0 \quad [2]$$

$$L_t v + F(v) + \varepsilon R = 0 \quad [3]$$

L'inconnue  $v(\varepsilon)$  de [2] (ou [3]) passe de  $v=0$  pour  $\varepsilon=0$  à  $v=u$  pour  $\varepsilon=1$ ,  $u$  étant une solution de [1]. La technique consiste à chercher  $v$  sous la forme d'une série tronquée qu'on transforme ensuite en fraction rationnelle en  $\varepsilon$ , appelée approximant de Padé. Notons que le calcul de tous les termes de cette série ne fait intervenir que le seul opérateur linéaire  $L_t$ . On peut définir d'autres transformations par homotopie, et en particulier choisir plus ou moins arbitrairement l'opérateur  $L^*$  qui sera inversé. Une telle transformation d'homotopie serait la suivante :

$$L^* v + \varepsilon(L_t v - L^* v) + F(v) + \varepsilon R = 0 \quad [4]$$

Cette idée de coupler MAN et homotopie a été appliquée par Cochelin et Compain (Cochelin *et al.*, 2000) pour la résolution de problèmes instationnaires discrétisés, ce qui a permis d'utiliser la même triangulation de matrice pour de nombreux pas de calcul. On se reportera aussi à (Jamal, 1998), (Braikat, 2000), (Jamal *et al.*, 2002) pour diverses applications et validations de cette procédure. Le choix de la transformation d'homotopie est important pour l'efficacité de l'algorithme : celle proposée en (Jamal *et al.*, 2002) permet de réduire le nombre de triangulations de matrice, par rapport à celle proposée en (Cochelin *et al.*, 2000). Notons que si ces algorithmes se rapprochent de la MAN par l'utilisation de séries entières, leur fonctionnement est assez différent des techniques de continuation présentées par exemple dans (Cochelin *et al.*, 1994). On utilisera ici des algorithmes de type itératif d'ordre élevé et on se limitera à une seule itération.

Dans cet article, on discutera plusieurs algorithmes de résolution couplant discrétisation en temps, homotopie et MAN. Ces algorithmes diffèrent principalement par le choix de la transformation d'homotopie. L'algorithme présenté section 3 est totalement nouveau. L'efficacité de ces algorithmes sera évaluée par des tests numériques sur un exemple classique de propagation des ondes non linéaires décrit par l'équation de Fisher. Le principal objectif de cet article est de présenter de manière synthétique cette classe d'algorithmes et de les comparer sur un exemple académique.

Notons qu'il existe d'autres applications de la MAN pour des problèmes instationnaires, mais avec des algorithmes très différents. La première tentative portait sur la résolution d'un problème d'écoulement à surface libre (Mordane *et al.*, 1995) par la MAN sans continuation en considérant l'amplitude de l'onde incidente comme paramètre de perturbation. Il a aussi été proposé d'appliquer des développements par rapport au paramètre temps (Fafard *et al.*, 1997), (Berrahma-Chekroun *et al.*, 2001), (Fellah *et al.*, 2002) bien que la solution du problème continu ne soit pas analytique en temps.

## 2. Comment construire un algorithme d'ordre élevé pour un problème instationnaire ?

Les algorithmes développés dans ce travail sont destinés à la résolution des problèmes instationnaires du premier ordre. Ils font partie de la famille des Méthodes Asymptotiques Numériques (MAN). Ils combinent les méthodes de perturbation, les procédures de discrétisation en temps et en espace et les techniques d'homotopie. Ces algorithmes se distinguent par le choix de la transformation d'homotopie.

### 2.1. Problèmes et algorithmes de résolution

Précisons d'abord le cadre de l'étude. On désigne par  $F(\cdot)$  l'opérateur non linéaire spatial, qu'on sépare en une partie linéaire  $L(\cdot)$  et une partie non linéaire  $F^{nl}(\cdot)$ . On étudie les problèmes aux valeurs initiales de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + F(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + L(u) + F^{nl}(u) = f \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad [5]$$

où  $f(t)$  est une excitation extérieure donnée et  $u_0$  est la condition initiale. Pour des raisons d'adaptation de la forme [5] aux développements asymptotiques, on ramène la partie non linéaire  $F^{nl}(\cdot)$  sous une forme quadratique  $Q(\cdot, \cdot)$ . Une telle opération est souvent possible en introduisant de nouvelles variables et par diverses techniques présentées dans (Potier-Ferry *et al.*, 1997). On choisit donc d'écrire le problème continu sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + L(u) + Q(u, u) = f \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad [6]$$

Pour résoudre le problème [6], on propose trois algorithmes de résolution différents. Dans tous ces algorithmes, on utilise les quatre étapes suivantes : technique d'homotopie, méthode de perturbation, procédures de discrétisation en espace et en temps. Ces algorithmes diffèrent entre eux selon l'ordre d'application de ces étapes et selon le choix du type de la transformation d'homotopie. La présentation détaillée de ces algorithmes fera l'objet des paragraphes qui suivent.

## 2.2. Algorithme de Cochelin-Compain

Cet algorithme est une variante de la MAN déjà testé dans (Cochelin *et al.*, 2000) pour la résolution du problème de vibration d'une poutre bidimensionnelle. On va le reprendre et tester sa performance sur la résolution des problèmes du premier ordre de type [6].

Dans l'objectif d'avoir des conditions initiales nulles, on introduit le changement de variable suivant :

$$u = u_0 + v \quad [7]$$

où la nouvelle inconnue  $v$  satisfait à :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + L_t(v) + Q(v, v) = g \\ v(t_0) = 0 \end{cases} \quad [8]$$

où l'opérateur  $L_t(\cdot)$  et le second membre  $g(t)$  sont définis par les expressions :

$$\begin{cases} L_t(\cdot) = L(\cdot) + Q(u_0, \cdot) + Q(\cdot, u_0) \\ g = f - L(u_0) - Q(u_0, u_0) \end{cases}$$

L'algorithme de résolution est présenté en quatre étapes : technique d'homotopie, méthode de perturbation, discrétisation en temps et discrétisation en espace. On verra que l'ordre de ces étapes a une certaine importance.

**a-Technique d'homotopie.** Elle consiste à introduire artificiellement un paramètre réel  $\varepsilon$ , sans dimension physique, dans le problème [8] de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + L_t(w) + \varepsilon Q(w, w) = g \\ w(t_0) = 0 \end{cases} \quad [9]$$

où la nouvelle inconnue  $w$  dépend de  $\varepsilon$ . La solution du problème initial [6] sera obtenue à partir de la solution du problème [9] en écrivant  $u = u_0 + w(\varepsilon = 1)$ .

