

---

# Evaluation des erreurs de discrétisation pour les simulations d'impact

Jean-Pierre Pelle\* — Jean-Philippe Combe\* — Alain Fanget\*\*

*\*Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS-Cachan/CNRS/UPMC  
61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan Cedex  
pelle@lmt.ens-cachan.fr*

*\*\*DGA-Centre d'études de Gramat  
46500 Gramat*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article nous proposons une mesure d'erreur en relation de comportement pour estimer les erreurs de discrétisation dans le cadre des simulations d'impact. Cette mesure d'erreur est bâtie sur une extension de l'erreur de Drucker utilisée pour les problèmes de plasticité. Elle prend en compte toutes les sources d'erreurs : discrétisation en temps, discrétisation en espace, diagonalisation de la masse... Un premier exemple de mise en œuvre en dynamique rapide en grandes transformations et pour un comportement complexe est présenté. La discrétisation en espace utilise des triangles à 3 nœuds et le schéma d'intégration est le schéma explicite des différences centrées.*

*ABSTRACT. In this paper, we propose a measure of the error in constitutive relation in order to evaluate discretization errors in the context of impact simulations. This error measure is based on an extension of Drucker's error used in plasticity problems. It takes into account all sources of error: time discretization, space discretization and diagonalization of the mass. A first example of its implementation for complex behavior in fast dynamics and large deformations is presented. The space is discretized using 3-node triangles and the integration scheme chosen is the explicit central difference method.*

*MOTS-CLÉS : impact, erreur en relation de comportement, erreur de discrétisation, dynamique, grandes transformations.*

*KEYWORDS: impact, error in constitutive law, discretization error, dynamics, large transformations.*

---

## 1. Introduction

La mise au point de relations de comportement adaptées aux phénomènes d'impacts sur blindage nécessite de nombreuses comparaisons « essais-calculs ». En théorie, une comparaison « essais-calculs » a pour objet de confronter les résultats expérimentaux à ceux donnés par le modèle mécanique. Ce modèle mécanique est un modèle complexe qui relève de la mécanique des milieux continus dont la solution ne peut être explicitée. Pour obtenir une approximation de la solution, ce modèle est remplacé par un modèle numérique discret (discrétisation en espace de type éléments finis, schéma d'intégration en temps, ...). En pratique, les résultats d'essais sont donc comparés à ceux obtenus à partir du modèle numérique. Il est donc fondamental d'évaluer la représentativité de la solution numérique obtenue en tant qu'approximation de la solution du modèle mécanique de référence.

L'objet de cet article est de proposer une méthode permettant d'estimer la distance entre la solution théorique et la solution numérique calculée. De façon précise, nous proposons une mesure d'erreur qui permet d'évaluer les erreurs introduites par les différentes étapes de discrétisation.

Au paragraphe 2, nous précisons le modèle de référence considéré. Il s'agit d'un problème de dynamique en grandes transformations pour un comportement matériau complexe qui est de type fluide pour la partie sphérique de la contrainte et de type élastoplastique pour la partie déviatorique. La mesure d'erreur que nous proposons est détaillée au paragraphe 3. Pour les problèmes linéaires plusieurs méthodes d'évaluation des erreurs de discrétisation existent [AIN 97], [LAD 01] : exploitation des résidus d'équilibre, techniques de lissage, erreur en relation de comportement. Pour les problèmes non linéaires, diverses extensions de ces méthodes ont été proposées, mais seul le concept d'erreur en relation de comportement permet de prendre en compte toutes les sources d'erreurs de discrétisation. C'est donc dans ce contexte que notre mesure d'erreur a été élaborée. Dans son principe, elle est bâtie sur une erreur en relation de comportement bien adaptée aux problèmes de dynamique [COM 99], sur l'erreur de Drucker utilisée en plasticité [GAL 96] et sur un terme spécifique nécessité par la partie "fluide" du comportement. L'extension aux grandes transformations repose sur la formulation du comportement utilisant les grandeurs tournées par la rotation associée au corotationnel [LAD 96]. Les grandes lignes de la technique de mise en œuvre de la mesure d'erreur sont décrites au paragraphe 4 et un premier exemple de mise en œuvre est présenté au paragraphe 5.

## 2. Cadre de l'étude

Les problèmes d'impact sur blindage sont des simulations qui font intervenir simultanément la dynamique rapide, la gestion des contacts entre l'impacteur et la cible et les grandes transformations. Par rapport à d'autres types de simulations en dynamique rapide, la spécificité principale de ces simulations vient de la nature des relations de comportement utilisées. En effet, pour les gammes de vitesses d'impact envisagées (400 à 4000  $m.s^{-1}$ ), on observe que le matériau se comporte quasiment comme un fluide et la partie sphérique de l'opérateur des contraintes joue un rôle prépondérant dans la réponse de la structure. La relation de comportement comprend donc deux parties :

- la partie sphérique de la contrainte est reliée au volume massique et à la température par une relation de comportement de type Murnagham [DOU 92],
- pour la partie déviatorique, un comportement de type plastique à écrouissage isotrope linéaire sans couplage avec la température, est utilisé.

Les phénomènes étudiés étant très rapides (temps caractéristique de l'ordre de  $100 \mu s$ ), on estime que les flux de chaleur n'ont pas le temps de diffuser dans la structure (vitesse de propagation de l'ordre de  $1 \text{ cm.s}^{-1}$ ). On supposera donc que le problème est adiabatique.

Dans le cadre de cet article, notre objectif est d'élaborer une mesure d'erreur permettant de prendre en compte le comportement complexe et les grandes transformations en dynamique rapide. Nous supprimons donc la difficulté liée au contact en remplaçant l'impacteur par la donnée sur une partie de la frontière de la structure étudiée, d'une densité d'effort ou d'une distribution de vitesse qui évolue au cours du temps. Des mesures d'erreurs en relation de comportement pour les problèmes de contact peuvent être trouvées dans [LAD 01], [COO 99], [LOU 02].

### 2.1. Notations

Le milieu étudié occupe à l'instant  $t$  un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ .

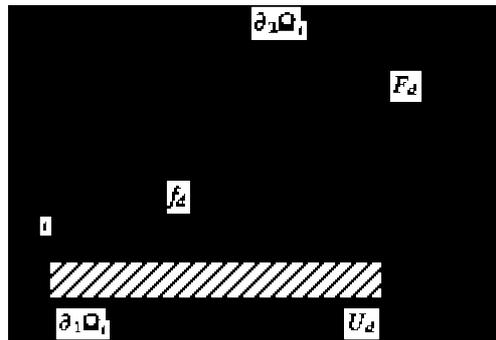


Figure 1. Données du problème

Nous supposons que le milieu est soumis à un environnement donné qui, à chaque instant  $t$  de l'intervalle de temps  $[0, T]$ , peut être schématisé par (figure 1) :

- un champ de déplacement  $u$  sur une partie  $\Gamma_d$  de la frontière  $\Gamma$ ,
- une densité surfacique d'effort  $F_d$  sur la partie  $\Gamma_u$ ,
- une densité volumique d'effort  $f_d$  sur le domaine  $\Omega$ .

