
Sur la modélisation des ondes élastiques dans les structures : calculs adaptatif et parallèle avec équilibrage de charges

Bing Tie — Denis Aubry — Jean-Michel Leclère

Laboratoire Mécanique Sols Structures Matériaux (CNRS - UMR8579)
Ecole Centrale Paris
F-92295 Chatenay-Malabry
{tie,aubry,leclere}@mss.ecp.fr

RÉSUMÉ. L'objectif de cet article est de proposer une approche globale qui combine de manière appropriée les calculs adaptatif et parallèle en dynamique transitoire. Une stratégie pour l'équilibrage de charges distribuées entre les processeurs est définie. La méthode de Galerkin discontinue espace-temps est utilisée pour définir un cadre approprié pour le calcul adaptatif en dynamique. Une méthode de décomposition de domaine à deux niveaux utilisant les éléments finis hiérarchiques est proposée pour assurer l'extensibilité du calcul parallèle. Enfin, des premiers résultats numériques sont présentés pour montrer la faisabilité de l'approche.

ABSTRACT. The numerical modelling of middle and high frequency elastic wave propagation in engineering structures often leads to the use of very fine and very expansive finite element models. To develop more reliable and efficient numerical tools for this issue, the adaptive finite element method offers the advantages of locally refined finite element meshes around the wave fronts in an automatically controlled way. Furthermore, the parallel computing proposes a natural way to reduce the computation time and increase the capacity of computers by duplicating processors. The aim of this paper is to propose a global approach which couples the adaptive and the parallel computations for the structural transient analysis. An adaptive and dynamic load balancing strategy is defined. The space-time discontinuous Galerkin method is used in order to assume appropriate frameworks for the adaptive remeshing procedure. A new domain decomposition method is proposed which uses two levels of hierarchical finite element meshes and leads to the scalability of the parallel computation. Several numerical results are presented to show the feasibility of our approach.

MOTS-CLÉS : calcul adaptatif, calcul parallèle, méthode de Galerkin discontinue espace-temps, décomposition de domaine, éléments finis hiérarchiques.

KEYWORDS: adaptive computation, parallel computation, space-time discontinuous Galerkin method, domain decomposition, hierarchical finite elements.

1. Introduction

La modélisation de la propagation d'ondes élastiques dans les structures industrielles en régime transitoire pour les moyennes et hautes fréquences conduit inévitablement à l'utilisation des modèles numériques très fins tant en espace qu'en temps, donc de très grande taille. Ce type de modélisation étant très exigeant en temps de calculs et en taille mémoire nécessite des outils numériques précis et puissants.

Dans un tel contexte, deux catégories de méthodes numériques semblent intéressantes. D'une part, étant donné le caractère très localisé des phénomènes ondulatoires, la méthode des éléments finis adaptatifs présente *a priori* des avantages certains en raffinant localement le maillage éléments finis autour des fronts d'ondes de manière contrôlée et automatique. D'autre part, le calcul parallèle offre une solution naturelle et prometteuse pour réduire le temps de calcul et augmenter la capacité de l'ordinateur en multipliant le nombre des processeurs.

Cependant, deux difficultés en découlent. La première est que le modèle numérique devient mal conditionné, à cause des maillages éléments finis très localement raffinés. La deuxième est liée à la distribution de charges de calcul qui devient hétérogène dans la structure et évolue au cours du temps avec l'adaptation de maillage, ce qui pose des problèmes supplémentaires pour avoir des charges équilibrées sur les différents processeurs au fil du déroulement du calcul dynamique. Pour résoudre ces difficultés, on propose dans cet article une approche globale qui combine de manière appropriée les calculs adaptatif et parallèle en dynamique transitoire, dans laquelle une stratégie pour l'équilibrage dynamique de charges distribuées entre les processeurs est définie et intégrée.

Par ailleurs, on souligne l'utilisation de la méthode de Galerkin espace-temps, qui permet de définir un cadre approprié et stable pour la procédure de remaillage adaptatif en dynamique et pour l'estimation d'erreurs *a posteriori*. Une autre contribution originale de ce travail est de proposer une nouvelle méthode de décomposition de domaine utilisant deux niveaux de maillages d'éléments finis hiérarchiques, ceci dans le but d'assurer l'extensibilité numérique du calcul parallèle.