**b-Technique de perturbation.** On cherche la solution  $w$  du problème [9] sous la forme d'une représentation en série entière par rapport au paramètre  $\varepsilon$  sous la forme :

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots + \varepsilon^p w_p \quad [10]$$

où les termes  $w_k$  ( $k=0,1,2,\dots,p$ ) sont les nouvelles inconnues qui sont indépendantes de  $\varepsilon$ . L'entier  $p$  désigne l'ordre de troncature de la série [10]. L'insertion du développement [10] dans [9] conduit à une succession de problèmes instationnaires linéaires :

Ordre 0

$$\begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial t} + L_t(w_0) = g \\ w_0(t_0) = 0 \end{cases} \quad [11]$$

Ordre  $k$  ( $1 \leq k \leq p$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial w_k}{\partial t} + L_t(w_k) = - \sum_{r=0}^{k-1} Q(w_r, w_{k-r-1}) \\ w_k(t_0) = 0 \end{cases} \quad [12]$$

Pour résoudre numériquement les problèmes linéaires [11] et [12], on discrétise le domaine temporel, on adopte un schéma implicite et on approche la dérivée première en temps, par exemple, par la méthode des différences finies décentrée à droite (Bathe, 1986).

**c-Discretisation temporelle.** L'intervalle de temps considéré  $[0, T]$  est subdivisé en  $N$  intervalles de temps  $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$  où  $\Delta t = T/N$  est le pas de temps. La méthode des différences finies décentrées à droite permet d'approcher la quantité  $\frac{\partial w}{\partial t}$  au temps  $t = (n+1)\Delta t$  par l'expression :

$$\frac{\partial w}{\partial t}((n+1)\Delta t) \approx \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \quad [13]$$

où  $w^k$  est la solution à l'instant  $k\Delta t$ . En substituant la relation [13] dans les équations [11] et [12], on obtient :

Ordre 0

$$\begin{cases} L_t(w_0^{n+1}) = w_0^n + \Delta t g^{n+1} \\ w_0^0 = 0 \end{cases} \quad [14]$$

Ordre  $k$  ( $1 \leq k \leq p$ )

$$\begin{cases} L_t(w_k^{n+1}) = w_k^n - \Delta t \sum_{r=0}^{k-1} Q(w_r^{n+1}, w_{k-r-1}^{n+1}) \\ w_k^0 = 0 \end{cases} \quad [15]$$

où  $L_t(\cdot)$  est l'opérateur tangent donné par  $L_t(\cdot) = I(\cdot) + \Delta t L_t(\cdot)$  et où  $I(\cdot)$  est l'opérateur identité.

**d-Discretisation spatiale.** La discrétisation spatiale des problèmes [14] et [15], par la méthode des différences finies par exemple, conduit aux problèmes matriciels suivants :

Ordre 0

$$\begin{cases} K_t W_0^{n+1} = W_0^n + \Delta t G^{n+1} \\ W_0^0 = 0 \end{cases} \quad [16]$$

Ordre k ( $1 \leq k \leq p$ )

$$\begin{cases} K_t W_k^{n+1} = W_k^n - \Delta t \sum_{r=0}^{k-1} q(W_r^{n+1}, W_{k-r-1}^{n+1}) \\ W_k^0 = 0 \end{cases} \quad [17]$$

où  $W_k^n$  est le vecteur discrétisé de  $w_k^n$ ,  $K_t$  est la matrice tangente (discrétisée de  $L_t$ ),  $G^{n+1}$  est le vecteur second membre à l'ordre zéro (discrétisé de  $g^{n+1}$ ),  $q(\dots)$  est le vecteur qui correspond à la discrétisation en espace de l'opérateur quadratique  $Q(\dots)$ . Il est à noter que c'est la même matrice tangente, au point initial,  $K_t$  qui est utilisée pour obtenir la solution  $W_k^n$  à tout instant n et à tous les ordres k. Finalement, la solution à tout instant  $U^n$ , est obtenue en calculant la série tronquée pour  $\varepsilon=1$  :

$$U^n = U_0 + W_0^n + W_1^n + \dots + W_p^n \quad [18]$$

**Domaine de validité des séries.** Le développement en série [10], tronqué à un ordre donné p, n'est valable que sur son domaine de convergence. Pour pouvoir attribuer à  $\varepsilon$  la valeur unité il faut que l'unité soit inférieure à ce rayon de convergence. Une approximation du rayon de convergence est obtenue en comparant deux solutions-séries à des ordres consécutifs p et p-1, voir par exemple (Cochelin *et al.*, 1994). Une telle définition implique que la représentation polynomiale cesse d'être valable lorsque la différence relative entre deux développements asymptotiques à des ordres consécutifs est plus petite qu'un paramètre de précision  $\delta$ . Cette définition conduit à une estimation du domaine de convergence qui dépend de l'ordre de troncature p, de la tolérance  $\delta$  et du temps t donné par le critère :



$$\varepsilon_{\text{validité}}(t) = \left( \delta \frac{\|W_1^n\|}{\|W_p^n\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad [19]$$

Les solutions acceptables correspondent alors à des  $\varepsilon_{\text{validité}}(t)$  supérieurs à l'unité. Les solutions-séries données par [10] sont donc valables jusqu'à un temps maximal  $t_{\text{max}} = n_{\text{max}} \Delta t$  qui est le plus grand  $t$  tel que :

$$\varepsilon_{\text{validité}}(t) \geq 1 \quad \text{pour} \quad t \in [0, t_{\text{max}}], \quad \varepsilon_{\text{validité}}(t_{\text{max}} + \Delta t) < 1 \quad [20]$$

**Construction de la solution complète – Méthode de continuation.** Une fois que  $t_{\text{max}}$  est évalué automatiquement par le critère [19] [20], il se peut que la solution ne soit décrite que sur une partie de l'intervalle  $[0, T]$ . Le reste de la solution est construit tronçon par tronçon par la méthode de continuation (Cochelin *et al.*, 1994). A chaque fin de pas, on redémarre avec de nouvelles conditions initiales calculées au temps maximal  $t_{\text{max}}$  du pas précédent, avec une nouvelle homotopie et donc avec une nouvelle matrice tangente  $K_t(U_0)$ .