La partition  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_u$  est supposée indépendante du temps. A l'instant initial  $t = 0$ , on suppose également données la position initiale  $u_0$  et la vitesse initiale  $v_0$  en tout point  $M$  de  $\Omega$ .

Il est à remarquer que la donnée de la vitesse sur une partie du bord et des conditions initiales correspondantes revient à se donner le déplacement sur cette partie du bord. Il n'y a donc pas lieu ici de distinguer les parties où le déplacement est imposé au sens strict de la partie impactée où l'on se donne le champ de vitesse.

## 2.2. Problème de référence

Les inconnues principales sont le champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , le champ de contrainte de Cauchy  $\mathbf{T}$ . Pour faciliter la définition de l'erreur en dynamique, on introduit comme inconnue supplémentaire la quantité d'accélération  $\mathbf{a}$  et le lien entre  $\mathbf{u}$  et l'accélération  $\mathbf{a}$  est considéré comme une relation de comportement. Les équations du problème de référence peuvent être séparées en cinq groupes :

### 2.2.1. Equations de liaison et conditions initiales

[]



La condition  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  traduit les conditions de régularité qu'il faut imposer au champ de déplacement  $\mathbf{u}$ .

### 2.2.2. Equations d'équilibre

[]



où le taux de déformation  $\mathbf{D}$  est la partie symétrique du gradient du champ  $\mathbf{u}$ . La condition  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  traduit les conditions de régularité qu'il faut imposer au champ  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{V}$  désigne l'espace des champs de vitesses virtuelles définis sur  $\Omega$  et qui sont nuls sur  $\Gamma_D$ .

### 2.2.3. Conservation de la masse

[]



### 2.2.4. Relations de comportement

#### 2.2.4.1. Relation de comportement dynamique

Elle relie la quantité d'accélération  $\ddot{u}$  à  $\dot{u}$  ( $\rho$  désigne la masse volumique) :

$$\ddot{u} = \dots$$

[]

#### 2.2.4.2. Relation de comportement matériau

Décomposons la contrainte  $\sigma$  en partie sphérique et partie déviatorique :

$$\sigma = \dots$$

Pour la partie sphérique, on utilise le modèle de Murnagham [DOU 92] qui relie la pression  $p$ , le volume massique  $v$  et la température  $T$  :

$$p = \dots$$

[]

où la fonction  $p_0$ , appelée « pression froide », est définie par :

$$p_0 = \dots$$

–  $p_0$ ,  $v_0$  et  $T_0$  sont respectivement la pression, le volume massique et la température à l'état de référence du matériau. Pour simplifier, nous supposons que cet état correspond à l'état initial du matériau.

–  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  sont des paramètres du matériau et  $c_v$  est la capacité calorifique massique.

Pour la partie déviatorique de la contrainte, le comportement est du type plasticité à écrouissage isotrope linéaire. Introduisons les grandeurs tournées :

$$\dots$$

$J$  désigne le jacobien de la transformation  $\dots$  et  $\omega$  la rotation du corotationnel définie par le système différentiel :

$$\mathbf{\bar{\omega}}$$

où  $\mathbf{\bar{\omega}}$  est le taux de rotation (partie antisymétrique du gradient de vitesses).

En notant  $\mathbf{\bar{\sigma}}$  le déviateur d'un opérateur  $\mathbf{\bar{\sigma}}$ , les relations définissant le comportement du déviateur de la contrainte s'écrivent :

– pour les lois d'état

□

$$\mathbf{\bar{\sigma}} = \mathbf{\bar{\sigma}}^e + \mathbf{\bar{\sigma}}^p$$

où  $\mathbf{\bar{\sigma}}^e$  est la partie élastique de  $\mathbf{\bar{\sigma}}$ ,  $\mu$  le module de cisaillement,  $\sigma_0$  la modification du seuil d'élasticité,  $a$  la déformation plastique cumulée et  $k$  le coefficient qui caractérise l'évolution linéaire du seuil

– pour les lois d'évolution

□

$$\dot{\mathbf{\bar{\sigma}}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{\bar{f}}$$

où  $\dot{\lambda}$  est la partie plastique de  $\dot{\mathbf{\bar{\sigma}}}$ ,  $\dot{\lambda}$  le multiplicateur plastique et  $f$  la fonction seuil définie par :

$$f = \sigma_0 + k a$$

$\sigma_0$  est le seuil initial et  $f$  est définie par :

$$\mathbf{\bar{\sigma}} = \mathbf{\bar{\sigma}}^e + \mathbf{\bar{\sigma}}^p$$

La vitesse déformation totale est :  $\mathbf{\bar{\epsilon}} = \mathbf{\bar{\epsilon}}^e + \mathbf{\bar{\epsilon}}^p$

### 2.2.5. Premier principe de la thermodynamique

Comme le problème est adiabatique, en notant  $e$  l'énergie interne, on a :  $\dot{e} = \mathbf{\bar{\sigma}} : \mathbf{\bar{\epsilon}} - \dot{q}$ . En introduisant le volume massique et en utilisant la conservation de la masse, on obtient :

$$\dots$$

[]

L'énergie interne est donnée par :

$$\dots$$

[]

avec :

$$\dots$$

REMARQUE. — Il est facile de vérifier que [] s'écrit aussi :

$$\dots$$

[]

où l'énergie libre  $\dots$  est donnée par :

$$\dots$$

[]

$\dots$  et  $\dots$  sont respectivement l'énergie libre et l'entropie à l'état de référence du matériau et le coefficient de Gruneisen  $\dots$  est une fonction du volume massique qui est ici de la forme :

$$\dots$$

où  $\dots$  est un paramètre du matériau.

### 2.3. Discrétisation du problème

Le problème de référence (équations [] à []) ne peut pas être résolu explicitement. Pour obtenir une approximation de la solution, on introduit des hypothèses de

discrétisation en espace et en temps qui conduisent à un modèle discret dont la solution est obtenue numériquement.

### 2.3.1. Discrétisation en espace

Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage du domaine matériel initial  $\Omega_0$ . Le maillage  $\mathcal{T}_h$  à un instant  $t$  est défini par le transport de  $\mathcal{T}_h$  par le champ de déplacement éléments finis  $\mathbf{u}_h$  (approche lagrangienne totale). Ce champ est de la forme :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i \in \mathcal{N}_h} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{d}_i(t) \quad (1)$$

où  $\mathbf{N}_i$  est la matrice des fonctions de formes éléments finis et  $\mathbf{d}_i(t)$  le vecteur des inconnues nodales à l'instant  $t$ .

