
Modèle d'endommagement à effet retard

Etude numérique et analytique de l'évolution de la longueur caractéristique

Arnaud Suffis — Alain Combescure

Laboratoire de Mécanique des Solides, INSA de Lyon

Bat. 304, 20 avenue Albert Einstein

F-69621 Villeurbanne cedex

arnaud.suffis@insa-lyon.fr

alain.combescure@insa-lyon.fr

RÉSUMÉ. Ce papier étudie sur un cas unidimensionnel le modèle d'endommagement à effet de retard. Il est connu que ce type de modèle évite la localisation et donc la dépendance au maillage dans les simulations numériques. Nous donnons une solution analytique au problème de la localisation de l'endommagement dans une barre encastrée à son origine, constituée d'un matériau élastique endommageable et soumise à un saut de contrainte à son extrémité. On peut ainsi calculer pour un matériau donné analytiquement la taille de la zone de localisation qui est fonction du saut de contrainte appliqué. On montre également que la solution obtenue précédemment est la limite de résultats numériques lorsque la taille de maille tend vers 0. Ce modèle est ensuite couplé à un comportement élastoplastique ou élasto visco plastique : on montre numériquement que la propriété d'indépendance de la zone de localisation au maillage est encore vérifiée.

ABSTRACT. This paper studies the one dimensional time delay damage model. It is well known that this type of model prevents the mesh dependency localisation. The model problem on a clamped uniaxial bar submitted to a step load at its extremity is studied here. When the material behaviour is elastic with damage, an analytical solution is produced which gives the size of the localisation as a function of the step load. This solution is proved to be the limit of a discrete finite element solution when the mesh size is smaller and smaller. The model is then extended to elasto plastic and viscoplastic cases and here again the localisation zone is proven numerically to be independent of the mesh size.

MOTS-CLÉS: Localisation, endommagement, effet retard, analytique, element fini, plastique, viscoplastique, dynamique.

KEYWORDS: Localisation, damage, time delay, analytical, finite element, plasticity, viscoplasticity, dynamic.

1. Introduction

La prise en compte de l'endommagement lors de simulations numériques requiert une attention particulière ; on constate en effet une dépendance des résultats vis-à-vis du maillage choisi. Ce problème, dit de localisation, n'est pas spécifique au phénomène d'endommagement, puisqu'on le rencontre notamment dans le cadre de matériau plastique parfait ou encore de matériau à écrouissage négatif pour lesquels des modèles tels que le modèle du second gradient ou le modèle de matériau dépendant du taux de déformation plastique ont d'ores et déjà été développés ([5], [8], [9]).

Nous nous attachons dans cet article à présenter l'ensemble des résultats obtenus et des analyses menées avec le modèle d'endommagement à effet retard. Ce modèle a été développé au Laboratoire de mécanique et de technologie de Cachan ([1], [3]) afin de résoudre les problèmes de localisation, conséquence de l'endommagement, dans le cadre précis de la dégradation des composites stratifiés.

La seconde section de ce papier concernera donc le modèle d'endommagement à effet retard généralisé à n'importe quel type de matériau endommageable ; après avoir mis en place un modèle d'endommagement linéaire classique et rapidement présenté les fondements du modèle, on s'attachera en particulier, à détailler ses influences sur le comportement et à voir en quoi il permet d'éviter la localisation.

Une fois le modèle à effet retard assimilé, des simulations dynamiques de traction de poutre 1D sont réalisées et les résultats comparés à un modèle analytique dont la mise en place est également présentée. Les résultats sont interprétés en termes de longueur caractéristique qui correspond à la taille de la zone pour laquelle l'endommagement vaut 1.

Enfin, dans une dernière section, on s'intéressera à l'évolution de l'énergie dissipée qui est quadratique dans le cas de notre modèle. Cependant, certains auteurs ont étudié des modèles pour lesquels l'évolution de l'énergie dissipée est linéaire. Nous proposons donc ici une limitation de la contrainte qui permettra d'obtenir cette linéarité.

2. Le modèle d'endommagement à effet retard

Dans cette section, on étudie le modèle d'endommagement à effet retard pour un matériau élastique endommageable dont la loi d'évolution d'endommagement est linéaire (abstraction faite de l'effet retard). Le modèle à effet retard est cependant efficace quelle que soit la nature du comportement du matériau (élastique endommageable, élasto-plastique endommageable, viscoplastique endommageable, etc.) et quelle que soit la loi d'évolution de l'endommagement (linéaire ou autre...).

2.1. Loi d'évolution d'endommagement classique

2.1.1. Equations du problème

On considère donc ici un matériau élasto-plastique endommageable de module d'Young E , de masse volumique ρ . L'exemple qui sera traité est un exemple unidimensionnel avec une seule variable d'endommagement d . La loi d'évolution de l'endommagement est définie ici à partir du taux de restitution d'énergie Y et est linéaire entre une valeur seuil Y_0 et une valeur critique Y_c .

On considérera par ailleurs que l'endommagement ne s'effectue qu'en traction, ce qui nous amène à faire la distinction entre traction et compression au niveau de la loi de comportement. L'ensemble des équations du problème est donné sur la figure 1. Les crochets correspondent à la section positive de la quantité considérée.

2.1.2. Exemple de traction dynamique

2.1.2.1. Traction d'un unique élément

On effectue une simulation de traction sur un unique élément afin d'observer la loi de comportement. La courbe obtenue est donnée sur la figure 2 ; elle est unique quelle que soit la vitesse de la sollicitation.

On peut remarquer par ailleurs que la contrainte maximale est atteinte pour un endommagement valant 0.5 et que l'énergie dissipée par élément de volume jusqu'à la rupture est indépendante de la vitesse de sollicitation et est égale à (dans le cas où le taux de restitution seuil est nul) :

$$E_{\text{diss}} = \frac{Y_c}{3}$$

2.1.2.2. Traction de poutre

L'exemple considéré maintenant est le problème classique de traction de poutre unidimensionnelle encastree à une de ses extrémités (proposé notamment par BAZANT [5] ; on trouve par ailleurs des exemples du même genre en cisaillement [8]), il est présenté figure 3. Avec le modèle classique, l'endommagement se concentre de manière systématique dans un seul et unique élément, et ce quels que soient le maillage et la vitesse de sollicitation ; ce phénomène traduit une dépendance au maillage qui se doit d'être évitée.

$$\sigma_{\text{eff}} = E\varepsilon$$

$$\sigma = (1-d)\langle\sigma_{\text{eff}}\rangle + \langle-\sigma_{\text{eff}}\rangle = E(1-d)\langle\varepsilon\rangle + E\langle-\varepsilon\rangle$$

$$E_D = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle\sigma\rangle^2}{E(1-d)} + \frac{\langle\sigma\rangle^2}{E} \right]$$

$$Y = \left. \frac{\partial E_D}{\partial d} \right|_{\sigma=\text{Cste}} = \frac{\langle\sigma\rangle^2}{2E(1-d)^2} = \frac{E\langle\varepsilon\rangle^2}{2}$$

$$f(Y) = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}}$$

$$\begin{cases} d = \langle \sup_{\tau \leq t} (f(Y_\tau)) \rangle & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sin on} \end{cases}$$