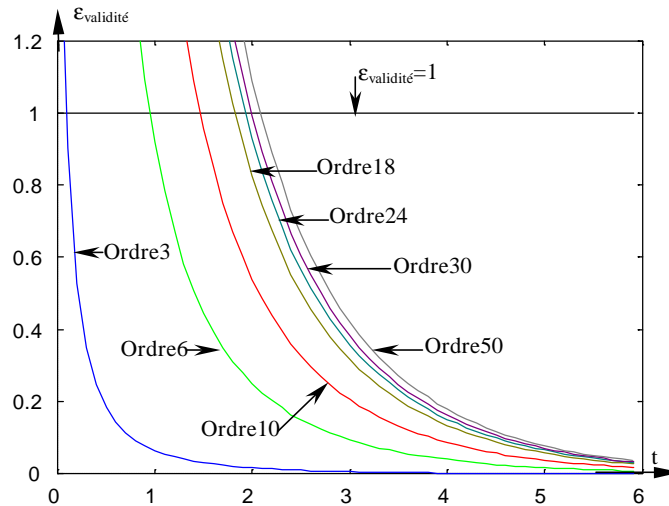
### 2.3. Application à la propagation d'ondes non linéaires

Les phénomènes de propagation d'ondes non linéaires sont modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles du type [6]. L'équation de Fisher en est un exemple. Elle apparaît dans la propagation des flammes, dans les problèmes de croissance biologique et dans la théorie des réacteurs nucléaires. C'est l'une des plus simples équations de diffusion non linéaire. Elle est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(u-1) = 0, \\ u(x, t=0) = \left( 1 + \exp\left(\frac{\mu x}{\sqrt{6}}\right) \right)^{-2}, \\ u(x = -\infty, t) = 0, \quad u(x = +\infty, t) = 1. \end{cases} \quad [21]$$

La solution analytique est connue :

$$u(x, t) = \left( 1 + \exp\left(\frac{\mu(x - \mu ct)}{\sqrt{6}}\right) \right)^{-2}. \quad [22]$$



**Figure 1.** Algorithme [16]-[18]. Premier grand pas de calcul. Evolution du critère de convergence  $\varepsilon_{\text{validité}}(t)$  en fonction du temps pour divers ordres  $\delta = 10^{-4}$

On cherchera la solution numérique sur un intervalle de temps fini  $[0, 20]$  et sur l'intervalle spatial  $[-150, 150]$ . Les valeurs numériques de  $\mu$  et  $c$ , considérées dans ce travail, sont :  $\mu = -1$ ,  $c = 5/\sqrt{6}$ . Le domaine spatial est discrétisé en 301 nœuds avec un pas d'espace  $\Delta x = 1$ . L'intervalle temporel est discrétisé en 200 pas de temps  $\Delta t = 0.1$ . Ces longueurs de pas permettent de retrouver la solution analytique avec une bonne précision.

Nous allons maintenant discuter l'intérêt du critère de validité [19] [20] en fonction des deux paramètres qui le définissent : l'ordre de troncature  $p$  et la tolérance  $\delta$ . Rappelons qu'on considère que la série converge tant que le nombre  $\varepsilon_{\text{validité}}(t)$  est supérieur à 1. D'après la figure 1, on constate que ces fonctions  $t \rightarrow \varepsilon_{\text{validité}}(t)$  sont décroissantes de l'infini à 0. Il existe donc, pour chaque ordre de troncature  $p$ , un intervalle de temps bien défini  $[0, t_{\text{max}}(p)]$  tel que le critère de convergence des séries est satisfait dans tout l'intervalle et pas au-delà. On note que ce nombre  $t_{\text{max}}(p)$  croît avec l'ordre et se stabilise vers  $t_{\text{max}} \approx 2$  pour des ordres supérieurs à 10. Par ailleurs, le nombre  $\varepsilon_{\text{validité}}(t)$  et donc  $t_{\text{max}}$  dépendent de la tolérance choisie  $\delta$ . Lorsque l'ordre est fixé,  $t_{\text{max}}$  diminue avec la tolérance, voir tableau 1. Cette décroissance est forte pour les petits ordres et devient faible pour les grands ordres (au-delà de 18) : cela est dû au fait qu'une série tronquée à un ordre élevé donne une excellente approximation à l'intérieur du rayon de convergence. Notons que pour les très petits ordres ( $p = 2$  ou 3), le processus ne converge pas dès

le premier pas : il faudra donc choisir un ordre minimum pour assurer la convergence dans un tel cas.

$\delta = 10^{-2}$		$\delta = 10^{-4}$		$\delta = 10^{-6}$	
Ordre	$t_{\max}$	Ordre	$t_{\max}$	Ordre	$t_{\max}$
2	0.2	2	0.	2	0.
3	0.8	3	0.1	3	0.
6	1.6	6	1.	6	0.6
10	2.	10	1.5	10	1.1
16	2.1	16	1.8	16	1.6
18	2.1	18	1.9	18	1.6
24	2.2	24	2.	24	1.8
30	2.2	30	2.	30	1.9
50	2.2	50	2.1	50	2.

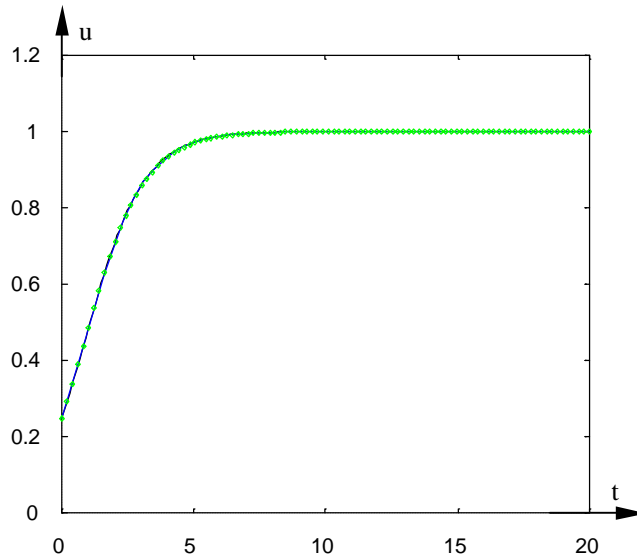
**Tableau 1.** Algorithme [16]-[18]. Premier grand pas de calcul. Comparaison des valeurs de  $t_{\max}$  pour divers ordres et pour différentes tolérances

Le critère de validité [19] [20] donne une estimation indirecte de la précision du calcul, puisqu'il s'appuie sur une estimation de la taille relative du dernier terme de la série. Ce critère indirect a été choisi en raison de sa simplicité et aussi parce qu'il a montré son efficacité dans le cadre des méthodes asymptotiques numériques (Cochelin *et al.*, 1994). Pour que ce critère ait un sens, il faut que le choix d'une tolérance  $\delta$  puisse être relié plus ou moins directement à la taille du résidu de l'équation discrétisée en temps et en espace. Cette relation tolérance-résidu est présentée sur la figure 3. Il est clair qu'on peut obtenir un résidu aussi petit que l'on veut avec une tolérance  $\delta$  assez petite.