En affaiblissant les équations d'équilibre (1) relativement au sous-espace des champs de déplacement définis par (1) et en prenant en compte les relations de comportement (2) à (4), on obtient le résultat classique :

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} - \mathbf{C} \quad (2)$$

où :

- $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,
- $\mathbf{C}$  est le vecteur associé à la contrainte dont la  $i^{\text{ème}}$  composante est :

$$C_i = \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_i^T \mathbf{c} \, d\Omega_0$$

$\mathbf{N}_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  fonction de base,

- $\mathbf{F}$  est le vecteur des forces extérieures généralisées :

$$F_i = \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_i^T \mathbf{f} \, d\Omega_0$$

### 2.3.2. Discrétisation en temps

La résolution de (2) utilise le schéma d'intégration en temps des différences centrées. De façon précise, on divise l'intervalle de temps  $\Delta t$  en  $N$  sous-intervalles de longueur  $\Delta t/N$  :

[REDACTED]

Dans le schéma explicite des différences centrées, les demi-pas de temps :

[REDACTED]

jouent un rôle particulier. En effet, à partir de [REDACTED], le schéma explicite consiste à déterminer [REDACTED] par les équations :

[ ]

[REDACTED]

avec les conditions initiales :

[ ]

[REDACTED]

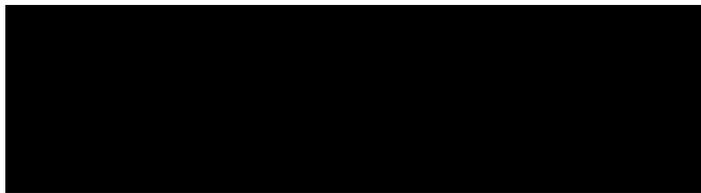
Dans [ ] et [ ], [REDACTED] est une matrice de masse diagonalisée. Elle est obtenue par assemblage de matrices de masse élémentaires [REDACTED] diagonalisées au niveau de chaque élément  $E$  par la technique :

[REDACTED]

D'autre part, [REDACTED] et [REDACTED] sont définis par :

[ ]

[ ]



Compte tenu du comportement envisagé ici, la contrainte de Cauchy  $\sigma$  dépend de la vitesse qui n'est pas connue explicitement à l'instant  $t$ . On utilise donc, dans les équations d'équilibre la contrainte de Cauchy «la plus proche», c'est-à-dire  $\sigma$  calculée à partir de la vitesse à  $t$ . Néanmoins, on intègre sur  $\Omega$  car le champ de vitesse au demi-pas est connu sur cette configuration. Cette utilisation de quantités « non-synchrones » dans les équations d'équilibre est nécessaire pour rendre le schéma explicite.

### 2.3.3. Intégration du comportement

Le calcul de  $\sigma$  nécessite le calcul de  $\epsilon$  puis l'intégration en espace du produit de la contrainte de Cauchy par le gradient des fonctions de forme éléments finis. Comme le comportement est non linéaire, cette intégration spatiale est réalisée numériquement, de manière approchée, en utilisant un certain nombre de points d'intégration (points de Gauss en général). Leur nombre est un compromis entre le coût de stockage et la qualité de l'intégration. Très souvent, pour les calculs de dynamique rapide, on utilise un minimum de points d'intégration et les techniques de sous-intégration sont courantes.

En pratique, l'évaluation de la contrainte de Cauchy en un point de Gauss et à un instant donné comprend deux étapes principales :

- l'intégration du comportement relatif au déviateur de la contrainte,
- le traitement spécifique de la pression.

Le détail de ces techniques est donné dans l'annexe I.

REMARQUE. — En dynamique rapide, il est fréquent d'utiliser deux autres ingrédients numériques pour améliorer la qualité des résultats : la pseudo-viscosité [VON 50], [WIL 80] et des corrections spécifiques pour compenser les effets de la sous-intégration [FLA 81]. Les méthodes que nous développons dans la suite s'appliquent aussi dans ces cas.

## 3. Erreur en relation de comportement

La démarche de l'erreur en relation de comportement repose sur le partitionnement des équations du problème de référence en deux groupes :

- les conditions d'admissibilité  $[\sigma]$ ,  $[\epsilon]$ ,  $[\sigma]$  et  $[\epsilon]$ ,

- les relations de comportement  $[\sigma], [\sigma]$  et  $[\sigma]$ .

En effet, les relations de comportement sont souvent les moins fiables de toutes les équations du modèle de référence. Aussi, il est naturel de considérer des solutions approchées qui vérifient exactement les conditions d'admissibilité et de quantifier la qualité par la façon dont les relations de comportement sont vérifiées.

### 3.1. Solution admissible

DEFINITION. — Une solution  $[\sigma]$  est admissible si et seulement si elle vérifie les cinq propriétés (Adi) suivantes :

- (Ad1) :  $[\sigma]$  est un champ de déplacement cinématiquement admissible qui vérifie donc les équations de liaisons et les conditions initiales  $[\sigma]$ ,
- (Ad2) : le couple  $[\sigma]$  est dynamiquement admissible. Il vérifie donc les équations d'équilibre  $[\sigma]$  pour l'histoire de configuration  $[\sigma]$  de la structure associée au champ de déplacement admissible  $[\sigma]$ .

On décompose  $[\sigma]$  en partie sphérique et partie déviatorique sous la forme :

$$[\sigma] = [\sigma] + [\sigma]$$

- (Ad3) :  $[\sigma]$  est le volume massique admissible. Il vérifie l'équation de conservation de la masse pour le champ de déplacement admissible  $[\sigma]$  :

$$[\sigma] = [\sigma]$$

- (Ad4) :  $[\sigma]$  est l'énergie interne admissible. Elle vérifie l'équation :

$$[\sigma] = [\sigma]$$

où  $[\sigma]$  est le taux de déformation associé au champ de vitesse  $[\sigma]$ .