L'article est organisé de la manière suivante : la section 2 présente la méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps, notamment ses avantages pour la procédure de remaillage adaptatif en dynamique. La section 3 propose la méthode de décomposition de domaine hiérarchique à deux niveaux et son utilisation pour le problème dynamique. La section 4 montre la stratégie choisie pour coupler la procédure adaptative et le calcul parallèle avec l'équilibrage de charges. Enfin, la section 5 est consacrée aux premiers exemples numériques pour montrer la faisabilité de l'approche.

2. La méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps

Dans ce travail, on choisit d'utiliser la méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps à deux champs. On écrit donc les équations de l'élastodynamique sous

la forme d'un système du premier ordre en temps comme suggéré par Johnson dans [JOH 93]. On considère un milieu tridimensionnel Ω soumis à des forces volumiques \mathbf{f} et dont le comportement est régi par la loi élastique $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ désignant le tenseur des petites déformations, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy et \mathbf{C} le tenseur de Hooke d'ordre 4. Etant donnés \mathbf{u} et \mathbf{v} les champs de déplacement et de vitesse définis sur le domaine espace-temps $\Omega \times]0, T[$, le système du premier ordre en temps, qui gouverne l'équilibre dynamique et définit la compatibilité entre \mathbf{u} et \mathbf{v} , est réécrit avec les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{f} &= \rho \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \\ \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad [1]$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_u \times]0, T[\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_\sigma \times]0, T[\end{aligned} \quad [2]$$

et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \Pi \mathbf{u}_0^- \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) &= \Pi \mathbf{v}_0^- \end{aligned} \quad [3]$$

Pour simplifier les notations, on a supposé que les conditions aux limites de Dirichlet sont homogènes et que $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Les conditions initiales sont définies utilisant un opérateur de projection Π , puisqu'on a affaire à une formulation discontinue en temps. En effet, les champs initiaux \mathbf{u}_0^- et \mathbf{v}_0^- peuvent être définis dans des espaces différents que ceux dans lesquels sont calculés \mathbf{u} et \mathbf{v} .

Pour obtenir la formulation faible, la méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps consiste à effectuer une intégration d'emblée espace-temps et de découper le domaine espace-temps $\Omega \times]0, T[$ en des tranches espace-temps $\Omega \times]t_n, t_n + \Delta t[$. Pour simplifier les notations, dans la suite de cet article, on va écrire la formulation faible uniquement sur la première tranche espace-temps, notée $S = \Omega \times]0, \Delta t[$ (voir figure 1). En notant par $V(S)$ l'espace des champs cinématiquement admissibles pour le déplacement et la vitesse sur S , on obtient :

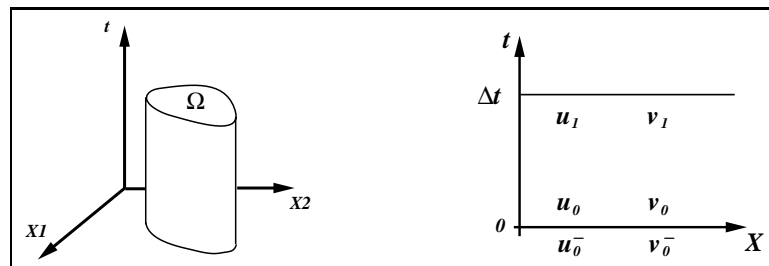


Figure 1. *Domaine espace-temps*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V(S) \text{ tels que } \forall (\mathbf{w}_u, \mathbf{w}_v) \in V(S) : \\ \left(\rho \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{w}_v \right)_S + \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_v) \right)_S + \left(\rho[\mathbf{v}(0)], \mathbf{w}_v(0^+) \right)_\Omega = \left(\mathbf{f}, \mathbf{w}_v \right)_S \\ \left(\boldsymbol{\sigma}(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_u) \right)_S + \left(\boldsymbol{\sigma}([\mathbf{u}(0)]), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_u(0^+)) \right)_\Omega = 0 \end{array} \right. \quad [4]$$

Les parenthèses avec l'indice Ω désignent les intégrales spatiales sur le domaine Ω , celles avec l'indice S les intégrales sur la tranche espace-temps et les termes $[\mathbf{u}(0)] = \mathbf{u}(0^+) - \mathbf{u}(0^-)$ et $[\mathbf{v}(0)] = \mathbf{v}(0^+) - \mathbf{v}(0^-)$ sont les sauts à l'instant initial ($t = 0$). On note que les discontinuités à l'instant initial sont contrôlées de manière faible par ajout dans ([4]) des termes liés à ces sauts.