Figure 1. Equations du problème 1D classique

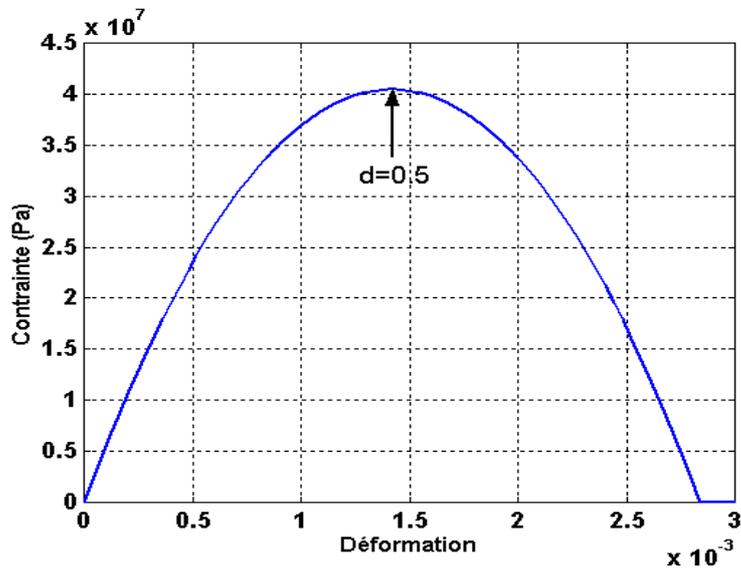


Figure 2. Loi de comportement élastique endommageable sans effet retard

2.2. L'effet retard

2.2.1. Equations du modèle

Si on regarde de manière plus fine l'évolution de l'endommagement dans le cas d'un matériau élastique endommageable sans effet retard, on s'aperçoit que le taux d'endommagement tend vers l'infini lorsque la vitesse de sollicitation tend vers l'infini. On considère ici que, physiquement, le taux d'endommagement est borné par l'inverse de τ_c qui correspond au temps caractéristique du modèle (ALLIX, DEÛ et LADEVEZE, [1] et [3]). La loi d'évolution de l'endommagement que propose alors LADEVEZE est :

$$\begin{cases} \dot{d} = \frac{1}{\tau_c} [1 - \exp(-a \langle f(Y) - d \rangle)] & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sin on} \end{cases}$$

où le coefficient a est un paramètre matériau. De cette manière, une variation du taux de restitution d'énergie Y n'entraînera pas une variation instantanée de l'endommagement, celui-ci va évoluer avec un certain retard défini par le temps caractéristique.

2.2.2. Exemple de traction dynamique

2.2.2.1. Traction d'un unique élément

Ce type de simulation permet de mettre en évidence l'influence de la vitesse de sollicitation (cf. figure 4) ; l'influence de l'effet retard y est visible : la contrainte est d'autant plus importante que la vitesse de sollicitation est grande (la limitation sur le taux d'endommagement permet à la contrainte d'augmenter de manière plus importante). Les valeurs des paramètres du matériau pour cet exemple sont : $E=57\text{GPa}$, $\rho=2\,280\text{kg/m}^3$, $Y_0=0\text{MPa}$, $Y_c=0.23\text{MPa}$, $a=10$, $\tau_c=5\mu\text{s}$.

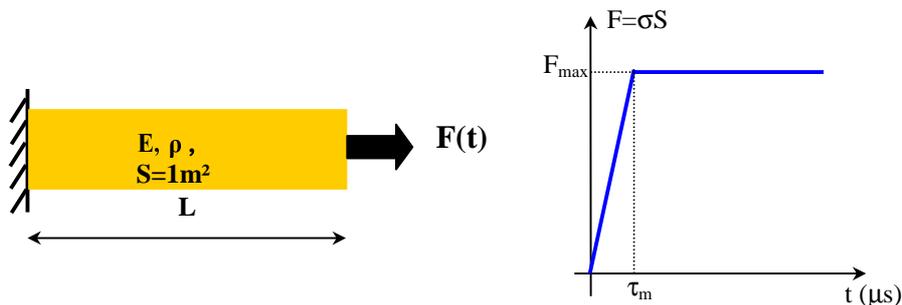


Figure 3. Barre unidimensionnelle sollicitée en traction (on peut de la même manière imposer un déplacement à l'extrémité)

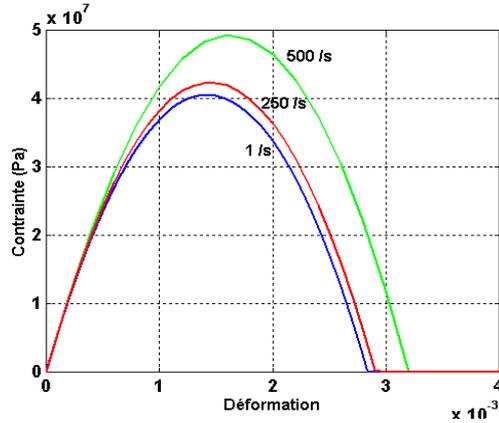


Figure 4. Loi de comportement élastique endommageable avec effet retard

2.2.2.2. Traction de poutre

On reprend l'exemple détaillé sur la figure 3 (exemple en déplacement imposé). Le résultat – obtenu avec une poutre de longueur $L=0.1\text{m}$ maillée avec 250 éléments, pour une vitesse de sollicitation de 250s^{-1} et avec les paramètres suivants : $a=10$, $\tau_c=2\mu\text{s}$ – est donné sur la figure 5.

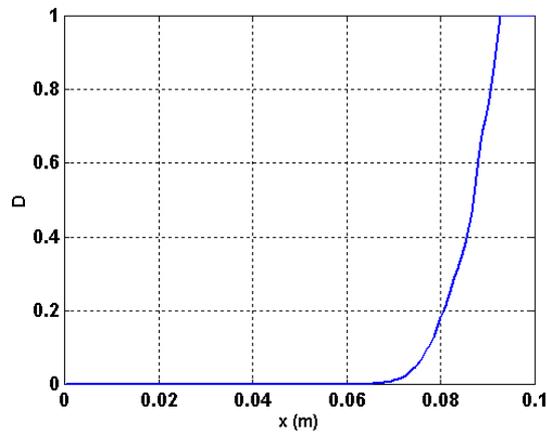


Figure 5. Profil de l'endommagement le long de la barre. La taille de la zone rompue est d'environ 9 mm

On aboutit aux conclusions suivantes :

- la zone endommagée n'est pas réduite à un élément,
- la taille de la zone endommagée ne dépend pas du maillage (idem pour le profil de l'endommagement le long de la poutre),
- l'énergie dissipée ne dépend pas du maillage,
- la vitesse de sollicitation a une influence sur la taille de la zone endommagée et sur l'énergie dissipée.

La section suivante concerne l'étude de ce type de simulations, et en particulier l'évolution de la taille de la zone endommagée en fonction de la vitesse de sollicitation.

3. Analyse du modèle en unidimensionnel

On s'intéresse dans cette section à l'analyse du modèle, l'objectif principal étant ici de déterminer l'évolution de la longueur caractéristique en fonction de la vitesse de sollicitation ; nous allons reprendre les conclusions de la section précédente et les approfondir, puis, après avoir donné une première courbe « longueur caractéristique/vitesse de déformation », un modèle analytique sera mis en place afin, notamment, d'observer l'influence des coefficients du modèle sur l'allure de ces courbes. Enfin, on comparera pour différentes classes de matériaux la qualité des résultats obtenus.

3.1. Objectivité vis-à-vis du maillage

On reprend ici le même exemple qu'en 2.2.2 avec une contrainte imposée de 285 MPa. La figure 6.a donne le profil d'endommagement pour des maillages de plus en plus fins, la figure 6.b donne l'évolution de l'intégrale de l'endommagement le long de la poutre selon le niveau de finesse du maillage. On constate en particulier, comme cela a déjà été dit précédemment que la solution converge lorsque l'on augmente la finesse du maillage (convergence à l'ordre 1) ; il est donc possible de déterminer la longueur caractéristique correspondant à une sollicitation.

3.2. Première étude d'un matériau élastique endommageable

Le matériau considéré ici est du même type que celui étudié dans la section 2, c'est-à-dire que la loi d'évolution de l'endommagement est linéaire vis-à-vis du taux de restitution d'énergie Y entre une valeur seuil et une valeur critique. Les paramètres du matériau sont identiques à ceux de la section 2, hormis ceux qui concernent l'endommagement ; on prend en effet $Y_0=0.05\text{MPa}$, $Y_c=0.23\text{MPa}$, $a=10$, $\tau_c=5\mu\text{s}$. Le temps de montée de la sollicitation est par ailleurs choisi égal à $1\mu\text{s}$.