Passons maintenant à l'analyse du processus de continuation. La technique consiste à réactualiser la solution initiale  $U_0$  en  $t = t_{\max}$ , puis l'opérateur tangent  $K_t$  et enfin la nouvelle série caractérisée par [16] [17] [18]. Cet algorithme fonctionne donc avec deux types de pas de temps : les « petits pas »  $\Delta t$  qui sont les pas de temps classiques, fixés *a priori* ; « les grands pas »  $\Delta t_{\max}$  qui correspondent à la réactualisation de tout l'algorithme asymptotique numérique. Ces grands pas sont variables et déterminés *a posteriori*, comme décrit précédemment. Rappelons aussi qu'il ne faut qu'une seule triangulation de matrice pour un grand pas.

Pour cet exemple, on choisira un ordre  $p = 18$  et une tolérance inférieure à  $10^{-4}$ . L'allure de la réponse  $u(t)$  sur l'intervalle  $[0,20]$  est présentée à la figure 2. Nous n'avons constaté aucune différence significative entre la solution asymptotique-numérique, la solution analytique et la solution numérique calculée par la méthode de Newton-Raphson. Il faut 400 triangulations de matrices pour ce calcul par Newton-Raphson : c'est énorme pour un problème aussi simple. Avec la méthode

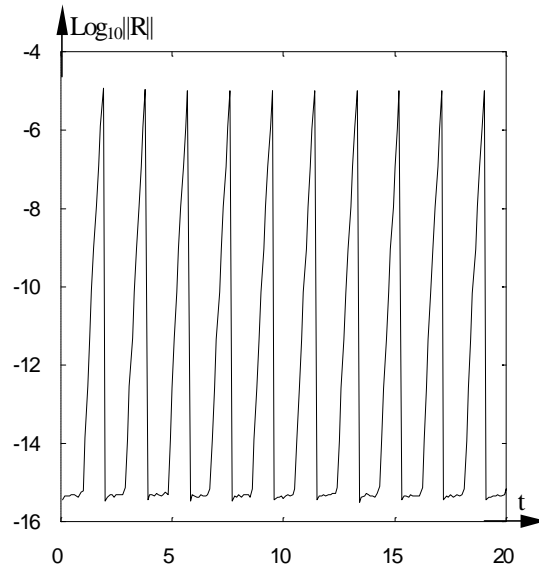
asymptotique-numérique, ce nombre de triangulations est réduit à 11 pour  $\delta = 10^{-4}$  et 13 pour  $\delta = 10^{-6}$ , ce qui correspond respectivement à 11 et 13 grands pas. Pour ces deux calculs, les résidus maximaux sont respectivement de l'ordre de  $10^{-5}$  et  $10^{-8}$  et ils ne varient quasiment pas au cours des grands pas : voir figure 3. Cela montre la pertinence du critère [19] [20].



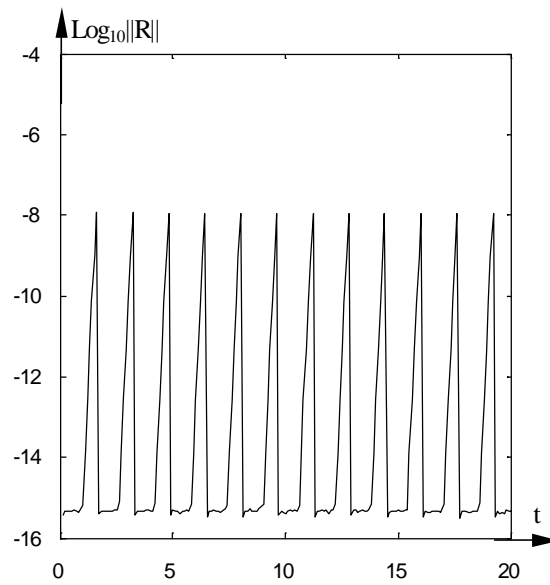
**Figure 2.** Allure de la courbe  $u(0,t)$  en fonction du temps

Les calculs qui viennent d'être présentés ont été obtenus grâce à l'algorithme [16] [19] [20], qui est le même que celui proposé par Cochelin et Compain (Cochelin *et al.*, 2000) pour les problèmes de dynamique des structures. Ces calculs restent chers en comparaison avec les méthodes itératives, largement utilisées pour ce genre de problèmes, puisqu'il nous a fallu calculer 19 vecteurs par petit pas et inverser une dizaine de matrices.

Est-il possible d'établir des algorithmes plus efficaces qui permettent en particulier de ne trianguler qu'une seule matrice au cours du processus ?



**Figure 3a.** *Algorithme [16]-[20]. Calcul avec continuation. Qualité de la solution-série tronquée à l'ordre 18 a) : tolérance  $\delta = 10^{-4}$*



**Figure 3b.** *Algorithme [16]-[20]. Calcul avec continuation. Qualité de la solution-série tronquée à l'ordre 18 b) : tolérance  $\delta = 10^{-6}$*

### 3. Un algorithme de linéarisation par rapport à l'instant initial

Pour répondre à cette question, nous proposons dans ce travail une variante de l'algorithme de Cochelin et Compain présenté précédemment. Ce nouvel algorithme est établi en appliquant la transformation d'homotopie et la technique de perturbation sur le problème discrétisé en temps et non sur l'équation différentielle. On peut dire aussi que cela revient à inverser l'ordre de la discrétisation en temps et des étapes d'homotopie et de perturbation. Comme précédemment, on travaille avec l'inconnue  $v = u - u_0$  où  $u_0$  est la solution initiale, c'est-à-dire la solution au début d'un « grand pas ». La matrice à inverser restera donc la même : ce sera la matrice tangente à cet instant initial. C'est pourquoi nous appelons ce processus « algorithme de linéarisation par rapport à l'instant initial ».

#### 3.1. Définition de l'algorithme

Pour présenter ce nouvel algorithme, nous suivons donc le plan suivant :

- a-Discretisation en temps
- b-Technique d'homotopie
- c-Méthode de perturbation
- d-Discretisation en espace.

Nous nous plaçons ici dans le cas du schéma d'Euler implicite, mais on pouvait aussi bien appliquer les mêmes idées pour d'autres schémas, comme celui de Crank-Nicolson (Braikat, 2000) .

**a-Discretisation en temps.** On applique [13] à l'équation différentielle [6], en tenant compte du changement de variable [7]. On obtient ainsi le problème non linéaire vérifié par la solution  $v^{n+1}$  au nouvel instant  $t^{n+1}$  .

$$\begin{cases} L_t v^{n+1} + \Delta t Q(v^{n+1}, v^{n+1}) = v^n + \Delta t g^{n+1} \\ v^0 = 0 \end{cases} \quad [23]$$

où l'opérateur tangent  $L_t$  est le même que pour l'algorithme précédent, voir paragraphe 2.2.