A priori la discrétisation du problème variationnel ([4]) pourrait se faire en utilisant un maillage espace-temps libre de la tranche S . Dans ce travail, on choisit d'utiliser un maillage espace-temps qui est le produit d'un maillage espace sur Ω et un seul élément fini linéaire en temps, ainsi les variables d'espace et de temps sont séparées. En notant les valeurs des champs au début et à la fin de la tranche respectivement avec un indice 0 et un indice 1 (voir figure 1), on aboutit alors à un schéma semblable à un schéma classique en différences finies. Ce schéma définit un problème en vitesses qui est résolu itérativement : $\bar{\mathbf{v}}_0$ et $\bar{\mathbf{v}}_1$ ayant été déterminés à chaque itération, la résolution du système suivant permet de mettre à jour \mathbf{v}_0 et \mathbf{v}_1 et ceci jusqu'à la convergence :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t^2}{6} \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_0), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \right)_\Omega + \left(\rho \mathbf{v}_0, \mathbf{w} \right)_\Omega \\ &= \left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}_0 - \frac{\Delta t}{6} \mathbf{f}_1, \mathbf{w} \right)_\Omega + \frac{5}{3} \left(\rho \bar{\mathbf{v}}_0, \mathbf{w} \right)_\Omega - \frac{2\Delta t}{3} \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^-), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \right)_\Omega - \frac{2}{3} \left(\rho \bar{\mathbf{v}}_1, \mathbf{w} \right)_\Omega \\ & \frac{\Delta t^2}{6} \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_1), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \right)_\Omega + \left(\rho \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \right)_\Omega \\ &= \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1, \mathbf{w} \right)_\Omega + \left(\rho \bar{\mathbf{v}}_0, \mathbf{w} \right)_\Omega - \Delta t \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^-), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \right)_\Omega - \frac{\Delta t^2}{3} \left(\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{v}}_0), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \right)_\Omega \end{aligned} \quad [5]$$

Une fois les champs de vitesses obtenus, ceux de déplacements sont mis à jour à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0 - \frac{\Delta t}{6} \mathbf{v}_0 + \frac{\Delta t}{6} \mathbf{v}_1), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \right)_\Omega &= \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^-), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \right)_\Omega \\ \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_0 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_1), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \right)_\Omega &= \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^-), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \right)_\Omega \end{aligned} \quad [6]$$

On peut montrer la convergence inconditionnelle de cet algorithme de résolution itérative (cf. [LEC 01]).

On peut démontrer la consistance et la stabilité de la formulation faible espace-temps ([4]). Cette stabilité inconditionnelle est essentielle pour la procédure de remaillage adaptatif en dynamique. En effet, dans l'optique d'effectuer l'adaptation libre de maillage, une condition de stabilité reliant la finesse de discrétisation en espace et celle en temps serait trop contraignante et sa vérification par la procédure de remaillage serait techniquement compliquée, voire irréalisable. L'autre avantage de cette formulation est que les conditions initiales y sont prises en compte par la projec-

tion entre deux espaces pouvant être différents *a priori*. Cela signifie que l'utilisation des maillages incompatibles entre deux tranches espace-temps successives est parfaitement naturelle avec cette formulation. Par conséquent, la consistance et la stabilité sont *a priori* assurées malgré le remaillage adaptatif. Enfin, cette formulation offre un cadre unifié pour définir des indicateurs locaux pour l'estimation d'erreurs *a posteriori* (cf. [AUB 99, LEC 01]).

3. Décomposition de domaine hiérarchique à deux niveaux

La méthode de décomposition de domaine présentée appartient à la catégorie des méthodes sans recouvrement. Son originalité est d'utiliser deux niveaux de maillages dans le cadre des éléments finis hiérarchiques en version h . L'existence du maillage grossier permet la propagation instantanée des informations sur toute la structure et par conséquent d'assurer l'extensibilité numérique. On rappelle que dans la littérature, certains auteurs utilisaient déjà des grilles grossières pour obtenir l'extensibilité numérique. Mais ces grilles grossières sont introduites de manière différente, par exemple, par l'utilisation de préconditionneurs ou par le traitement de sous-domaines flottants (cf. [FAR 94, SMI 96]).