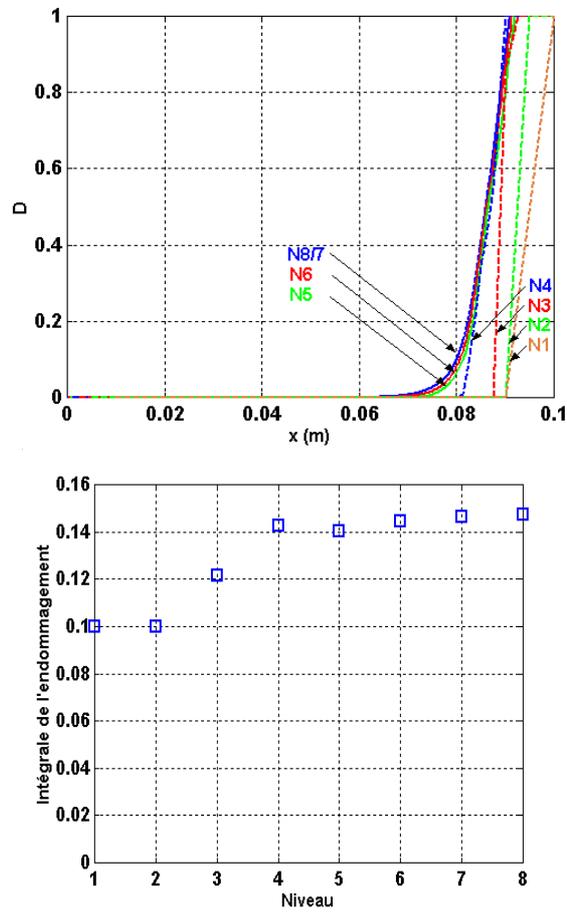


Figure 6. *a* Profil de l'endommagement le long de la barre. Le niveau 1 correspond à 10 éléments, le niveau ℓ à $10 \cdot 2^{\ell-1}$ éléments. *b* Evolution de l'intégrale de l'endommagement en fonction du niveau

La figure 7 présente l'évolution de la longueur caractéristique en fonction de la contrainte appliquée à l'extrémité de la poutre. La gamme de sollicitations étudiée s'étend de 0 MPa à 10 GPa. Il semble que la longueur caractéristique évolue plus ou moins linéairement par rapport au logarithme de la sollicitation ; le développement d'un modèle analytique (cf. section 3.3) permettant de retrouver ce comportement est alors envisagé afin de déterminer, par exemple, l'influence des coefficients intervenant au niveau du modèle (cf. section 3.4).

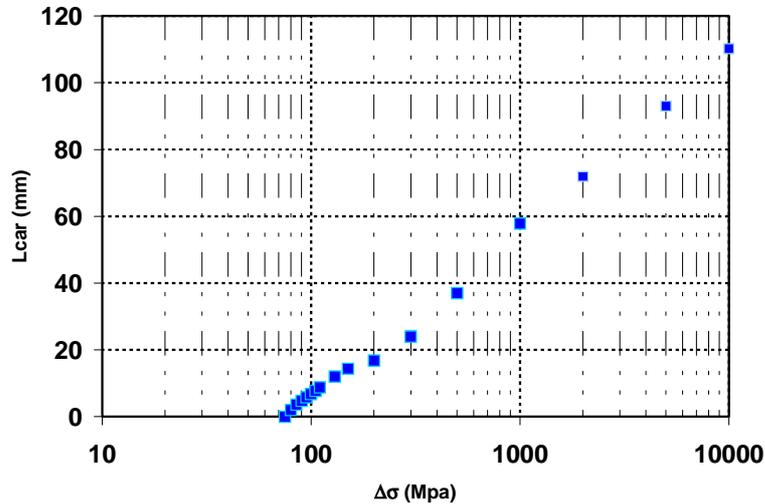


Figure 7. Evolution de la longueur caractéristique en fonction du niveau de la sollicitation

3.3. Mise en place d'un modèle analytique

3.3.1. Démarche adoptée

Nous sommes en mesure d'écrire l'ensemble des équations qui régissent le problème. Toutefois, la solution analytique n'a pu être trouvée. Il convient donc d'établir un modèle simplifié ; cette simplification va essentiellement concerner la loi d'évolution de l'endommagement avec effet retard. On ne s'intéressera également qu'à ce qui se passe au niveau du front de l'onde se propageant dans le matériau. Avec ces simplifications, nous sommes en mesure de déterminer une longueur analytiquement qui se veut l'image plus ou moins fidèle de ce que l'on peut obtenir avec le modèle d'origine.

Après avoir mis en place le modèle d'endommagement à effet retard qui prend en compte ces simplifications, on déterminera analytiquement la longueur caractéristique d'abord sur un modèle continu puis sur un modèle discret. Le modèle simplifié nous amènera à introduire une nouvelle contrainte dite « limite » dont le choix sera explicité.

3.3.2. Modèle simplifié d'endommagement à effet retard

L'endommagement à effet retard classique défini par LADEVEZE et ALLIX notamment dans [1, 2-4, 7], prend, pour un matériau élastique endommageable, la forme suivante :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \left(1 - \exp\left(-a \left(f(\sqrt{Y}) - d \right) \right) \right) \text{ si } d < 1, d=1 \text{ sinon}$$

$$\text{avec } f(\sqrt{Y}) = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \text{ et } Y = \frac{1}{2E} \sigma^2$$

On désire simplifier l'écriture de ce modèle lorsqu'on l'applique à l'initiation de l'endommagement, c'est-à-dire en considérant $d=0$. Il s'agit donc d'approximer la fonction de x suivante :

$$h(x) = \frac{1}{\tau_c} \left(1 - \exp(-a \langle x \rangle) \right)$$

La simplification que l'on va effectuer est résumée sur la figure 8 ; on approxime la fonction ci-dessus par une fonction de type Heavyside valant 0 puis $1/\tau_c$ selon la valeur du taux de restitution d'énergie, donc de la contrainte. L'approximation faite se traduit alors par :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \text{ si } \sigma \geq \sigma_{\text{lim}}, = 0 \text{ sinon}$$

où σ_{lim} est choisi de manière adéquate (voir section 3.3.5).

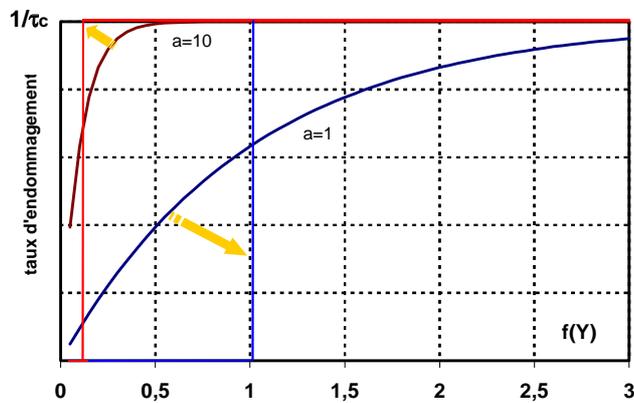


Figure 8. *Modèle simplifié*

3.3.3. Détermination analytique d'une longueur caractéristique sur un modèle continu

Nous étudions ici le cas d'une poutre unidimensionnelle à laquelle on impose à l'extrémité libre une sollicitation $\Delta\sigma^*$.