- (Ad5) :  $[\sigma]$  est la température admissible. Elle vérifie :

$$[\sigma] = [\sigma]$$

REMARQUE. — Pour une solution admissible, l'histoire de la configuration est définie par le champ  $\mathbf{c}$ . Les grandeurs tournées sont donc relatives à la rotation  $\mathbf{c}$  définie par :

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$$

avec :

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$$

### 3.2. Construction de la mesure d'erreur

La mesure d'erreur que nous allons construire est une extension de la mesure d'erreur de Drucker introduite en dynamique [LAD 01]. A une solution admissible  $\mathbf{c}$  on associe, par les relations de comportement, les quantités suivantes :

– au champ  $\mathbf{c}$ , on associe le déviateur d'une contrainte tournée  $\mathbf{s}$  en intégrant la relation de comportement  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{c})$  pour l'histoire de déformation donnée par  $\mathbf{c}$ , avec :

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{c})$$

On en déduit alors le déviateur "non tourné" :

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{c})$$

– au volume massique  $\rho$  et pour la température  $\theta$ , on associe la pression  $p$  par la relation  $p = p(\rho, \theta)$  :

$$p = p(\rho, \theta)$$

– à la vitesse  $\mathbf{v}$ , on associe la quantité d'accélération :

- [REDACTED]
- au déviateur de la contrainte dynamiquement admissible tournée :

[REDACTED]

on associe, par intégration de la relation de comportement inverse de  $[\sigma]$ ,  $[\dot{\epsilon}]$ , le déviateur du taux de déformation tourné [REDACTED] puis :

- [REDACTED]
- à la pression [REDACTED], on associe le volume massique [REDACTED] en inversant, pour la température [REDACTED] donnée, la relation :

□

[REDACTED]

Pour la loi de Murnagham, cette inversion n'est possible que si (annexe II) :

- [REDACTED]
- enfin, à la quantité d'accélération [REDACTED], on associe une accélération [REDACTED] puis une vitesse [REDACTED] par intégration en temps :

[REDACTED]

Alors, pour tout [REDACTED], on pose :

[REDACTED]

avec :

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

REMARQUE. — Compte tenu de : [REDACTED], on obtient :

[REDACTED]

puis :

[REDACTED]

[REDACTED]

En introduisant dans [REDACTED] les grandeurs tournées [REDACTED] et [REDACTED], on obtient :

[REDACTED]

[REDACTED]

On a les propriétés :

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

Les démonstrations de ces trois propriétés sont données dans l'annexe III.

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont choisis tels que :  $\dots$ . Dans ces conditions, on a :  $\dots$ . L'erreur en relation de comportement sur  $\dots$  associée à  $\dots$  est alors définie par :

$$\dots$$

□

REMARQUE. — Les coefficients  $a$  et  $b$  permettent de pondérer l'erreur sur le comportement dynamique par rapport à celle sur le comportement du matériau et, dans cette dernière, de pondérer la part de l'erreur relative au déviateur par rapport à celle relative à la pression. Le choix de ces coefficients est fait en fonction du degré de confiance que l'on a sur ces différentes relations de comportement. Usuellement, on les fixe à 0,5.

PROPRIÉTÉ. — L'erreur  $\dots$  est nulle si et seulement si  $\dots$  est solution du problème de référence.

La démonstration est immédiate à partir des propriétés  $\dots$ ,  $\dots$  et  $\dots$ .

A partir de l'erreur absolue, on peut définir une erreur relative en posant :

$$\dots$$

□

avec :

$$\dots$$

#### 4. Mise en œuvre de la mesure d'erreur

Le calcul des erreurs  $\dots$  et  $\dots$  nécessite, à partir de la solution du problème discrétisé, de construire une solution admissible  $\dots$ . D'autre part, la qualité de cette reconstruction conditionne la qualité des mesures d'erreur associées. Cette construction est menée en trois grandes phases :

- **Phase 1** : Construction d'un champ  $\mathbf{v}^n$  admissible.
- **Phase 2** : Construction d'un couple de champs  $(\mathbf{v}^n, \mathbf{a}^n)$  contrainte de Cauchy-quantité d'accélération dynamiquement admissible pour l'histoire de configuration  $\mathbf{c}^n$  associée au déplacement admissible  $\mathbf{u}^n$  construit dans la phase 1.
- **Phase 3** : Construction des autres quantités admissibles.

Afin de simplifier, nous nous limiterons ici au cas où l'on utilise le schéma d'intégration en temps des différences centrées pour des pas de temps constants. Néanmoins, les méthode s'appliquent aussi pour des pas de temps variables et pour des schémas implicites [LAD 01].

#### 4.1. Construction d'un champ de déplacement admissible

Cette construction, présentée en détail dans [COM 00] et [LAD 01], consiste à construire la vitesse  $\mathbf{v}^n$  en s'appuyant sur les vitesses calculées au demi-pas de temps par le schéma des différences centrées. Avec les notations de 2.3, posons :

$$\mathbf{v}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^{n-1/2}}{\Delta t}$$

et :

$$\mathbf{a}^n = \frac{\mathbf{v}^{n+1/2} - \mathbf{v}^{n-1/2}}{\Delta t}$$

On construit alors  $\mathbf{v}^n$  par interpolation linéaire en temps entre les valeurs précédentes. De façon précise, on pose :

$$\mathbf{v}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{n-1/2} + \mathbf{v}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{a}^{n-1/2} - \mathbf{a}^{n+1/2})$$

$\mathbf{v}^n$  est alors obtenu par intégration en temps avec la condition initiale :

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^0$$

Les exemples présentés dans [COM 99], [COM 00] montrent la robustesse de cette reconstruction du champ de déplacement.

REMARQUE. — Avec ce choix, on a , en général :  $\mathbf{v}^n = \mathbf{v}^n$ .

La configuration admissible  $\mathcal{C}_n$  est donc différente de la configuration "éléments finis"  $\mathcal{C}_h$ . Néanmoins, pour une discrétisation en temps suffisamment fine, ces deux configurations sont très proches. Nous allons exploiter cette propriété dans la construction des champs dynamiquement admissibles.

#### 4.2. Construction des champs dynamiquement admissibles

Il s'agit de construire un couple  $(\mathbf{u}, \mathbf{f})$  qui, à tout instant  $t$ , vérifie l'équilibre sur la configuration  $\mathcal{C}_n$  :

$$\int_{\mathcal{C}_n} \rho \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{C}_n} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \int_{\mathcal{C}_n} \rho \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_n$$

La construction s'inspire des techniques générales de construction de champs de contrainte admissibles élaborées en quasi-statique et de celles déjà mises au point pour la dynamique linéaire [LAD 01].