Ici la méthode est présentée en découpant le domaine Ω , pour simplifier, en deux sous-domaines Ω^1 et Ω^2 séparés par une interface Σ . Cette décomposition est appliquée à chaque itération de l'algorithme dynamique, *i.e.* à la résolution des deux problèmes définis par ([5]). On note que ces deux problèmes utilisent le même opérateur auto-adjoint. Pour les résoudre par une méthode primale classique de décomposition de domaine sans recouvrement, le champ de vitesse v (égal à v_0 ou à v_1) se décompose de la façon suivante :

$$v = v^1 + v^2 + v^\Sigma \quad [7]$$

Les champs avec les exposants 1, 2 et Σ appartiennent respectivement aux espaces $V(\Omega^1)$, $V(\Omega^2)$ et $V(\Sigma)$ qui sont des espaces cinématiquement admissibles : les champs de $V(\Omega^1)$ (respectivement de $V(\Omega^2)$) sont nuls sur l'interface Σ et sur Ω^2 (respectivement sur Ω^1) et ceux de $V(\Sigma)$ ne sont non nuls que sur deux rangées d'éléments contenant cette interface (voir figure 2). La résolution primale des problèmes ([5]) consiste donc à le condenser sur l'interface Σ en considérant v^Σ comme inconnue privilégiée. Le problème condensé sur l'interface est ensuite résolu par un algorithme itératif, par exemple, du type gradient conjugué (cf. [SMI 96]).

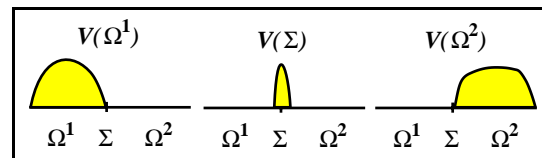


Figure 2. *Espaces pour la décomposition de domaine*

Utilisant deux niveaux de maillages d'éléments finis hiérarchiques en version h (un niveau grossier H et un niveau fin Hh), une décomposition hiérarchique vient s'ajouter à celle définie par [7] (cf. [TIE 99, TIE 98b]). Dans ce cas, la décomposition classiquement en sous-domaines sans recouvrement ne concerne plus que le niveau fin Hh . Le champ v se décompose donc comme suit :

$$v = v_H + v_{Hh}^1 + v_{Hh}^2 + v_{Hh}^\Sigma \quad [8]$$

Deux condensations sont nécessaires pour obtenir le problème condensé sur l'interface fin, qui est résolu par l'algorithme classique de gradient conjugué. Concrètement, chaque itération du gradient conjugué correspond à deux résolutions locales de problèmes de type Dirichlet dans chacun des sous-domaines (niveau fin Hh) et une résolution globale sur le domaine tout entier (niveau H) (cf. [TIE 99, TIE 98a]). Cette résolution globale permettant la propagation d'informations rapide dans tout le domaine est à l'origine de l'extensibilité numérique observée pour cette méthode. On note que cette résolution globale nécessite d'assembler et de factoriser la matrice dite complément de Schur condensée sur le maillage grossier. Néanmoins le coût numérique de ces opérations est assez faible puisqu'*a priori* le maillage grossier contient un très faible nombre d'éléments.

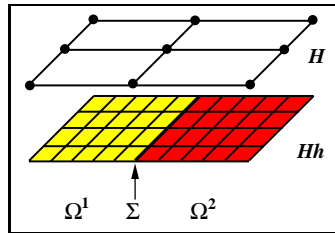


Figure 3. Décomposition de domaines à deux niveaux

Cette méthode de décomposition de domaine peut également être implémentée en version duale. Ceci consiste à traiter le problème défini au niveau fin Hh par la méthode de FETI tout en définissant également le problème au niveau grossier H . Deux condensations sont aussi nécessaires pour obtenir le problème condensé sur l'interface fin, dont l'inconnue privilégiée est le vecteur contraintes sur l'interface. Chaque itération de sa résolution par l'algorithme classique de gradient conjugué correspond à deux résolutions locales de problèmes de type Neumann dans chacun des sous-domaines (niveau fin Hh) et une résolution globale sur le domaine tout entier (niveau H) (cf. [TIE 98a]). Cette méthode duale à deux niveaux hiérarchiques a pour avantage d'éviter le traitement des sous-domaines flottants. Pour ceci, il faut simplement que chaque sous-domaine contienne un nombre suffisant (2 ou 3) de nœuds du niveau grossier. (cf. [TIE 98a]).