**b-Technique d'homotopie.** On définit une transformation d'homotopie en suivant le même principe que précédemment : on introduit le nombre  $\varepsilon$  devant le terme non linéaire. Cela conduit à :

$$\begin{cases} L_t w^{n+1} + \varepsilon \Delta t Q(w^{n+1}, w^{n+1}) = v^n + \Delta t g^{n+1} \\ w^0(\varepsilon) = 0 \end{cases} \quad [24]$$

De cette manière, la solution  $w^{n+1}(\epsilon)$  passe de la solution du problème linéaire ( $\epsilon=0$  dans [24]) à la solution  $v^{n+1}$  du problème [23]. En effet pour  $\epsilon=1$ , [24] coïncide avec [23].

**c-Méthode de perturbation.** Elle consiste toujours à chercher la solution du problème [24] sous la forme d'une représentation en série entière tronquée à un ordre  $p$  par rapport au paramètre  $\epsilon$  :

$$w^{n+1}(\epsilon) = w_0^{n+1} + \epsilon w_1^{n+1} + \dots + \epsilon^p w_p^{n+1} \tag{25}$$

Les termes  $w_k^{n+1}$  ( $k=0,1,2,\dots,p$ ) seront les nouvelles inconnues. L'utilisation du développement [25] transforme le problème [24] en une succession de  $p+1$  problèmes linéaires ayant le même opérateur tangent  $L_t(\cdot)$  :

Ordre 0

$$\begin{cases} L_t w_0^{n+1} = v^n + \Delta t g^{n+1} \\ w_0^0 = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Ordre  $k(1 \leq k \leq p)$

$$\begin{cases} L_t w_k^{n+1} = -\Delta t \sum_{r=0}^{k-1} Q(w_r^{n+1}, w_{k-r-1}^{n+1}) \\ w_k^0 = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Si ce nouvel algorithme utilise le même opérateur tangent que le précédent, il présente une différence très importante dans le second membre. En effet, la solution à l'instant précédent  $v^n$  apparaît complètement dans le second membre [26] à l'ordre zéro. Dans la formule analogue [14] de l'algorithme précédent, il n'y avait que le premier terme  $w_0^n$  du développement en séries de  $v^n$ . Ainsi si la série  $v^n = w_0^n + \dots + w_p^n$  converge difficilement, l'ancien algorithme récupérait cette convergence lente à l'instant suivant. Cela ne pourrait que dégrader la convergence des séries. Il n'en est donc pas de même avec le nouvel algorithme présenté ici.

**d-Discretisation spatiale.** L'application de la technique de discretisation par différences finies aux problèmes [26] et [27] donne des équations de la forme :

Ordre 0

$$\begin{cases} K_t W_0^{n+1} = V^n + \Delta t G^{n+1} \\ W_0^0 = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Ordre  $k(1 \leq k \leq p)$

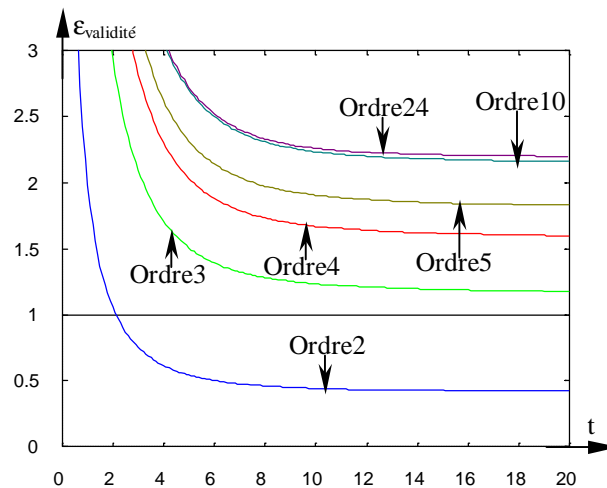
$$\begin{cases} \mathbf{K}_t \mathbf{W}_k^{n+1} = -\Delta t \sum_{r=0}^{k-1} \mathbf{q}(\mathbf{W}_r^{n+1}, \mathbf{W}_{k-r-1}^{n+1}) \\ \mathbf{W}_k^0 = 0 \end{cases} \quad [29]$$

Une fois que les  $\mathbf{W}_k^n$  sont calculés numériquement, la solution du problème [6] à l'instant  $t^{n+1}$  est obtenue en égalisant  $\varepsilon$  à l'unité :

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U}_0 + \mathbf{W}_0^n + \mathbf{W}_1^n + \dots + \mathbf{W}_p^n \quad [30]$$

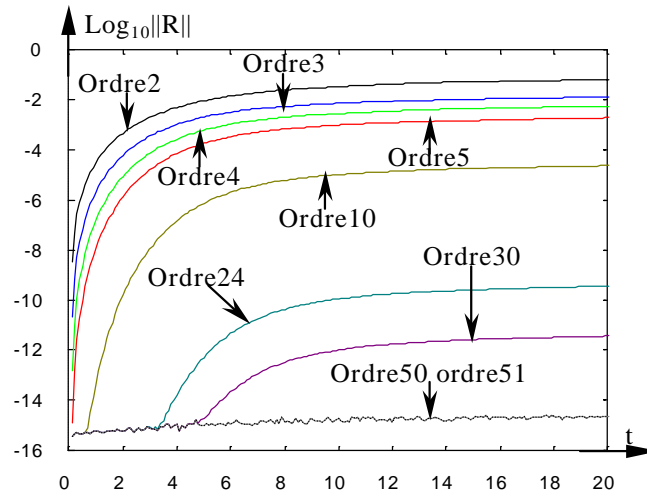
### 3.2. Application numérique

Pour tester l'efficacité de cet algorithme, on reprend l'exemple de l'équation de Fisher en gardant les mêmes données et la même grille spatio-temporelle. Comme précédemment, la fonction  $\varepsilon_{\text{validité}}(t)$  est une fonction décroissante du temps, mais avec des asymptotes strictement positives (figure 4). En particulier, on voit que pour des ordres supérieurs ou égaux à 3, ce nombre  $\varepsilon_{\text{validité}}(t)$  reste nettement supérieur à 1 sur tout l'intervalle étudié. Cela signifie que cet algorithme permet d'obtenir toute la réponse  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq 20$  avec une seule inversion de matrice.