Le principe de la méthode consiste, dans un premier temps, à construire à chaque instant  $t_n$ , un couple  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n)$  en équilibre relativement à la configuration  $\mathcal{C}_n$ . Dans un second temps, une interpolation en temps permet de construire le couple  $(\mathbf{u}, \mathbf{f})$  à tout instant  $t$ . Comme le problème traité est fortement non linéaire, la construction de champs  $(\mathbf{u}, \mathbf{f})$  rigoureusement admissibles est impossible. Les champs construits ne seront admissibles que de façon approchée. Afin de pouvoir améliorer la qualité des champs construits, on introduit une sous-discrétisation en temps par sous-découpage de la discrétisation en temps utilisée pour le calcul éléments finis. Sur chaque  $\mathcal{C}_n$ , on introduit les sous-pas de temps :

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$$

On va donc construire des couples  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n)$  rigoureusement admissibles relativement à la configuration  $\mathcal{C}_n$  et l'interpolation linéaire est effectuée sur les intervalles de la sous-discrétisation. En jouant sur la valeur de  $P$ , on peut ainsi améliorer la qualité des champs construits. Dans [COM 00], il est montré que pour des discrétisations en temps fines, il suffit généralement de prendre :  $P \approx 4$  ; par contre, pour des pas de temps plus grossiers, une valeur de  $P$  de l'ordre de 3 ou 4

semble être un bon compromis coût-qualité. Explicitons ces techniques dans le cas de maillages utilisant des triangles à 3 nœuds.

#### 4.2.1. Construction des couples admissibles à un instant donné

La construction de  $\mathbf{d}_E$  à  $t$  est effectuée en trois étapes :

- construction de densités d'efforts  $\mathbf{d}_E$  sur les faces des éléments  $E$  dans la configuration  $\mathbf{c}_E$ ; ces densités sont destinées à représenter les vecteurs contraintes sur les faces des éléments sous la forme :

$$\mathbf{d}_E = \mathbf{d}_E \mathbf{n}_E$$

où  $\mathbf{n}_E$  est le vecteur normal unité extérieur à  $E$  et  $\mathbf{d}_E$  une fonction constante par face, qui vaut 1 ou -1 et telle que :  $\mathbf{d}_E = -\mathbf{d}_{E'}$  pour deux éléments  $E$  et  $E'$  adjacents,

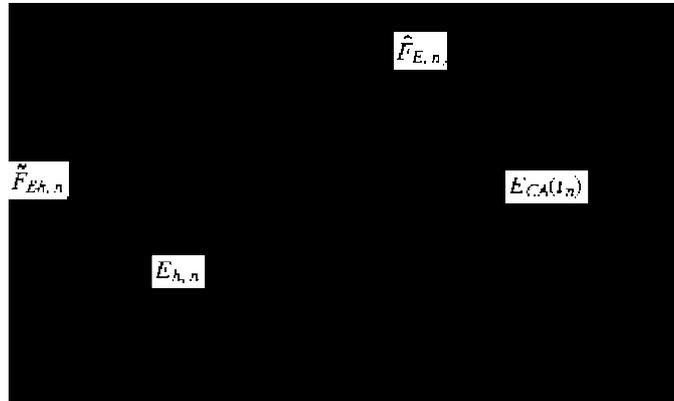
- calcul de  $\mathbf{d}_E$  sur chaque élément,
- calcul de  $\mathbf{d}_E$  sur chaque élément.

Pour construire les densités d'effort, on commence par construire des densités (linéaires sur chaque face)  $\mathbf{d}_E$  sur la configuration  $\mathbf{c}_E$  à l'instant  $t$ . Cette construction, analogue à celle utilisée en dynamique linéaire, est rappelée dans l'annexe IV.

On transporte ensuite ces densités sur la configuration  $\mathbf{c}_E$  en actualisant les coordonnées des nœuds et en conservant aux nœuds la valeur des densités. La figure 2 illustre ce transport. On obtient ainsi les densités  $\mathbf{d}_E$  aux instants  $t_n$  de la discrétisation en temps. Pour déterminer les  $\mathbf{d}_E$  sur la configuration  $\mathbf{c}_E$  à l'instant  $t$ , on calcule  $\mathbf{d}_E$  par interpolation linéaire :

$$\mathbf{d}_E = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_E$$

et l'on transporte comme précédemment ces densités sur la configuration  $\mathbf{c}_E$ .



**Figure 2.** *Transport des densités*

Les quantités d'accélération  $\tilde{F}_{E^k,n}$  sont construites de façon que :

$$\tilde{F}_{E^k,n} = \hat{F}_{E,n} + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{F}_{E,n}}{\partial x} (x - x_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{F}_{E,n}}{\partial y} (y - y_c) \quad (2.1)$$

pour tout champ de solide rigide défini sur  $\Omega$ .

En pratique, on recherche  $\tilde{F}_{E^k,n}$  sous forme polynomiale simple : par exemple linéaire sur l'élément ou constant sur chacun des trois sous-triangles construits à partir du centre d'inertie du triangle. Dans les deux cas, le champ  $\tilde{F}_{E^k,n}$  est définie par six inconnues. les équations (2.1) fixent trois de ces inconnues. Les trois autres sont fixées en minimisant l'écart entre  $\tilde{F}_{E^k,n}$  et le champ obtenu par éléments finis. De façon précise, on minimise la quantité :

$$\int_{\Omega} (\tilde{F}_{E^k,n} - F_{E^k,n})^2 dx dy \quad (2.2)$$

où  $F_{E^k,n}$  est obtenue en interpolant linéairement les quantités éléments finis  $F_{E^k,n}$  et  $F_{E^k,n}$  en  $F_{E^k,n}$  et en transportant le résultat sur la configuration  $\Omega$ .

Le champ  $\tilde{F}_{E^k,n}$  est alors construit élément par élément comme solution de :



Ce problème admet des solutions compte tenu de la condition d'équilibre  $[\ ]$  imposée dans la construction de  $[\ ]$ . Toutes les techniques mises au point pour les problèmes d'élasticité linéaire peuvent être utilisées pour obtenir une solution de ce problème : construction analytique par sous-triangles ou résolution numérique approchée [LAD 01]. Cette technique détermine la partie plane de  $[\ ]$ . Pour écrire le comportement "matériau" on complétera  $[\ ]$  par une troisième ligne et une troisième colonne sous la forme :



où le choix de  $[\ ]$  est explicité ci-dessous.

#### 4.2.2. Construction des autres quantités admissibles

Le calcul de  $[\ ]$  est immédiat à partir de  $[\ ]$  :  $[\ ]$  où  $[\ ]$  est le jacobien de la transformation :  $[\ ]$ .

Le calcul des quantités  $[\ ]$  et  $[\ ]$  dépend uniquement du choix de  $[\ ]$ . En effet, on a :



L'idéal serait de déterminer  $[\ ]$  en minimisant l'erreur globale mais cela conduit à des calculs très volumineux. En pratique, on prend :

$[\ ]$



ce qui revient à minimiser :

$$\int_{\Omega} \dots$$

où  $\Omega$  désigne la partie plane de l'opérateur  $\mathcal{L}$ .