Par ailleurs, il est intéressant de noter que les versions duale et primale de notre méthode sont au même niveau en ce qui concerne l'extensibilité numérique sans avoir

besoin de préconditionneur global. C'est pour cette raison que dans la suite, seule la version primale a été choisie pour traiter les problèmes dynamiques.

4. Procédure globale adaptative et parallèle avec équilibrage dynamique de charges

Il existe différentes stratégies pour adapter un maillage éléments finis. Dans ce travail, on utilise la procédure de remaillage adaptatif (cf. [AUB 99]). Pour chaque étape de temps, on effectue un premier calcul utilisant le maillage éléments finis construit à l'étape précédente. A partir des solutions approchées, on calcule des indicateurs d'erreurs locaux pour savoir s'il y a besoin du remaillage adaptatif ou non. Ces indicateurs d'erreurs sont calculés localement sur des patches d'éléments finis en évaluant les résidus locaux, qui permettent de quantifier la non-vérification des équations fortes par les solutions éléments finis. Ils permettent de définir une carte de taille sur toute la structure pour un nouveau maillage optimal (cf. [TIE 93, AUB 99]).

En ce qui concerne le calcul parallèle, son efficacité dépend particulièrement de deux propriétés des algorithmes de résolution utilisés pour sa réalisation : l'optimalité et l'extensibilité numérique. L'optimalité pose des problèmes puisque le conditionnement du modèle éléments finis se dégrade lorsqu'on raffine fortement et localement le maillage (du niveau fin dans le contexte de ce travail). On pense que ce problème pourrait être résolu en adaptant en même temps le niveau grossier de telle sorte que le rapport entre la finesse des deux niveaux reste constante. L'extensibilité numérique permet de garantir la même qualité de convergence lorsqu'on augmente le nombre de sous-domaines. Cette propriété est *a priori* assurée par notre méthode à cause de l'existence d'une grille grossière.

Pour combiner efficacement les calculs adaptatif et parallèle, un aspect crucial est l'équilibrage de charges distribuées sur les processeurs. En effet, lorsque les maillages éléments finis s'auto-adaptent en accord avec l'évolution des phénomènes physiques au fil du déroulement de calculs, ici en l'occurrence ce sont les fronts d'ondes qui se propagent dans la structure, la distribution de charges sur la structure et donc sur les processeurs devient hétérogène en espace et évolue en temps. Pour exploiter de manière optimale la capacité de tous les processeurs, il faut rééquilibrer sans cesse, en accord avec la procédure de remaillage, les charges distribuées aux processeurs (cf. [BAN] par exemple). Notre démarche consiste d'abord à remailler l'ensemble de la structure puis à distribuer les sous-domaines en termes de paquets d'éléments finis sur les processeurs de façon à avoir presque le même nombre d'éléments par processeur. Pour ceci on propose d'utiliser une boîte géométrique, englobant toute la structure, qu'on maille par une grille uniforme. Cette grille est parcourue de façon régulière et continue pour le comptage du nombre d'éléments contenus dans chacune de ses cellules. Un sous-domaine est constitué chaque fois que le nombre d'éléments cumulé atteint le rapport du nombre total d'éléments par le nombre de processeurs. La figure 4 montre la décomposition en 4 domaine d'une structure industrielle 3D par cette méthode.

La procédure globale couplant le remaillage adaptatif et le calcul parallèle avec l'équilibrage dynamique de charge en dynamique transitoire est montrée par le schéma de la figure 4. Cette procédure contient trois boucles successives, soit de l'extérieur à l'intérieur : la boucle de l'incrémentation en temps, la boucle du remaillage adaptatif pour une étape de temps donnée et la boucle de la résolution itérative du système ([5]) dont chaque itération est résolue par le solveur parallèle. Dans cette procédure l'équilibrage dynamique de charges est effectué chaque fois qu'un nouveau maillage est construit.