**Figure 4.** Algorithme [28]-[30]. Variation de  $\varepsilon_{\text{validité}}(t)$  en fonction du temps pour divers ordres. Au-delà de l'ordre 3, il n'est pas nécessaire d'utiliser le processus de continuation





**Figure 5.** *Algorithme [28]-[30]. Courbe résidu en fonction du temps pour divers ordres*

On a également représenté sur la figure 5, l'évolution du résidu de l'équation discrétisée au cours du temps. Pour des ordres assez petits (3 ou 4), le résidu obtenu est acceptable sur tout l'intervalle ( inférieur à  $10^{-2}$ ). De plus, on constate qu'on peut obtenir une précision aussi forte que l'on veut en augmentant l'ordre de troncature.

Ce nouvel algorithme est donc nettement plus efficace que le précédent puisqu'on n'a besoin que d'une seule inversion de matrice et aussi de beaucoup moins de seconds membres.

On notera néanmoins que ces algorithmes d'ordre élevé peuvent conduire à un nombre important de calculs de seconds membres. Par exemple, si on veut une précision de  $10^{-5}$  pour le résidu, il faut un ordre 10, soit  $200 \times 10 = 2000$  seconds membres à calculer. Il serait donc raisonnable de choisir un ordre relativement petit (3 ou 4) et d'appliquer la méthode de continuation : quelques inversions de matrice serait nécessaires, mais le nombre de seconds membres serait fortement réduit.

Pour essayer d'améliorer encore ces algorithmes, nous allons en discuter de nouvelles variantes, qui évitent l'inversion de matrices tangentes, en introduisant une transformation d'homotopie de type [4].

#### 4. Des algorithmes basés sur une matrice arbitraire $K^*$

Ces nouveaux algorithmes sont destinés à introduire une certaine souplesse dans le choix des matrices qui seront inversées à chaque « grand pas ». Pour cela, on introduit une matrice  $K^*$  arbitraire. Cette matrice peut être une matrice obtenue par discrétisation d'un opérateur tangent calculé à un instant précédent, comme pour l'algorithme décrit au paragraphe 3. Elle peut être aussi une matrice facile à inverser comme cela se fait couramment pour les résolveurs itératifs de problèmes linéaires. Une première version de cet algorithme a été présentée récemment et appliquée à l'équation de Korteweg de Veries (Jamal *et al.*, 2002).

##### 4.1. Définition des algorithmes

Le schéma de ces algorithmes est légèrement modifié par rapport au précédent. On introduit la discrétisation en espace avant l'homotopie et la perturbation, pour permettre une plus grande souplesse dans le choix de la matrice  $K^*$ .

- a- Discrétisation en temps
- b- Discrétisation en espace
- c- Technique d'homotopie avec introduction d'une matrice  $K^*$
- d- Méthode de perturbation

**a- Discrétisation en temps.** On se contente ici d'introduire un petit incrément  $v = u^{n+1} - u^n$  et non plus un grand incrément  $v = u^{n+1} - u_0$ . Avec cette nouvelle variable  $v$ , le schéma [13] appliqué à l'équation [6] conduit à :

$$L_t^n v + \Delta t Q(v, v) = \Delta t h^{n+1} \quad [31]$$

où  $L_t^n$  est l'opérateur tangent à l'instant actuel  $t^n$  et où  $h^{n+1}$  est une sorte de résidu à l'instant  $t^n$  :

$$\begin{cases} L_t^n(\cdot) = I(\cdot) + \Delta t (L(\cdot) + Q(u^n, \cdot) + Q(\cdot, u^n)) \\ h^{n+1} = f^{n+1} - L(u^n) - Q(u^n, u^n) \end{cases}$$

**b- Discrétisation en espace.** La discrétisation de [31] par la méthode des différences finies conduit à une équation non linéaire discrétisée de la forme :

$$K_t^n V + \Delta t q(V, V) = \Delta t H^{n+1} \quad [32]$$

où  $V$ ,  $K_t^n$ ,  $q(\cdot, \cdot)$  et  $H^{n+1}$  sont les discrétisés de  $v$ ,  $L_t^n$ ,  $Q(\cdot, \cdot)$  et  $h^{n+1}$ .

**c-Technique d'homotopie avec introduction d'une matrice arbitraire  $K^*$ .** Pour éviter la triangulation de la matrice tangente  $K_t^n$  à chaque instant, on utilise l'astuce décrite dans l'introduction en définissant une homotopie de type [4]. Soit  $K^*$  une matrice arbitraire. On définit alors la transformation d'homotopie de la manière suivante :

$$K^*W + \varepsilon(K_t^n - K^*)W + \Delta t q(W, W) = \varepsilon \Delta t H^{n+1} \quad [33]$$

La nouvelle inconnue  $W(\varepsilon)$  passera donc de  $W=0$  pour  $\varepsilon=0$  à la solution  $V$  de [32] pour  $\varepsilon=1$ .

**d-Méthode de perturbation.** On cherche la solution du problème [33] sous la forme d'un développement en séries entières tronquées à l'ordre  $p$  par rapport au paramètre  $\varepsilon$

$$W(\varepsilon) = \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots + \varepsilon^p W_p \quad [34]$$

L'injection de la relation [34] dans [33] conduit à la séquence suivante de problèmes linéaires ayant tous la même matrice  $K^*$  :

Ordre 1

$$K^*W_1 = \Delta t H^{n+1} \quad [35]$$

Ordre  $k$  ( $2 \leq k \leq p$ )

$$K^*W_k = (K^* - K_t^n)W_{k-1} - \Delta t \sum_{r=1}^{k-1} q(W_r, W_{k-r}) \quad [36]$$

Finalement la solution  $U^{n+1}$  à l'instant  $t^{n+1}$  est écrite de la manière suivante :

$$U^{n+1} = U^n + W_1 + W_2 + \dots + W_p \quad [37]$$

On notera que le calcul des vecteurs  $W_i$  se fait en inversant la seule matrice  $K^*$ .

#### 4.2. Application numérique

Pour étudier l'efficacité de ces algorithmes, on reprend l'équation de Fisher avec les mêmes données et la même grille. On s'intéressera en particulier aux choix possibles pour la matrice arbitraire  $K^*$ . Trois matrices seront retenues : matrice

tangente en  $U=0$  ( $K^* = K_t(0)$ ), matrice tangente à l'instant initial ( $K^* = K_t(U_0)$ ) et matrice diagonale de  $K_t(0)$ . Les deux premiers choix conduisent à des algorithmes qui semblent comparables à l'algorithme de linéarisation par rapport à l'instant initial. Le choix d'une matrice diagonale peut permettre de réduire de manière très forte le coût de calcul, comme pour un algorithme explicite.