Afin d'analyser ce qui se passe au niveau du front de l'onde, nous allons écrire les équations du mouvement et nous placer dans le cas où $x=c.t$. La loi d'évolution de l'endommagement est celle qui a été présentée dans la section 3.3.2. Les équations du mouvement sont donc :

$$\begin{cases} \sigma_{eff}(x,t) = E\varepsilon(x,t) \\ \varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\ \sigma(x,t) = (1-d(x,t))\sigma_{eff}(x,t) \\ \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

En combinant ces équations, on obtient une équation différentielle ne faisant intervenir que la contrainte effective et l'endommagement :

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{\sigma_{eff}(x,t)}{(1-d(x,t))} \right)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{eff}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma_{eff}(x,t)}{\partial t^2}$$

En développant la dérivée seconde en x , on obtient :

$$\frac{\left((1-d(x,t)) \left[(1-d(x,t)) \frac{\partial^2 \sigma_{eff}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d(x,t)}{\partial x^2} \cdot \sigma_{eff}(x,t) \right] + 2 \frac{\partial d(x,t)}{\partial x} \left[(1-d(x,t)) \frac{\partial \sigma_{eff}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial d(x,t)}{\partial x} \cdot \sigma_{eff}(x,t) \right] \right)}{(1-d(x,t))^3} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma_{eff}(x,t)}{\partial t^2}$$

Si on se place en $x = c.t$, on a les simplifications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{\text{eff}}(ct, t)}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{d\sigma_{\text{eff}}(t)}{dt} \\ \frac{\partial^2 \sigma_{\text{eff}}(ct, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \sigma_{\text{eff}}(t)}{dt^2} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial d(ct, t)}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{dd(t)}{dt} \\ \frac{\partial^2 d(ct, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 d(t)}{dt^2} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, vu que la forme de l'endommagement est relativement simple au niveau du front de l'onde, la valeur de l'endommagement et celle de ses dérivées sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(ct, t) \approx 0 \\ \frac{\partial d(ct, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau_c} \text{ tant que } \sigma_{\text{eff}} \geq \sigma_{\text{lim}} \\ \frac{\partial^2 d(ct, t)}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

En insérant ces diverses simplifications dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\frac{1}{c^2} \left[\frac{d^2 \sigma_{\text{eff}}(t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau_c} \frac{d\sigma_{\text{eff}}(t)}{dt} + \frac{2}{\tau_c^2} \sigma_{\text{mi}}(t) \right] = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \sigma_{\text{eff}}(t)}{dt^2}$$

Ce qui donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\sigma_{\text{eff}}(t)}{dt} + \frac{2}{\tau_c} \sigma_{\text{eff}}(t) = 0$$

En prenant en compte la condition initiale qui est que la contrainte effective initiale correspond au niveau de la sollicitation ie $\sigma_{\text{eff}}(0) = \Delta\sigma^*$, la solution de l'équation différentielle est donc :

$$\sigma_{\text{eff}}(t) = \Delta\sigma^* \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)$$

L'expression de la condition $\sigma_{\text{eff}} \geq \sigma_{\text{lim}}$ permet de déterminer le temps critique correspondant :

$$t_{\text{lim}} = \tau_c \cdot \ln \left(\frac{\Delta \sigma^*}{\sigma_{\text{lim}}} \right)$$

Ainsi que la longueur caractéristique :

$$L_{\text{car}} = c \tau_c \ln \left(\frac{\Delta \sigma^*}{\sigma_{\text{lim}}} \right)$$

3.3.4. Détermination analytique d'une longueur caractéristique sur un modèle discret

Comme cela a été dit précédemment, on s'intéresse ici uniquement à ce qui peut se passer au moment du passage de l'onde de contrainte. On considérera donc que la longueur que l'on veut déterminer correspond au nombre d'éléments qui commence à s'endommager dès le passage de l'onde (donc d'une valeur de $\Delta t / \tau_c$).

Analysons pour cela l'évolution de la contrainte en front d'onde sur un modèle simple (cf. figure 9) en utilisant le schéma numérique de Newmark aux différences centrées. On considère ici que les valeurs indicées $*$ correspondent aux valeurs qu'on obtiendrait pour un matériau élastique parfait et correspondent donc aux valeurs à l'échelle microscopique (comme la contrainte effective par exemple) ; on définit ainsi la valeur de l'onde de contrainte $\Delta \sigma^*$, l'onde de déformation correspondante $\Delta \varepsilon^*$, le déplacement des nœuds lors du passage de l'onde ΔU^* ainsi que l'accélération des nœuds lors du passage de l'onde \ddot{U}^* .

La conclusion que l'on tire de cette petite étude est que tant que la contrainte effective est supérieure à la contrainte limite au niveau du front de l'onde, l'endommagement continue à se propager. Le nombre i d'éléments que l'on cherche à déterminer correspond donc à la solution de l'équation suivante :

$$\left(1 - \frac{T}{\tau_c} \right)^i \Delta \sigma^* = \sigma_{\text{lim}}$$

C'est-à-dire :

$$i = \frac{\ln\left(\frac{\sigma_{\text{lim}}}{\Delta\sigma^*}\right)}{\ln\left(1 - \frac{T}{\tau_c}\right)}$$

Sachant que ℓ est la longueur d'un élément et que le pas de temps est choisi de telle sorte que :

$$T = \frac{\ell}{c}$$

où c est la vitesse des ondes dans le matériau considéré, on en déduit la longueur caractéristique :

$$L_{\text{car}} = \ell \frac{\ln\left(\frac{\sigma_{\text{lim}}}{\Delta\sigma^*}\right)}{\ln\left(1 - \frac{\ell}{c\tau_c}\right)}$$

La première constatation après cette étude est que, avec le modèle simplifié, la longueur caractéristique dépend du maillage *via* la longueur de l'élément ℓ . On peut tracer l'évolution de cette longueur en fonction de la finesse du maillage (cf figure 10). Le passage à la limite pour un maillage infiniment fin donne :

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} L_{\text{car}} = c\tau_c \ln\left(\frac{\Delta\sigma^*}{\sigma_{\text{lim}}}\right)$$

$$ie \frac{L_{\text{car}}^\infty}{c\tau_c} = \ln\left(\frac{E}{\sigma_{\text{lim}}}\right) + \ln\left(\frac{V}{c}\right)$$

où V est la vitesse de l'extrémité de la poutre.

Nous voyons que la solution analytique obtenue en passant à la limite du modèle discret converge vers la solution du modèle continu. On a donc à notre disposition une expression analytique approximative de la longueur caractéristique. La qualité de cette approximation va bien sûr dépendre de la qualité du choix de σ_{lim} .