REMARQUE. — Pour obtenir  $\mathcal{L}^{-1}$ , il faut intégrer la relation de comportement  $\sigma = \mathcal{L} \epsilon$ ,  $\epsilon = \mathcal{L}^{-1} \sigma$ . Cette intégration est effectuée en utilisant la sous-discrétisation introduite ci-dessus.  $\mathcal{L}^{-1}$  étant calculé par  $\mathcal{L}$ , on peut déterminer toutes les autres grandeurs admissibles. Cependant pour pouvoir calculer l'erreur, il faut aussi pouvoir inverser  $\mathcal{L}$ . On doit donc s'assurer que :

$$\mathcal{L}^{-1} \sigma = \epsilon$$

Si ce n'est pas le cas, on fixe :  $\epsilon = \mathcal{L}^{-1} \sigma$ , on calcule  $\sigma$  par  $\mathcal{L} \epsilon$  et alors  $\mathcal{L}^{-1} \sigma$  n'est plus donné par  $\mathcal{L}^{-1}$  mais par :

$$\mathcal{L}^{-1} \sigma = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} \mathcal{L}^{-1} \sigma$$

La valeur choisie  $\epsilon = \mathcal{L}^{-1} \sigma$  correspond en pratique à la limite de validité reconnue pour la loi de Murnaghham.

## 5. Exemple de mise en œuvre

### 5.1. Description du cas test

Cet exemple (figure 3) est la simulation d'un pseudo « essai de Taylor » où le contact est remplacé par la donnée d'un champ de vitesse sur une partie de la structure. Il est clair que notre modélisation est loin de pouvoir représenter fidèlement le problème réel. Les dimensions du lopin sont :  $l = 10$  et  $h = 1$ .

L'intervalle de temps d'étude est  $t \in [0, 1]$ . Le lopin est encastré à gauche et on le soumet à une vitesse imposée  $v = 1$  sur son flan droit. L'excitation choisie est sensée représenter l'action de l'impacteur. Les caractéristiques du matériau, fournies par le CEG, correspondent à une nuance d'aluminium :

- relation de comportement relative au déviateur de la contrainte

valeur initiale du seuil de plasticité : [REDACTED], module de cisaillement : [REDACTED], coefficient de linéarité de la loi d'état liant le seuil de plasticité à la déformation plastique cumulée [REDACTED]

– relation de comportement relative à la pression

capacité calorifique massique : [REDACTED], coefficient de Gruneisen de référence : [REDACTED], exposant (coefficient de calage) : [REDACTED], coefficient de dilatation isotherme : [REDACTED].

Les conditions initiales sont : masse volumique de référence : [REDACTED], température de référence : [REDACTED], pression de référence : [REDACTED], énergie interne de référence : [REDACTED], déplacement initial et vitesse initiale nuls.

Les éléments finis utilisés sont des triangles droits à trois nœuds de degré 1.

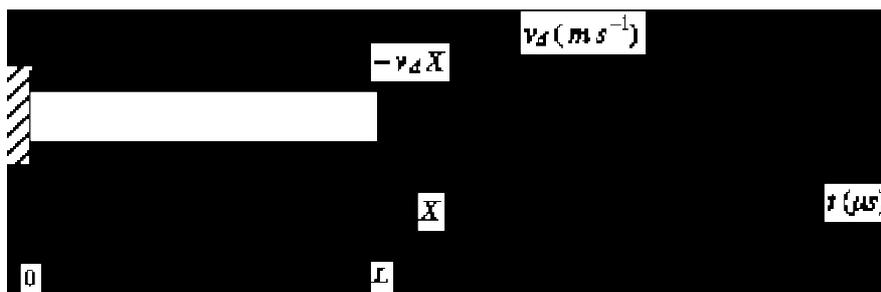


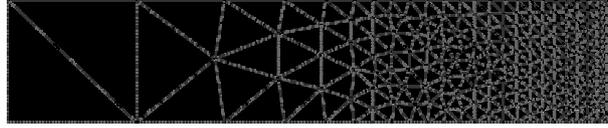
Figure 3. Cas test

### 5.2. Un premier calcul

Pour ce calcul, nous avons choisi comme pas de temps : [REDACTED]. Le maillage utilisé est représenté sur la figure 4.

La mise en œuvre des méthode décrite dans les paragraphes précédents conduit à une estimation de l'erreur globale de 28,5 %. La figure 5 donne les cartes d'erreur à différents instants.

Il est à noter que la variation relative de longueur est de 5 % et celle de hauteur est de plus 43 % à [REDACTED].

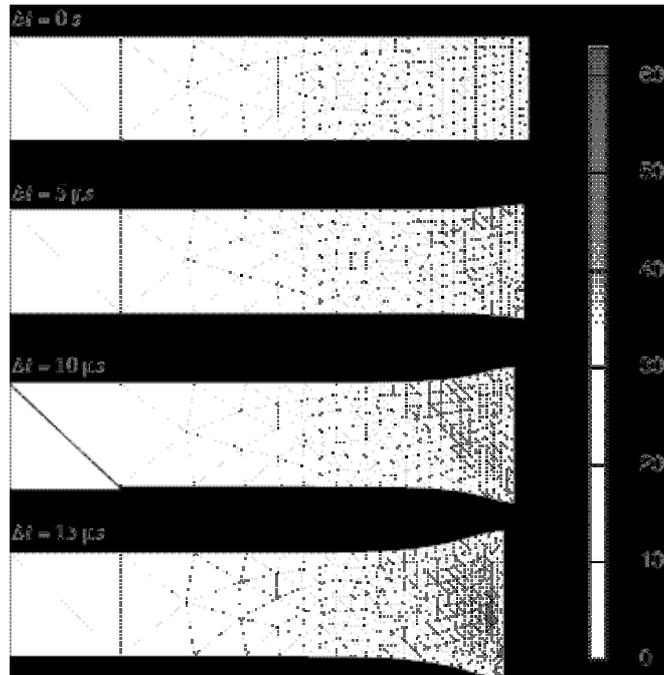


**Figure 4.** Premier cas test . Maillages initial (380 éléments)

### 5.3. Influence de la discrétisation en temps et de la discrétisation en espace

#### 5.3.1. Choix du pas de temps

Afin d'étudier l'influence de  $\Delta t$  sur notre mesure d'erreur, nous avons réalisé plusieurs calculs pour des pas de temps variant de  $0,5 \mu s$  à  $2 \mu s$ .