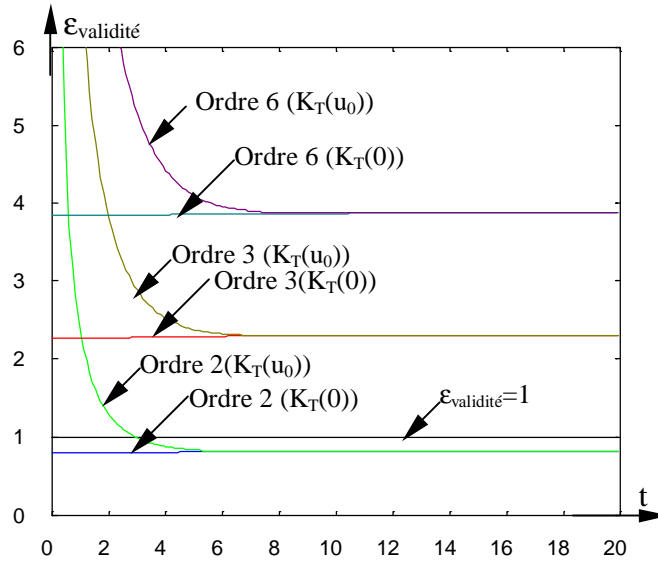
L'efficacité de ces algorithmes peut être analysée à partir des mêmes critères que précédemment : évolution du nombre  $\varepsilon_{\text{validité}}(t)$  et du résidu en fonction du temps, voir figures 6 et 7. Le nombre  $\varepsilon_{\text{validité}}(t)$  est calculé pour une tolérance  $\delta = 10^{-1}$ . On constate que cet algorithme converge avec une seule inversion de matrice ( $K_t(0)$  ou  $K_t(U_0)$ ) et avec un ordre très petit (2 ou 3 pour un résidu maximum de  $10^{-3}$  ou  $10^{-4}$ ). Il n'y a pas de différence significative entre ces deux matrices  $K^*$ , sauf au début du processus où la matrice tangente au point initial est plus performante, ce qui est bien compréhensible. Ces algorithmes sont donc au moins aussi efficaces que celui du paragraphe 3, mais la liberté dans la définition de la matrice  $K^*$  introduit une plus grande flexibilité.

Il reste à comparer ces algorithmes à la méthode itérative, qui est souvent utilisée pour la résolution des problèmes de propagation d'ondes non linéaires. Cette méthode revient à une définition itérative de la solution  $U^{n+1}$  au temps  $t^{n+1}$ , comme limite d'une séquence  $U_k^{n+1}$  et avec un critère d'arrêt. Elle est définie comme suit :

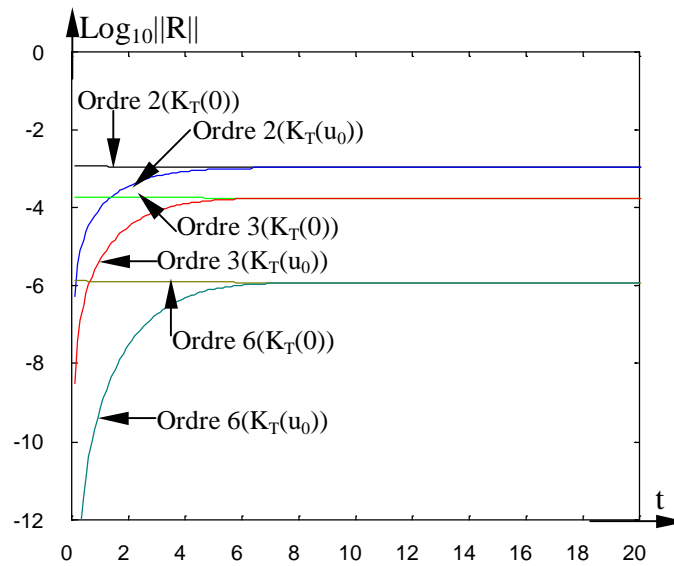
$$[I + \Delta t K(0)]U_k^{n+1} = U^n + \Delta t G(U_{k-1}^{n+1})$$

$$\frac{\|U_k^{n+1} - U_{k-1}^{n+1}\|}{\|U_k^{n+1}\|} \leq \text{tol}$$

Les résultats obtenus par cette technique de référence sont comparés à ceux de l'algorithme proposé où  $K^*$  est soit la matrice  $K_t(0)$ , soit sa diagonale. Ces résultats sont reportés sur le tableau 1. Dans les trois cas, la réponse est obtenue en un seul grand pas, c'est à dire avec une seule inversion de matrice. Dans le cas de la matrice diagonale, le coût de l'inversion est bien sûr négligeable. Le plus important est donc le nombre de seconds membres à traiter pour une qualité de solution donnée. Le point le plus surprenant est la grande efficacité de l'algorithme avec  $K^*$  diagonale qui converge mieux que les deux autres. On note aussi qu'on peut obtenir une très grande précision en jouant sur l'ordre ou la tolérance.



**Figure 6.** Algorithme [35]-(37). Un seul grand pas de calcul. Variation de  $\epsilon_{\text{validité}}$  en fonction du temps  $t$  aux ordres 2, 3 et 6



**Figure 7.** Algorithme [35]-(37). Un seul grand pas de calcul. Courbe résidu en fonction du temps  $t$ , aux ordres 2, 3 et 6

$K^* = K_t(0)$			$K^* = \text{DIAG}(K_t(0))$			MI		
Ordre	SM	$\ R\ $	Ordre	SM	$\ R\ $	tol	SM	$\ R\ $
1	200	$10^{-2.2}$	1	200	$10^{-2.5}$	$10^{-1}$	200	$10^{-2.5}$
2	400	$10^{-2.9}$	2	400	$10^{-3.5}$	$10^{-2}$	203	$10^{-3}$
3	600	$10^{-3.7}$	3	600	$10^{-5}$	$10^{-3}$	405	$10^{-3.7}$
4	800	$10^{-4.4}$	4	800	$10^{-6}$	$10^{-4}$	800	$10^{-5}$
5	1000	$10^{-5.2}$	5	1000	$10^{-7}$	$10^{-5}$	1000	$10^{-5.9}$
6	1200	$10^{-5.9}$	6	1200	$10^{-8}$	$10^{-6}$	1204	$10^{-6.6}$
7	1400	$10^{-6.6}$	7	1400	$10^{-9.17}$	$10^{-7}$	1600	$10^{-8}$
8	1600	$10^{-7.3}$	8	1600	$10^{-10.18}$	$10^{-8}$	1803	$10^{-8.7}$
9	1800	$10^{-7.9}$	9	1800	$10^{-11.16}$	$10^{-9}$	2150	$10^{-9.4}$
10	2000	$10^{-8.6}$	10	2000	$10^{-12}$	$10^{-10}$	2402	$10^{-10.7}$