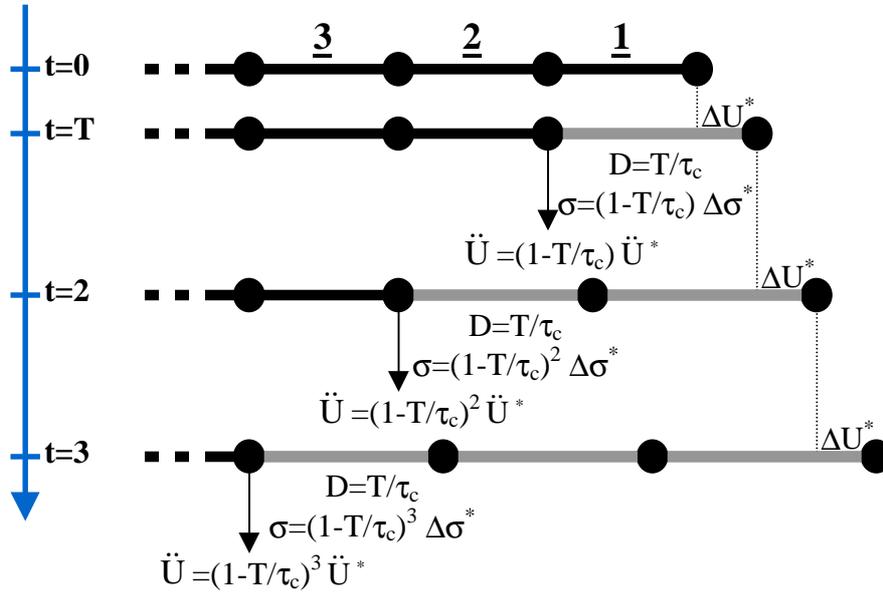


Figure 9. Evolution de la contrainte au niveau du front d'onde

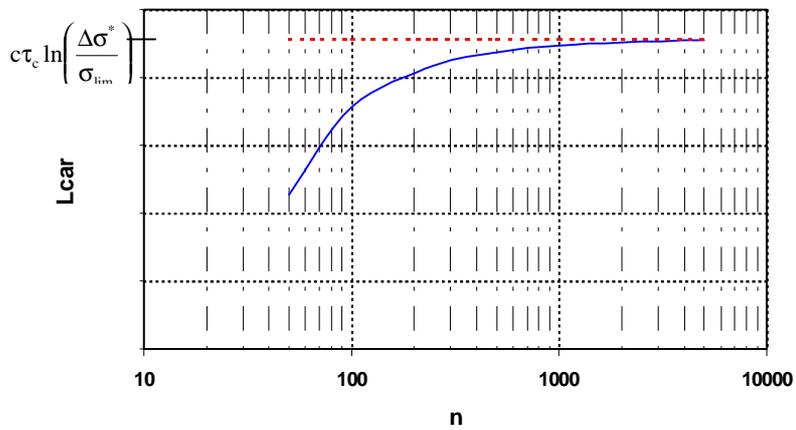


Figure 10. Evolution de la longueur caractéristique en fonction du nombre d'éléments n utilisés pour mailler une longueur de 0.2 m

3.3.5. Choix de la contrainte limite

Un choix judicieux de σ_{lim} doit nous permettre d'encadrer la solution numérique. De ce choix dépend la manière dont on va approximer la courbe présentée sur la figure 8. Afin d'encadrer au mieux notre solution, nous allons donc considérer des σ_{lim} qui correspondent à des valeurs de taux d'endommagement valant 0 % du taux d'endommagement maximum, c'est-à-dire :

$$\sigma_{lim}^{inf} = \sqrt{2EY_0} = \sigma_0$$

et valant 95 % du taux d'endommagement maximum, soit approximativement :

$$\sigma_{lim}^{sup} = \sqrt{2EY_0} + 3 \frac{\sqrt{2EY_c} - \sqrt{2EY_0}}{a} = \sigma_0 + 3 \frac{\sigma_c - \sigma_0}{a}$$

Ces choix vont permettre de délimiter une zone qui devrait englober les résultats obtenus (cf. section 3.4) avec les simulations, cette zone est présentée sur la figure 11.

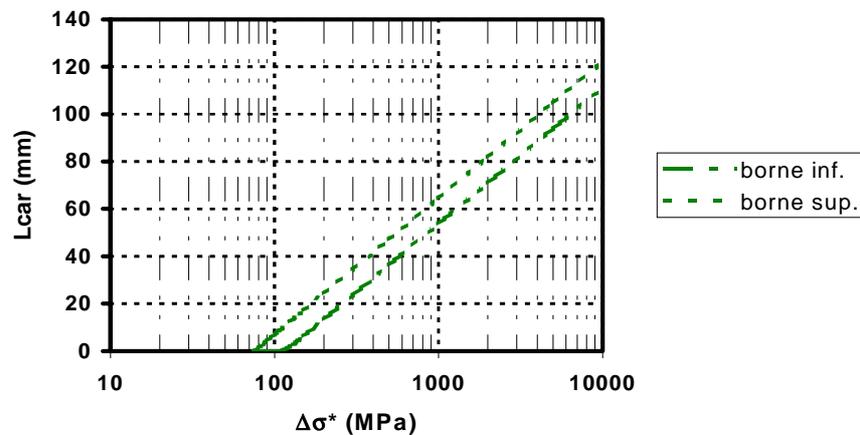


Figure 11. Courbes analytiques limites de la longueur caractéristique en fonction du niveau de la sollicitation

3.4. Etude du modèle pour différentes classes de matériaux

On va d'abord s'intéresser à montrer l'efficacité du modèle analytique sur le matériau élastique endommageable, ce qui me permettra de mettre en évidence sur ce type de matériau l'influence des différents paramètres du modèle d'endommagement. Ensuite, d'autres types de matériaux seront étudiés.

3.4.1. Matériau élastique endommageable

On reprend ici le matériau étudié en 3.2 afin de comparer et de valider le modèle analytique construit, puis, dans un second temps, pour observer l'influence des paramètres du modèle à effet retard.

3.4.1.1. Comparaison entre modèle analytique et résultats de simulations

Le modèle analytique nous permet de rajouter sur la figure 7 les bornes inférieures et supérieures (cf. figure 12). On constate que le modèle analytique est relativement fidèle aux simulations, et on remarquera en particulier que pour des contraintes « faibles », c'est-à-dire légèrement supérieures à la contrainte seuil, la longueur caractéristique évolue de la même manière que la borne supérieure (ce qui signifie que la zone endommagée finale correspond aux éléments qui s'endommagent dès le passage de l'onde). Du côté des contraintes « élevées », la longueur caractéristique est plus faible que la borne supérieure et tend vers la borne inférieure.

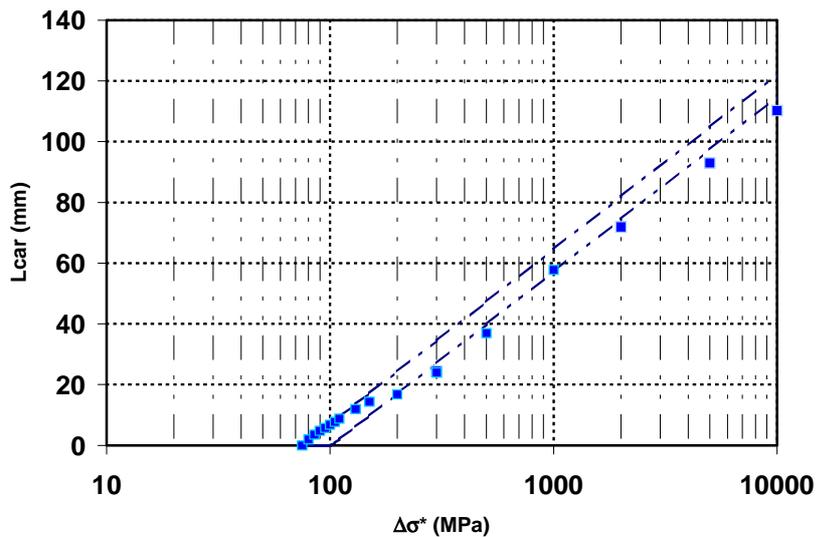


Figure 12. Evolution de la longueur caractéristique en fonction du niveau de la sollicitation et bornes issues du modèle analytique

3.4.1.2. Influence des paramètres τ_c et a

Le bon comportement du modèle analytique nous permet maintenant de déterminer l'influence des différents paramètres. L'influence du temps caractéristique τ_c intervient directement dans l'expression analytique de la longueur caractéristique :

$$L_{\text{car}} = c\tau_c \ln\left(\frac{\Delta\sigma^*}{\sigma_{\text{lim}}}\right)$$

On voit l'influence d'une modification de celui-ci sur la figure 13.a ; de manière générale, le modèle analytique reste fidèle quelle que soit la valeur de τ_c ; en particulier, on retrouve systématiquement la bonne concordance entre le modèle analytique et les simulations pour les contraintes « faibles ». L'influence du coefficient a intervient moins directement dans le modèle analytique, puisqu'elle intervient au niveau du choix de la contrainte limite supérieure :

$$\sigma_{\text{lim}}^{\text{sup}} = \sqrt{2EY_0} + 3\frac{\sqrt{2EY_c} - \sqrt{2EY_0}}{a} = \sigma_0 + 3\frac{\sigma_c - \sigma_0}{a}$$

Cette contrainte limite permet par ailleurs de déterminer la borne inférieure du modèle analytique. On doit donc *a priori* s'attendre à une plus grande dispersion pour les contraintes 'élevées' lorsque a est petit (cf. figure 13.b). On retrouve numériquement cette plus grande dispersion, mais dans une moindre mesure que celle prévue par le modèle analytique (cf. figure 14) ; ceci n'est pas fortement préjudiciable pour le modèle analytique, puisque, comme on l'a dit précédemment, ce sont plutôt les contraintes juste au-dessus de la contrainte seuil, donc les contraintes dites « faibles », qui nous intéressent.