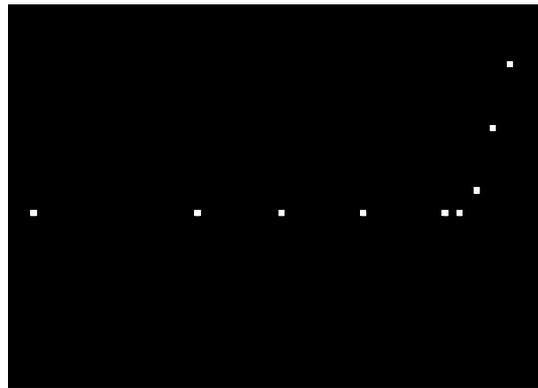


**Figure 5.** Cartes d'erreurs et déformés (éch : 1)

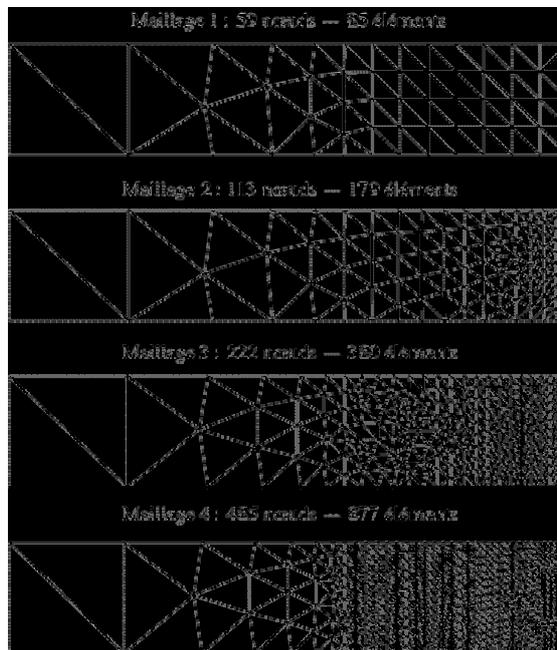
On observe numériquement que, au delà de  $10 \mu s$ , le calcul diverge. Les résultats obtenus (figure 6) montre que le pas de temps n'a pas d'influence sur le niveau de l'erreur tant que  $\Delta t < 10 \mu s$ .

Ensuite l'erreur augmente fortement pour atteindre près de 70 % pour [redacted] ce qui correspond au dernier point où le calcul a été possible.

A titre de comparaison, pour le maillage de la figure 4 et pour un comportement élastique, le pas de temps critique est : [redacted].



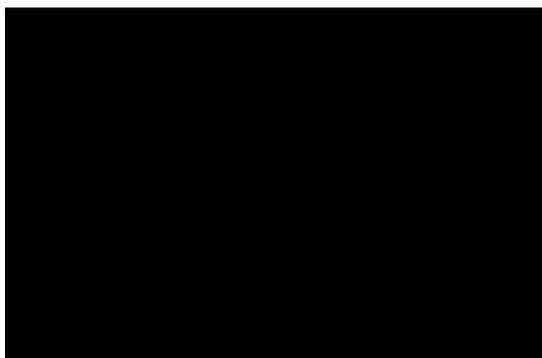
**Figure 6.** Influence de la taille du pas de temps



**Figure 7.** Maillages utilisés

### 5.3.2. Influence de la discrétisation en espace

Afin d'évaluer l'influence du maillage, nous avons repris le cas test pour 4 maillages différentes (figure 7).



**Figure 8.** Influence du maillage

Pour choisir le pas de temps, nous avons calculé sur chaque maillage [REDACTED] ; on a obtenu pour le maillage n°1 : [REDACTED], pour le n°2 : [REDACTED], pour le n°3 : [REDACTED] et pour le n° 4 : [REDACTED].

En conséquence, nous avons fait le calcul pour chaque maillage avec : [REDACTED]. Les résultats de l'estimation d'erreur sont donnés sur la figure 8.

Sur chacun de ces maillages, nous avons aussi constaté que le pas de temps a très peu d'influence sur l'erreur tant que l'on ne s'approche pas trop de la limite de stabilité.

Les premiers tests présentés ci-dessus montrent que l'estimateur d'erreur en relation de comportement proposé fonctionne correctement. Ces premiers résultats confirment que la qualité d'un calcul en dynamique rapide dépend essentiellement du choix du maillage à condition bien sûr que les pas de temps soient choisis de façon à assurer la stabilité.

## 6. Bibliographie

- [AIN 97] AINSWORTH M., ODEN J.T., « A posteriori error estimation in finite element analysis », *Comput. Methods Appl., Mech. Eng.*, 1997, 142, 1-88
- [COM 99] COMBE J.P., LADEVÈZE P., PELLE J.P., « Constitutive relation error estimator for transient finite element analysis », *Comput. Methods Appl., Mech. Eng.*, 1999, 176 (1-4), 165-185

- [COM 00] COMBE J.P., « Sur le contrôle des calculs en dynamique rapide - Application aux problèmes d'impacts », Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2000.
- [COO 99] COOREVITS P., HILD P., PELLE J.P. « A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and nonmatching meshes », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1999, 46, 157-176.
- [DOU 92] DOUBAX F., « Caractérisation et modélisation de la transformation polymorphique et de l'endommagement dynamique de l'acier MARS », Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1992.
- [FLA 81] FLANAGAN D.P., BELYTSCHKO T., « A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control », *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 1981, 17, 679-706.
- [GAL 96] GALLIMARD L., LADEVÈZE P., PELLE J.P., « Error estimation and adaptivity in elastoplasticity », *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 1996, 39, n°2, 189-217.
- [HUG 80] HUGHES T.J.R., WINGET J., « Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equation arising in large deformation analyses », *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 1980, 15, 1862-1867.
- [LAD 96] LADEVÈZE P., *Mécanique non linéaire des structures*, Editions Hermès, Paris, 1996.
- [LAD 01] LADEVÈZE P., PELLE J.P., *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Editions Hermès, Paris, 2001.
- [LOU 02] LOOF F., COMBE J.P., PELLE J.P. « Estimation d'erreur pour les problèmes de contact unilatéral avec frottement », *Revue Européenne des Eléments Finis*, 2002, Vol 10 (8), 907-928.
- [ORT 86] ORTIZ M., SIMO J.C., « An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations », *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 1986, 23, 353-366.
- [VON 50] VON NEUMANN J., RICHTMYER R.D., « A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks », *Journal of Applied Physics*, 1950, vol. 21, 232-237.
- [WIL 80] WILKINS M.L. « Use of artificial viscosity in multidimensional fluid dynamic calculation », *Journal of Computational Physics*, 1980, vol. 36, 281-303.