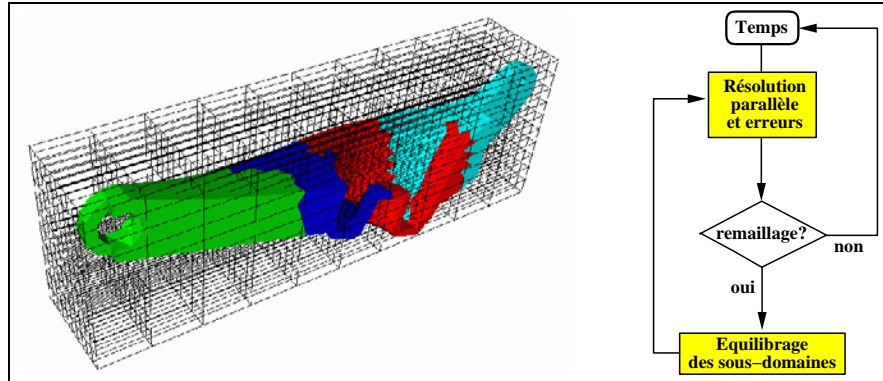


Figure 4. Décomposition de domaines à l'aide d'une grille et processus adaptatif

5. Exemples numériques

5.1. Extensibilité numérique

Pour étudier l'extensibilité de notre méthode de décomposition de domaine à deux niveaux, on considère une plaque membranaire modélisée avec des éléments carrés à 4 nœuds. Cette plaque est encastree à une extrémité et sollicitée à l'autre par une force de cisaillement linéique. Pour le premier groupe de calculs, on fixe les paramètres suivants :

- le rapport entre la finesse du maillage grossier et celle du niveau fin,
- le rapport entre la taille des sous-domaines et la finesse du maillage fin.

Pour cela, on se donne une grille grossière qui correspond à la décomposition en sous-domaines et on augmente le nombre des sous-domaines (2,4,...,64) en allongeant la plaque. Chaque sous-domaine est maillé au niveau fin par 8x8 éléments quad4 carrés de la même taille. La figure 5 montre la convergence en $\|du_i\|/\|u\|$ et en $\|r_i\|/\|r_0\|$ en fonction des itérations du gradient conjugué pour la méthode à deux niveaux en primal (notée "np", n étant le nombre de sous-domaines) et en dual (notée "nd"). On y observe bien l'extensibilité numérique puisque les taux de convergence restent proches

quel que soit le nombre de sous-domaines. On est monté jusqu'à 64 processeurs, ce qui est jugé largement suffisant, compte tenu du fait que nous nous intéressons plus particulièrement au calcul parallèle à gros grain pour les problèmes mécaniques.

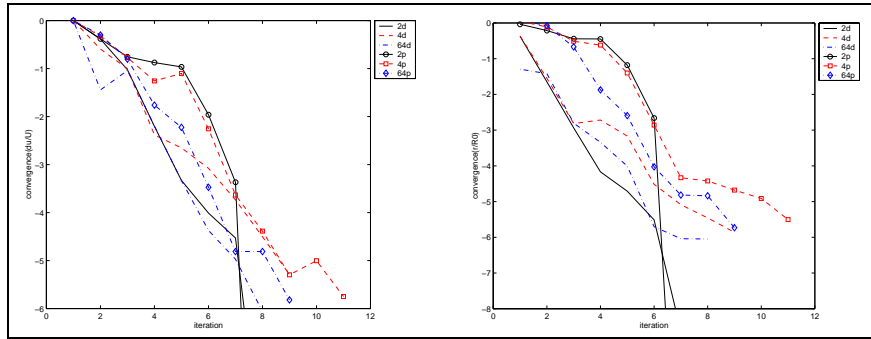


Figure 5. Convergence en déplacements (gauche) et en résidus (droite)

Le deuxième groupe de calculs est composé de deux cas suivants : en reprenant la plaque la plus longue (venant du calcul à 64 sous-domaines), mais cette fois-ci on la découpe en deux sous-domaines de taille identique en la découpant soit verticalement soit horizontalement. L'axe horizontal de la plaque étant le plus long, la taille du problème condensé sur l'interface pour ces deux cas est respectivement 14 et 896. Il s'agit donc de deux cas extrêmes et complètement opposés qu'on peut imaginer pour la décomposition en sous-domaines de cette plaque. La figure 6 montre que la qualité de convergence de notre méthode reste stable malgré le grand écart entre ces cas. Ces calculs soulignent la robustesse de notre méthode vis-à-vis de l'interface définie par la décomposition de domaines. Par conséquent, on peut se permettre de ne pas soigner la décomposition en cherchant un découpeur sophistiqué. La méthode géométrique proposée pour le découpage devrait suffire largement.