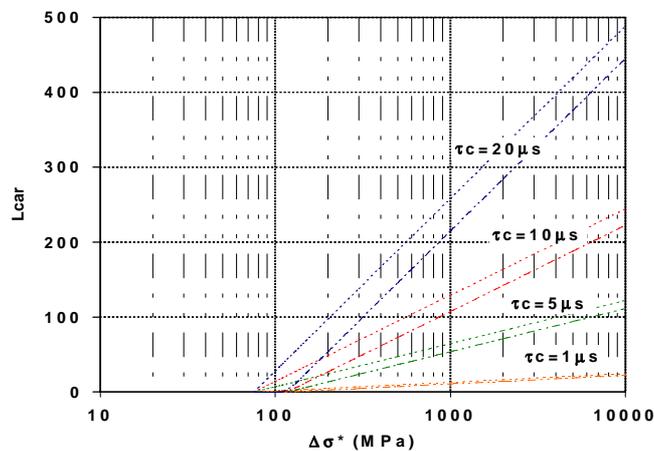


Figure 13.a Influence du temps caractéristique τ_c sur les courbes limites supérieures et inférieures du modèle analytique ($a = 10$)

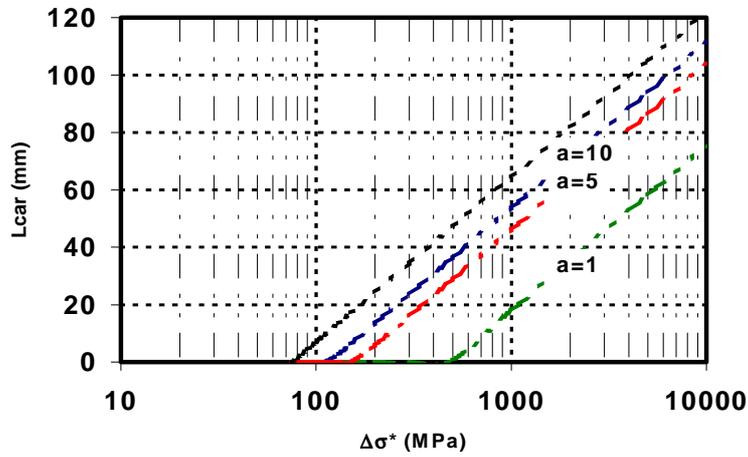


Figure 13.b Idem pour le coefficient a ($\tau_c = 5 \mu s$)

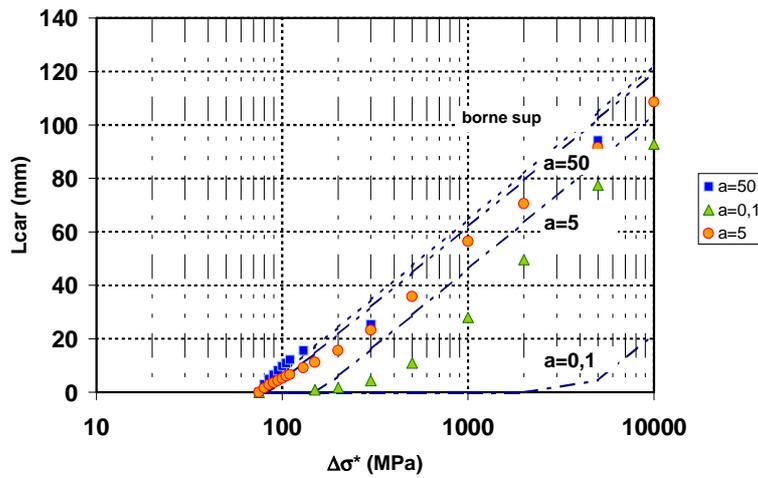


Figure 14. Influence du coefficient a , comparaison entre modèle analytique et résultats des simulations

3.4.2. Matériau élasto-plastique endommageable

Le cas des matériaux élasto-plastiques endommageables est totalement analogue à celui des matériaux élastiques endommageables. En effet, si l'on choisit une loi d'évolution d'endommagement linéaire par rapport à la déformation plastique du type :

$$f(Y) = \frac{\sqrt{\epsilon_p} - \sqrt{\epsilon_p^0}}{\sqrt{\epsilon_p^c} - \sqrt{\epsilon_p^0}}$$

où l'on retrouve la notion de déformation plastique seuil et de déformation plastique limite, on s'aperçoit que tout se passe comme si l'on avait affaire à un matériau élastique endommageable de module d'Young le module tangent E_t et de taux de restitution d'énergie seuil (respectivement critique) celui correspondant à une déformation égale à la déformation plastique seuil (respectivement critique). On retrouve alors de la même manière les bornes inférieure et supérieure du modèle analytique en adaptant les contraintes limites et en prenant garde de remplacer la vitesse des ondes élastiques dans le matériau par la vitesse des ondes plastiques.

Si on trace sur le même graphique le résultat des simulations et les courbes analytiques pour un matériau élasto-plastique endommageable dont les caractéristiques sont : $E=57\text{GPa}$, $\rho=2\,280\text{kg/m}^3$, $\epsilon_{p0}=0$, $\epsilon_{pc}=0.0025$, $a=10$, $\tau_c=10\mu\text{s}$, $\sigma_y=60\text{MPa}$, $E_t=E/10$ (cf. figure 15), on constate que l'on sous-évalue la longueur caractéristique avec le modèle analytique. Cela peut sembler étrange *a priori* puisque tout se passe comme pour un matériau élastique, tout sauf que, l'onde élastique se propageant plus vite que l'onde plastique, la contrainte est déjà égale à la limite élastique lorsque l'onde plastique passe et cela facilite l'évolution de l'endommagement.

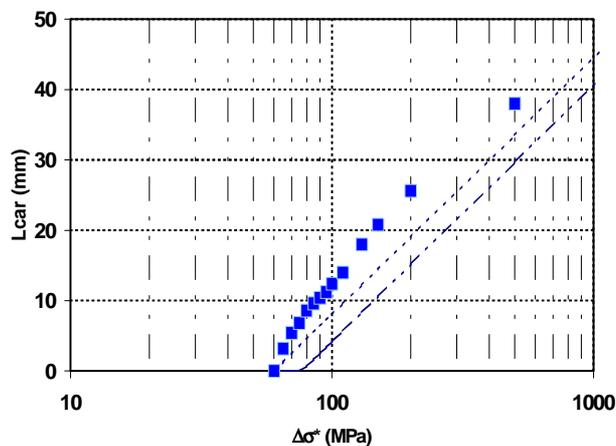


Figure 15. Evolution de la longueur caractéristique en fonction du niveau de la sollicitation et bornes issues du modèle analytique pour un matériau élasto-plastique endommageable

3.4.3. Matériau viscoplastique endommageable

3.4.3.1. Présentation du modèle de matériau utilisé

On applique maintenant le modèle d'endommagement à effet retard aux matériaux viscoplastiques endommageables ; le traitement analytique de ce type de matériau est différent des deux autres du fait de la nature du comportement et de l'évolution de la contrainte. En effet, on considère ici la loi de Norton qui nous permet de lier la contrainte au taux de déformation plastique afin de décrire la viscoplasticité du matériau :

$$\dot{\epsilon}_p = \left(\frac{\sigma_{\text{eff}}}{\lambda} \right)^n$$

où n et λ sont les paramètres de Norton pris ici respectivement égaux à 5 et 553 MPa. Pour décrire l'évolution de l'endommagement, on utilise la loi de Kachanov qui est construite de manière analogue à la loi de Norton et qui s'écrit :

$$\dot{d} = \left(\frac{\sigma_{mi}}{A} \right)^r$$

où r et A sont les paramètres de Kachanov pris ici respectivement égaux à 4 et 453 MPa. Cette dernière loi est très pratique pour décrire en particulier le fluage primaire (tant que la contrainte effective est inférieure à A , l'évolution de l'endommagement est très lente), puis le fluage tertiaire (une fois que la contrainte effective dépasse A , l'évolution de l'endommagement est très rapide).