**Tableau 2.** Comparaison entre deux algorithmes basés sur une matrice arbitraire  $K^*$  et la méthode itérative (MI)

## 5. Conclusion

Nous avons proposé, dans ce travail, des algorithmes basés sur les techniques utilisées dans la MAN, qui combinent une technique d'homotopie, des techniques de perturbation et des procédures de discrétisation en temps et en espace, pour la résolution de problèmes instationnaires non linéaires. Ces algorithmes diffèrent entre eux selon le choix de l'homotopie et selon la discrétisation en temps. L'originalité de ces algorithmes est la technique de résolution du problème non linéaire issu de la discrétisation en temps. On a montré que la technique de perturbation couplée avec une homotopie permet d'inverser une matrice plus ou moins arbitraire. Cela introduit beaucoup de souplesse dans la définition de l'algorithme. En particulier le choix d'une matrice diagonale conduit à un algorithme implicite dont le coût de calcul pourrait être proche de celui d'un algorithme explicite. Notons aussi qu'il existe des techniques pour accélérer la convergence, comme par exemple, les approximants de Padé (Mallil *et al.*, 2000), qui n'ont pas été utilisées ici.

Le test réalisé a permis d'établir que les algorithmes proposés sont robustes et efficaces. Le résultat le plus intéressant est leur capacité d'appliquer un schéma implicite avec très peu de matrices à triangulariser. Ceci peut être intéressant pour des systèmes à grand nombre de degrés de liberté et pour les non-linéarités fortes comme en dynamique des structures.

L'exemple de l'équation de Fisher peut être considéré comme un test relativement facile du point de vue de la non-linéarité. Les algorithmes proposés devraient être réexaminés pour des cas plus difficiles, par exemple en dynamique des structures ou en mécanique des fluides. Toutefois, il a été clairement démontré

que les algorithmes présentés aux paragraphes 3 et 4 sont beaucoup plus performants que celui de (Cochelin *et al.*, 2000).

#### Remerciements

Ce travail est soutenu par le Moroccan National Center of Coordination and Planning of Scientific and Technique Research (PARS, SPI : 016).

#### 6. Bibliographie

- Allgower E.L., Georg K., *Numerical continuation methods. An Introduction*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- Argyris J., Mlejnek H.P., *Texts on Computational Mechanics. Dynamics of structures*, North Holland, Amsterdam, 1991.
- Bathe K.J., Wilson E.L., *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- Bathe K.J., *Finite element procedures*, Prentice-Hall, New Jersey, 1986.
- Berrahma-Chekroun N., Fafard M., Gervais J.J., "Resolution of the transient dynamic problem with arbitrary load using the asymptotic method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 243., 2001, p. 475-501.
- Braikat B., Quelques contributions dans l'application de la méthode asymptotique numérique en mécanique, Doctorat d'Etat, Faculté Sciences Ben M'Sik, Casablanca, Maroc, 2000.
- Cadou J.M., Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., "ANM for instationary Navier-Stokes equations and with Petrov-Galerkin formulation", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 50,2001, p.825-845.
- Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., "The Asymptotic Numerical Method : an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics", *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 3, 1994, p. 281-297.
- Cochelin B., Compain C., "An asymptotic numerical method for non-linear transient dynamics", *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 9, 2000, p. 113-128.
- Crisfield M.A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley, Chichester, Vol. 2, 1997.
- Dale-Martin E., "Technique for accelerating iterative convergence in numerical integration with application in transonic aerodynamics", H. Cabannes éditeur, *Lectures Notes in Physics*, Vol. 47, Springer-Verlag, Berlin, p. 123-139, 1976.
- Damil N., Potier-Ferry M., "A new method to compute perturbed bifurcation, Application to the buckling of imperfect elastic structures", *International Journal of Engineering Sciences*, Vol. 28, 1990, p. 943-957.
- Damil N., Potier-Ferry M., Najah A., Chari R., Lahmam H., "An iterative method based upon Padé approximants", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1999, p. 701-708.

- Fafard M., Henchi K., Gendron G., Ammar S., "Application of an asymptotic method to transient dynamic problems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 208, 1997, p. 73-99.
- Fellah S., Braikat B., Jamal M., Damil N., "An approach based on time expansion, Padé approximants and Shanks transformation for linear structural dynamic problems", to appear in *Journal Maghrébin de Physique*, 2002.
- Fletche C.A.I., *Computational techniques for fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- Fornberg B., Whitham G.B., "A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Ser. A*, Vol. 289, 1978, p. 373-404.
- Gérardin M., Rixen D., *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*, Masson, Paris, 1993.
- Iskandar L., "New numerical solution of Korteweg-de Vries equation", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 5, 1989, p. 215-221.
- Jamal M., Contribution à la résolution de quelques problèmes de la physique non linéaire, Doctorat d'Etat, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Casablanca, Maroc, 1998.
- Jamal M., Braikat B., Boutmir S., Damil N., Potier-Ferry M., "A high order implicit algorithm for solving instationary non-linear problems", *Computational Mechanics*, Vol. 28, n° 5, 2002, p. 375-380.
- Mallil E.H., Lahmam H., Damil N., Potier-Ferry M., "An iterative process based on homotopy and perturbation techniques", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, 2000, p. 1845-1858.
- Mordane S., Chagdali M., Damil N., "Calcul d'un problème à surface libre par une méthode de perturbation et la méthode des différences finies", *Deuxième Congrès de Mécanique*, Casablanca, Maroc, Vol. I, 1995, p. 471-476.
- Nayfeh A.H., *Perturbation methods*, John Wiley, New York, 1973.
- Nayfeh A.H., Mook D.T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley, New York, 1979.
- Nayfeh A.H., *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley, New York, 1981.
- Potier-Ferry M., Damil N., Braikat B., Descamps J., Cadou J.M., Cao H.L., Elhage-Hussein A., "Traitement des fortes non linéarités par la méthode asymptotique numérique", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 324, série I-b, 1997, p. 171-177.
- Smith A., Silvester D., "Implicit algorithms and their linearization for transient incompressible Navier-Stokes equations", *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 17, p. 527-545, 1997.
- Taha R.T., Ablowitz M.J., "Analytical and numerical aspects of certain non-linear evolution equations II. Numerical, Nonlinear Schrodinger equation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 55, 1984, p. 203-230.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The finite element method, Solid and Fluid Mechanics and non-linearity*, 4 ed., Mac Graw-Hill, London, Vol. 2, 1987.