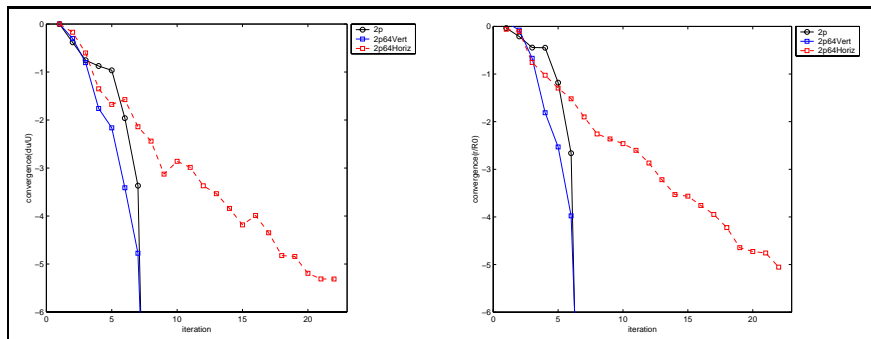


Figure 6. Convergence en déplacements (gauche) et en résidus (droite)

5.2. Décomposition de domaine équilibrée

Dans cet exemple, on étudie les phénomènes des ondes guidées dans une plaque mince rectangulaire très longue dans une direction. Cette plaque est encadrée sur ses côtés et soumise en flexion à une force ponctuelle. La figure 7 montre les déformées, les iso-valeurs de vitesses et de déplacements ainsi que la partition équilibrée en quatre sous-domaines à l'instant initial et après 25 pas de temps. Le calcul est uniquement adaptatif et non parallèle. Il permet néanmoins de souligner les points suivants :

- La procédure de remaillage arrive à bien suivre les ondes de flexion dispersives et guidées suivant l'axe long de la plaque, qui se présentent sous formes de lobes successives.
- L'équilibrage dynamique de charges est absolument indispensable dans le contexte du calcul adaptatif et parallèle en dynamique transitoire.
- La stratégie d'utiliser la boîte englobante pour la partition de domaine est intéressante, d'autant plus qu'elle est simple à mettre en œuvre et semble être très robuste.

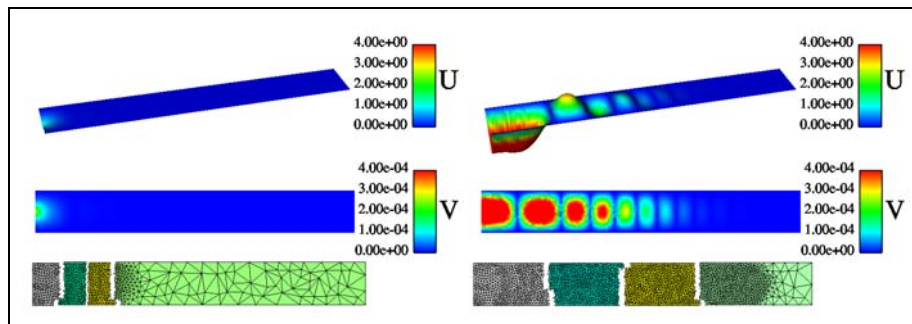


Figure 7. Plaque mince : ondes guidées

5.3. Calcul dynamique adaptatif et parallèle

Il s'agit d'un premier calcul dynamique adaptatif et parallèle avec l'équilibrage de charge entièrement couplé et automatique. Il a une valeur démonstratrice pour la faisabilité de l'approche proposée dans ce travail. On considère une membrane soumise à un signal de Ricker sur un côté et encadrée de l'autre. Les calculs sont parallélisés avec deux sous-domaines. La figure 8 montre les iso-valeurs de vitesses après 5 pas de temps et la boîte (une grille 2D ici) utilisée pour la partition de domaine ainsi que ces partitions à l'instant initial (avant tout remaillage) et après 5 pas de temps. Le tableau suivant présente les calculs à la fin de chaque étape de temps après une adaptation de maillage.

Etape	ddl interface	ddl total	Itérations problème ([5])	Itérations gradient
1	14	192	12	10
2	52	842	14	11
3	62	1078	14	21
4	64	1098	14	23
5	64	1098	14	23

Quand le nombre de degrés de libertés augmente, le nombre d'itérations du problème ([5]) reste constante. Toutes les expériences numériques (plaques et 3D) que nous avons menées par ailleurs nous ont prouvé la robustesse de cette méthode. Sur le tableau précédent, on observe cependant une dégradation de la convergence du gradient conjugué pour le solveur parallèle, ce qui était prévisible dans la mesure où le niveau grossier n'a pas été adapté. Cela fera l'objet de travaux futurs.