Les autres paramètres du matériau sont : $E=210\text{GPa}$, $\rho=8\,400\text{kg/m}^3$, $a=10$, $\tau_c=5\mu\text{s}$, $\sigma_{lim}=80\text{MPa}$.

3.4.3.2. Evolution de la longueur caractéristique

On peut, de la même façon que pour les matériaux précédents, déterminer la longueur caractéristique pour différentes sollicitations ; la contrainte limite choisie pour le modèle analytique correspond ici à la contrainte de Kachanov. Les courbes obtenues sont tracées sur la figure 16. On constate que la longueur caractéristique n'évolue pas de manière linéaire comme c'est le cas pour la longueur caractéristique analytique. Ce problème vient de la complexité même du modèle ; en effet, on retrouve en quelque sorte le même problème que pour les matériaux élastoplastiques, à savoir que, du fait de la nature du matériau, l'ensemble de ses paramètres sont amenés à changer au cours de la propagation de l'onde (évolution du module tangent, donc en particulier de la vitesse de propagation des ondes plastiques). Il devient alors difficile, du moins avec le modèle analytique tel qu'il est, de prévoir la longueur caractéristique de manière fiable.

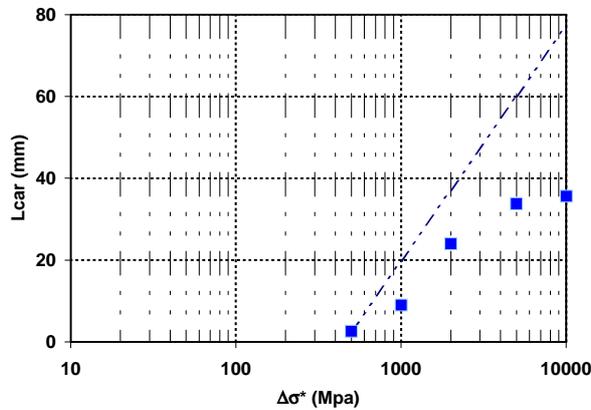


Figure 16. Evolution de la longueur caractéristique en fonction du niveau de la sollicitation et borne issue du modèle analytique pour un matériau viscoplastique endommageable

3.4.4. Matériau quelconque endommageable

Le modèle d'endommagement à effet retard est généralisable à n'importe quel type de matériaux (pour peu qu'ils soient endommageables...). En effet, on a vu que son influence était juste de limiter le taux d'endommagement lorsque celui-ci devenait trop important.

En ce qui concerne le modèle analytique, il est applicable dans le cas de matériaux élastiques endommageables, puis de matériaux élasto-plastiques endommageables où la déformation plastique seuil n'est pas nulle. Il semble toutefois difficile de le généraliser à d'autres types de matériaux plus complexes sans le modifier.

4. Limitation de la contrainte

4.1. Evolution de l'énergie dissipée

Des études sur les modèles évitant la localisation ([6]) ont mis en évidence le fait que l'énergie dissipée pour un matériau élastique endommageable était proportionnelle à :

$$\delta_c \frac{a^2}{\tau_c^2} + \delta_c \frac{a^2}{\tau_c} [\dot{U}] + a^2 [\dot{U}]^2$$

où la loi d'évolution de l'endommagement est la même que précédemment, sauf qu'elle est écrite en déplacement :

$$f([U]) = \frac{[U] - \delta_0}{\delta_c - \delta_0}$$

Le point à retenir de cette étude est la dépendance au carré par rapport à la vitesse de sollicitation de l'énergie dissipée (cette dépendance se retrouve d'ailleurs *a priori* pour les matériaux élasto-plastiques endommageables). Elle apparaît clairement si on regarde la figure 4 ; l'énergie dissipée correspond à l'aire sous la courbe (on voit par ailleurs que pour un endommagement sans effet retard, cette aire reste inchangée quelle que soit la vitesse de sollicitation (cf. figure 2)). On peut d'ailleurs tracer pour le matériau étudié en 2.2.2 l'évolution de l'énergie dissipée par unité de volume en fonction de la vitesse de sollicitation (cf. figure 17). Ce type de dépendance signifie que lorsque la vitesse de sollicitation augmente, la contrainte maximale augmente elle aussi (cf. figure 4) ; cependant, certains auteurs comme CHABOCHE et FEYEL ([6]) ont proposé des modèles évitant la localisation en insistant sur le fait que l'énergie dissipée par leur modèle variait linéairement par rapport à la vitesse de sollicitation ; ceci nous amène à proposer une extension du modèle où on limite la contrainte, introduisant en quelque sorte une plasticité parfaite à partir d'une certaine contrainte σ_{lim} , qui va permettre, nous allons le voir, d'obtenir cette dépendance linéaire.

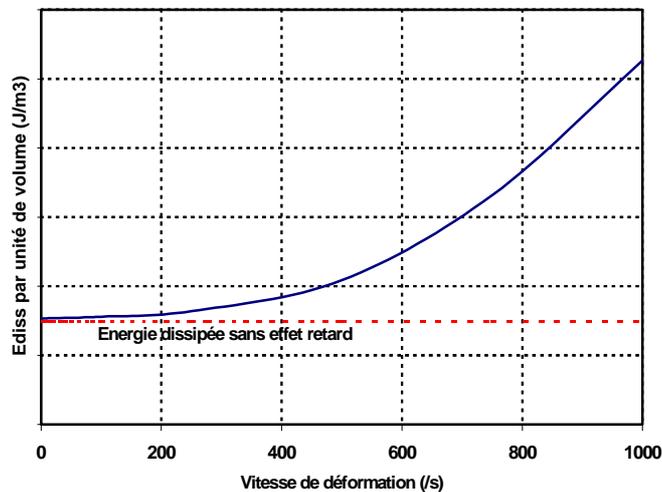


Figure 17. Evolution de l'énergie dissipée par unité de volume en fonction du taux de déformation

4.2. Introduction d'une contrainte limite

4.2.1. Etude d'un matériau élastique endommageable

Imposer une contrainte limite au-delà de laquelle le matériau devient plastique parfait à un matériau élastique est bien entendu contradictoire ; cette étude n'a pour but que de comparer les courbes des figures 4 et 17 avec celles obtenues si l'on impose une contrainte maximale. On considère ici un matériau élastique avec les caractéristiques suivantes : $E=57\text{GPa}$, $\rho=2\,280\text{kg/m}^3$, $Y_0=0\text{MPa}$, $Y_c=0.23\text{MPa}$, $a=10$, $\tau_c=20\mu\text{s}$ et $\sigma_{\text{lim}}=180\text{MPa}$.

La figure 18 est l'analogue de la figure 4 ; lorsque la contrainte est limitée, on s'aperçoit que, à partir du moment où la contrainte effective est égale à la contrainte limite, l'endommagement continue à évoluer et la contrainte chute plus rapidement que sans limitation de la contrainte. On retrouve ce résultat sur la figure 19 (analogue de la figure 17) dans laquelle, à partir du moment où la contrainte effective dépasse la contrainte limite, l'énergie dissipée évolue linéairement (au lieu d'une évolution au carré). On retrouve dans ce cas une évolution similaire à celle obtenue notamment par CHABOCHE et FEYEL ([6]).