## Annexe I. Intégration du comportement

### **Préparation**

Avant d'intégrer le comportement en tant que tel, il est nécessaire de calculer en chaque point d'intégration :

- le jacobien  $J$  de la transformation à  $t_n$

$\mathbf{F}_n$

- la masse volumique  $\rho$  et le volume massique  $v$  à  $t$

Ils sont évalués à partir l'équation de conservation de la masse, écrite sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \, dv = 0$$

- le taux de rotation à  $t$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \, dv = 0$$

où  $\nabla v$  est le gradient eulérien sur la configuration  $\Omega$  de la vitesse au demi-pas  $t$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \, dv = 0$$

- la rotation du corotationnel

L'intégration du système différentiel :  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \mathbf{v}$  est effectuée moyen de l'algorithme de Hughes et Winget [HUG 80]. Dans le cadre de problèmes bidimensionnels en déformation plane,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{v}$  sont de la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} & \dot{\omega} \\ -\dot{\omega} & \dot{\epsilon} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{v}$  est solution de l'équation différentielle :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \mathbf{v}$$

Dans ce cas on obtient :

$$\mathbf{v}(t) = \exp(\mathbf{A} t) \mathbf{v}(0)$$

avec :

$$\exp(\mathbf{A} t) = \begin{pmatrix} \cosh(\epsilon t) & \sinh(\epsilon t) \\ -\sinh(\epsilon t) & \cosh(\epsilon t) \end{pmatrix}$$

- le déviateur du taux de déformation et la quantité tournée associée



***Traitement du comportement sur les parties déviatoriques***

On utilise un algorithme de type Ortiz-Simo [ORT 86] adapté aux grandes déformations en travaillant directement sur les grandeurs tournées comme en petites déformations.

***Traitement du comportement sur les parties sphériques***

La pression  $\sigma$  et la température  $\theta$  sont liées par :



[]

Par intégration numérique de [], on a :



[]

puis en utilisant [] :

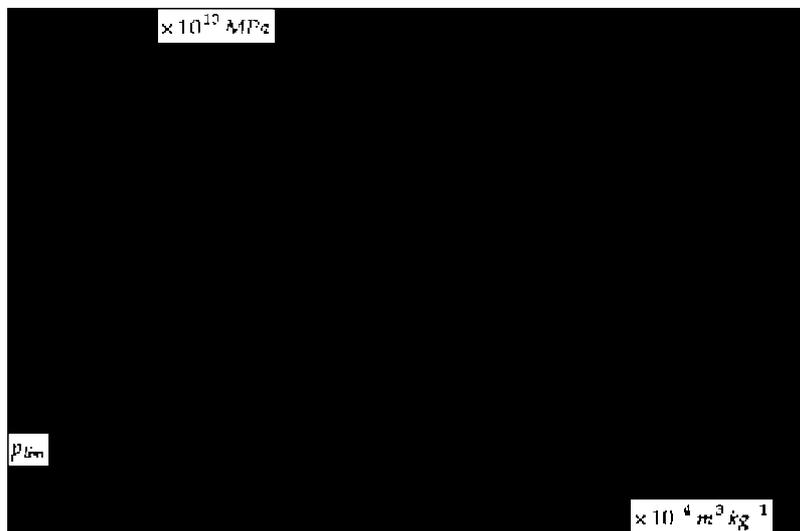
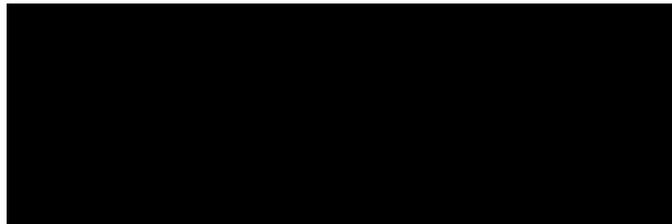


[]

La résolution du système [], [29], [] permet de déterminer la pression  $\sigma$  et la température  $\theta$  :



avec :



**Figure 9.** Loi pression-volume massique

Annexe II. Inversion de la loi pression-volume massique de Murnaghham

La figure 9 donne l'évolution de la pression  $p$  en fonction du volume massique  $v$ .

L'inversion de la loi n'est possible que si : .

Annexe III. Démonstration des propriétés [], [] et []

**Démonstration de []**

On a :

[REDACTED]

Donc, pour tout [REDACTED] et [REDACTED] si et seulement si : [REDACTED].

Si [REDACTED], on a donc : [REDACTED].

Compte tenu des conditions initiales : [REDACTED], on obtient : [REDACTED].

**Démonstration de []**

Utilisons l'expression [] en grandeurs tournées :

[REDACTED]

La relation de comportement qui relie le déviateur [REDACTED] de la contrainte tournée à [REDACTED] est strictement stable au sens de Drucker [LAD 01] :

[REDACTED]

et:

[REDACTED]

On en déduit : [REDACTED]

et si [REDACTED], alors: [REDACTED].

**Démonstration de []**

Utilisons le potentiel [REDACTED] défini par [] et soit [REDACTED] le potentiel conjugué.

Pour [REDACTED] fixé, [REDACTED] et [REDACTED] vérifient le comportement [] si et seulement si :

[REDACTED]

On a donc :

[REDACTED]

En utilisant l'inégalité de Legendre-Fenchel, on obtient :

[REDACTED]

et donc : [REDACTED].  
D'autre part, si : [REDACTED], on obtient :

[REDACTED]

et donc :

[REDACTED]

#### Annexe IV. Construction des densités en dynamique linéaire

En dynamique linéaire, on est dans le cadre de petites perturbations. Toutes les équations sont donc écrites sur la même configuration que nous noterons  $\mathcal{C}$ . Dans ce cadre la construction des densités est une simple extension des constructions réalisées en quasi-statique. On se place à un instant  $t$ .  
Introduisons la condition de prolongement :  
Pour tout élément  $E$  du maillage et pour toute fonction de base  $\phi$  :

□

[REDACTED]

où l'accélération  $a$  est définie sur chaque élément  $E$  par :

[REDACTED]

En utilisant les conditions d'admissibilité :



on obtient :



□

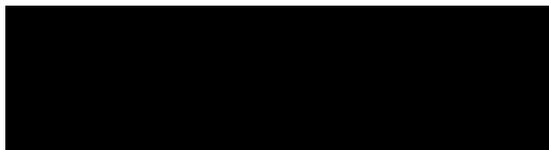
où le second membre est un vecteur  connu.

Pour  $i$  fixé les équations □ permettent de déterminer les projections des  sur les fonctions de base [LAD 01]. Rappelons que cette résolution nécessite que, par exemple, pour un nœud intérieur, on ait la condition de compatibilité :



On vérifie facilement que cette condition résulte de l'équation d'équilibre au sens des éléments finis.

Dans le cadre des grandes transformations, cette construction s'adapte sans difficulté majeure. Compte tenu du schéma d'intégration en temps utilisé, on remplace simplement la condition de prolongement □ par :



qui, comme l'équilibre éléments finis, fait intervenir un terme non-synchrone calculé au demi-pas de temps. Tout le reste s'applique sans changement.