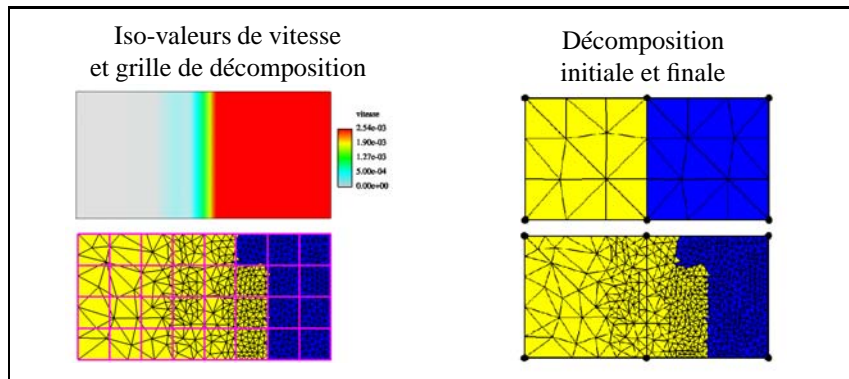


Figure 8. Membrane : 2 sous-domaines

6. Conclusion

Pour la modélisation numérique de la propagation d'ondes élastiques dans les structures, deux thèmes ont été abordés dans ce travail :

- l'utilisation des éléments finis adaptatifs dans le cadre de la méthode de Galerkin espace-temps discontinue en temps ;
- la résolution parallèle à l'aide d'une nouvelle méthode de décomposition de domaine utilisant deux niveaux de maillages éléments finis hiérarchiques en version h .

Une stratégie a été définie pour résoudre le problème de l'équilibrage dynamique de charges généré par l'utilisation simultanée du calcul parallèle et de la procédure de remaillage adaptatif. Par ailleurs, une méthode géométrique simple mais robuste a été proposée pour la partition équilibrée de structure en sous-domaines comportant le même nombre d'éléments. La faisabilité de l'approche globale couplant tous ces aspects a été démontrée.

Pour les travaux futurs, il faut approfondir l'étude sur la méthode de décomposition de domaine hiérarchique à deux niveaux, notamment son optimalité dans l'optique d'utiliser des préconditionneurs si c'est nécessaire. Il faut également étudier l'influence du maillage grossier sur les solutions approchées d'autant plus qu'en dynamique transitoire, les ondes sont très sensibles aux perturbations numériques.

7. Bibliographie

- [AUB 98] AUBRY D., TIE B., LUCAS D., « Une approche intégrée pour le calcul adaptatif par éléments finis », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 7, n° 1-2-3, 1998, p. 104-118.
- [AUB 99] AUBRY D., TIE B., LUCAS D., « Adaptive strategy for transient/coupled problems. Applications to thermoelasticity and elastodynamics », *Computer Methods in Applied and Mechanical Engineering*, vol. 176, 1999, p. 41-50.
- [BAN] BANK R., HOLST M., « A New Paradigm for Parallel Adaptive Meshing Algorithms », *SIAM J. on Scientific Computing*, vol. to appear.
- [FAR 94] FARHAT C., ROUX F., « Implicit parallel processing in structural mechanic », *Computational Mechanics Advances*, vol. 2, 1994.
- [JOH 93] JOHNSON C., « Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems », *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 107, 1993, p. 117-129.
- [LEC 01] LECLÈRE J.-M., *Modélisation parallèle de la propagation d'ondes dans les structures par éléments finis adaptatifs*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris. LMSSMat, 2001.
- [SMI 96] SMITH B., BJORSTAD P., GROPP W., *Domain decomposition, Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*, Cambridge University Press, 1996.
- [TIE 93] TIE B., *Éléments finis adaptatifs et hiérarchiques en élastoplasticité. Localisation des déformations*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris. LMSSMat, 1993.
- [TIE 98a] TIE B., *Note on some new hierarchical 2-level primal or dual substructuring methods*, Rapport interne, Ecole Centrale Paris, LMSSMat, 1998.
- [TIE 98b] TIE B., AUBRY D., « A theoretical framework for generalized hierarchical approaches referred to local mesh refinement », *CD-ROM, Computational Mechanics, New trends and Applications, WCCM IV Argentina*, vol. CD-ROM, 1998.
- [TIE 99] TIE B., AUBRY D., LECLÈRE J. M., « Méthode de décomposition de domaines à deux niveaux pour les éléments finis hiérarchiques en version h », *4e Colloque en Calcul de Structures*, vol. 1, 1999.