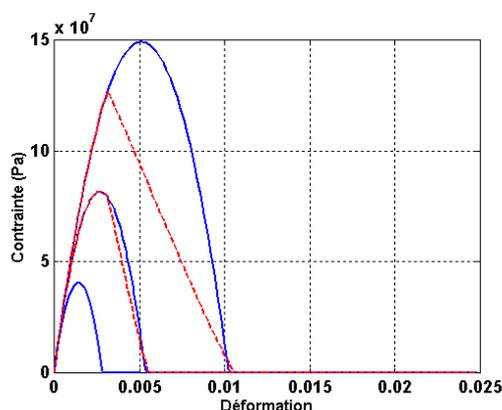


Figure 18. Loi de comportement élastique endommageable avec effet retard avec et sans limitation de la contrainte (pour des vitesses de déformation de 1, 250 et 500 s⁻¹)

4.2.2. Etude d'un matériau élasto-plastique endommageable

4.2.2.1. Matériau étudié

Comme cela a été dit en 4.2.1, il est contradictoire d'introduire de la plasticité parfaite pour un matériau élastique, c'est pourquoi l'étude de l'évolution de la longueur caractéristique est effectuée sur un matériau élasto-plastique

endommageable à écrouissage linéaire à deux pentes, l'une à écrouissage positif et l'autre à écrouissage nul (*ie* plasticité parfaite). La figure 20 donne l'évolution de la contrainte effective en fonction de la déformation pour ce type de matériau ; les paramètres du matériau sont : $E=57\text{GPa}$, $\rho=2\,280\text{kg/m}^3$, $\varepsilon_{p0}=0$, $\varepsilon_{pc}=0.0025$, $a=10$, $\tau_c=10\mu\text{s}$, $\sigma_y=60\text{MPa}$, $E_t=E/10$ et $\sigma_{lim}=100\text{MPa}$.

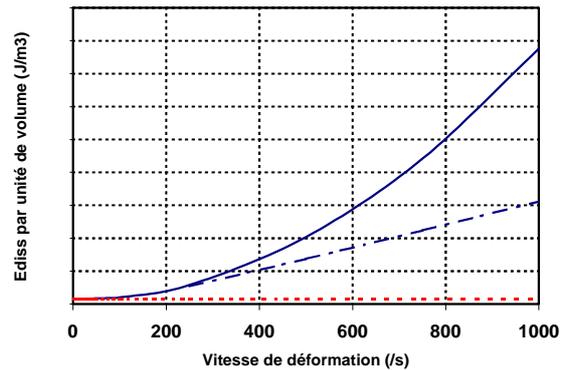


Figure 19. Evolution de l'énergie dissipée par unité de volume en fonction du taux de déformation avec et sans limitation de la contrainte

4.2.2.2. Evolution de la longueur caractéristique

La figure 21 rappelle les résultats de la figure 15 auxquels on ajoute ceux où la contrainte est limitée. Tant que la sollicitation est inférieure à un certain niveau, c'est-à-dire, tant que la sollicitation n'entraînera pas de contraintes supérieures à la contrainte limite, le modèle donne des résultats similaires au modèle sans limitation de la contrainte. Une fois que cette limite est dépassée, la longueur caractéristique n'évolue plus ; ceci n'a rien d'étonnant puisque c'est l'augmentation de la contrainte qui permet la propagation de la zone endommagée, donc, si celle-ci est limitée, la longueur caractéristique le sera également.

5. Conclusion

Cette étude a permis de voir l'efficacité du modèle d'endommagement à effet retard pour résoudre le problème de localisation. Nous avons donc à notre disposition un modèle permettant aux résultats numériques d'être objectifs vis-à-vis du maillage, aussi bien en termes de profil d'endommagement qu'en termes d'énergie dissipée ; de plus, ce modèle est potentiellement applicable à tous types de matériaux endommageables.

Les résultats obtenus avec le modèle simplifié montrent par ailleurs une bonne corrélation entre analytique et numérique, en particulier dans le cadre des contraintes dites « faibles ». On est alors en mesure de mettre en évidence l'influence des différents paramètres du modèle pour les matériaux élastiques endommageables.

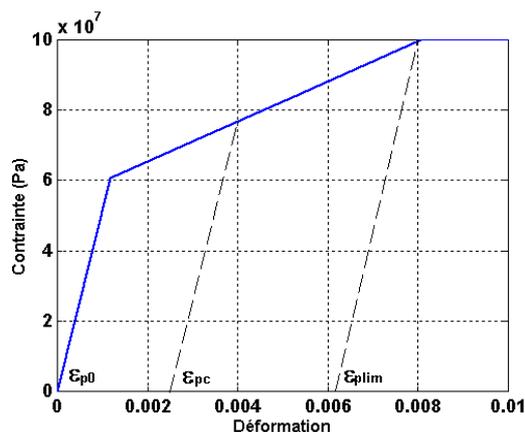


Figure 20. Evolution de la contrainte effective en fonction de la déformation

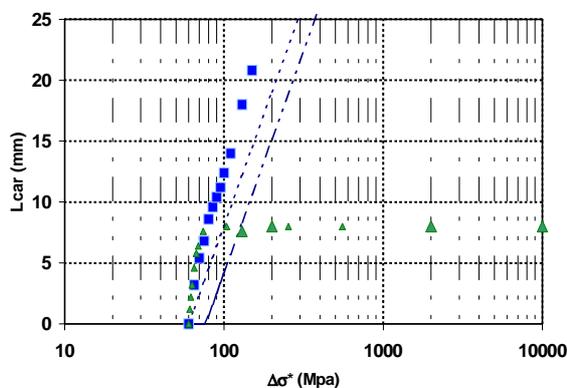


Figure 21. Evolution de la longueur caractéristique en fonction du niveau de la sollicitation et bornes issues du modèle analytique pour un matériau élasto-plastique endommageable avec et sans limitation de la contrainte

Une réponse a également été apportée au problème de l'évolution de l'énergie dissipée ; elle est quadratique pour le modèle d'endommagement à effet retard

classique, mais on peut rendre cette évolution linéaire à partir d'un certain niveau en introduisant simplement une limitation sur la contrainte effective ; cette limitation est toutefois discutable, puisqu'il se peut que la contrainte limite introduite soit elle aussi une fonction de la vitesse de sollicitation.

Cette étude reste toutefois une étude numérique, il est donc indispensable de valider ces résultats grâce à des essais. L'objectif étant alors de deux natures : tout d'abord, retrouver expérimentalement les comportements qui ont pu être mis en évidence ici et, ensuite, identifier les paramètres du modèle spécifiques à chaque matériau.

6. Bibliographie

- [1] Allix, O., Deü, J.F. et Ladevèze, P. , « A delay damage meso-model for prediction of localisation and fracture of laminates subjected to high rates loading », *ECCM 99*, 1999.
- [2] Allix, O., Deü, J.F., Ladevèze, P. et Léveque, D., « A mesomodel for localisation and damage computation in laminates », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 183, p. 105-122, 2000.
- [3] Allix, O. et Deü, J.F., « Delay-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading », *Eng. Trans.*, 45, p. 29-46, 1997.
- [4] Allix, O. et Sen Gupta, J., « Composite damage mesomodel for impact problems : application to 3D C/C material », *ECCM 2001*, 2001.
- [5] Bazant, Z.P. et Pijaudier-Cabot, G. – « Local and non-local models for strain-softening, and their comparison based on dynamics analysis », *Cracking and Damage*, Eds. Elsevier Applied Science, Cachan, France, p. 379-390, 1988.
- [6] Chaboche, J.L., Feyel, F., Leroy, F.H., Monerie, Y., Raous, M. et Sudre, O., Comparaison de lois d'interface fibre/matrice sur la base d'un modèle uniaxial d'expérience de micro-indentation, ONERA TP 1999-28, 1998.
- [7] Douchin, B. et Ladevèze, P., « Mise en œuvre numérique d'un mésomodèle d'endommagement des stratifiés », *NUMEDAM'00, Revue européenne des éléments finis*, V10, p. 473-487, 2000.
- [8] Needleman, A., « Material dependance and mesh sensitivity in localization problems », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 67, p. 69-86, 1988.
- [9] Suffis, A., Extension du modèle de matériaux dépendant du taux de déformation plastique pour les problèmes de localisation, Mémoire de DEA, LMT Cachan, ENS Cachan, 2001.