
Expansion par minimisation du résidu dynamique

Résolution et utilisation pour la localisation d'erreur

Adrien Bobillot — Étienne Balmès

École Centrale Paris - MSSMat, F-92295 Châtenay-Malabry
{bobillot,balmes}@mssmat.ecp.fr

RÉSUMÉ. L'expansion par minimisation du résidu dynamique (MDRE) cherche à estimer la réponse de modes propres expérimentaux sur tous les Degrés De Liberté (DDLs) d'un modèle Éléments Finis (EF) en minimisant la somme pondérée d'une erreur de modèle et d'une erreur sur les mesures. On présente ici une méthode de résolution itérative de ce problème d'expansion, qui permet son application à des modèles de taille industrielle. La capacité des résidus dynamiques issus de l'expansion à localiser des erreurs est ensuite évaluée pour des expériences simulées avec des défauts connus, sur un modèle de couvre-culasse Renault comportant 16,840 DDLs.

ABSTRACT. Minimum Dynamic Residual Expansion (MDRE) seeks to estimate the response of test modeshapes at all degrees of freedom (DOFs) of a model by minimizing the weighted sum of a modeling error and a test error. The present paper introduces an iterative method allowing the exact resolution of MDRE for large industrial problems. The ability of the dynamic residuals to localize errors is then evaluated for simulated tests with known modifications. Evaluations are shown for a 16,840 DOFs model of a Renault engine cover.

MOTS-CLÉS : Modal-Mesures-Expansion-Itératif-Résidu-Localisation.

KEYWORDS: Modal-Measurements-Expansion-Iterative-Residual-Localization.

1. Introduction

Les méthodes d'expansion cherchent à estimer la réponse de modes propres expérimentaux sur tous les DDLs d'un modèle EF. Balmès [BAL 00] a proposé une classification de ces méthodes en deux catégories.

D'une part, les méthodes de sous-espace, qui utilisent le modèle pour construire le sous-espace dans lequel les modes étendus sont recherchés. Les plus classiques sont l'expansion modale [KAM 87]/SEREP [O'C 89], statique (basée sur la réduction de Guyan [GUY 65]), dynamique [KID 73] et hybride [KAM 91] [ROY 93].

D'autre part, les méthodes d'expansion où les informations issues du modèle mais aussi celles provenant des mesures sont utilisées (voir [BAL 00] et [CHO 98] qui fait référence à ces méthodes du point de vue de l'erreur en relation de comportement). Du fait d'un coût de calcul prohibitif, ces méthodes ont rarement été appliquées à des modèles de taille industrielle.

La section 2 présente différentes formulations d'une de ces méthodes, l'expansion par minimisation du résidu dynamique (*Minimum Dynamic Residual Expansion ou MDRE*). On aboutit ainsi à une formulation particulièrement adaptée à une résolution sur base réduite. Une méthode d'enrichissement itératif des bases de réduction, basée sur la détermination de résidus (*Residual Iteration*), est alors proposée.

Dans la section 3, la méthode itérative est appliquée à un modèle de taille industrielle. La convergence de la méthode est analysée, et on quantifie la précision associée aux différentes bases pouvant être utilisées comme point de départ des itérations.

Enfin, le résidu en déplacement issu de la MDRE étant souvent utilisé pour la localisation d'erreur, la capacité de ce dernier à localiser une erreur est évaluée en section 4 pour des configurations réelles d'expérience mais des défauts simulés.

2. Expansion par minimisation du résidu dynamique

2.1. Motivations

L'expansion par minimisation du résidu dynamique (MDRE) est basée sur la minimisation, pour chaque mode expérimental j , d'une somme pondérée d'une erreur de modèle et d'une erreur sur les mesures.

L'erreur sur les mesures est définie par la distance entre les mesures $y_{Test,j}$ et la projection du mode étendu sur les DDLs mesurés $[c]\{\phi_{exp,j}\}$ ($[c]$ est l'opérateur de projection ou encore la matrice d'observation), c'est à dire :

$$\epsilon_j = \|\{y_{Test,j}\} - [c]\{\phi_{exp,j}\}\|_{Q_j}^2 \quad [1]$$

La norme quadratique Q_j permet la pondération des différents capteurs (un capteur défaillant peut ainsi être éliminé en fixant le terme correspondant de Q_j à 0). Une norme quadratique paraît plus appropriée qu'une norme en énergie de déformation comme

celle proposée par Chouaki [CHO 98]. En effet, la signification physique d'une norme énergétique sur les mesures n'est pas évidente.

L'erreur de modèle est définie comme étant la norme en énergie de déformation d'un résidu dynamique. Pour les modes propres on définit classiquement le résidu dynamique par $R_{L,j} = Z(\omega_j)\phi_j$, et pour les fonctions de réponse en fréquence par $R_L = Z(\omega)q(\omega) - F(\omega)$. Pour la rigidité dynamique Z d'un modèle inexact calculée aux fréquences expérimentales et des déformées étendues ϕ_j ou q , ces résidus ne sont pas nuls.

Ces résidus dynamiques correspondent à des efforts généralisés et doivent être associés à des résidus en déplacement afin d'obtenir un indicateur d'erreur en énergie. Ceci est réalisé en calculant la réponse statique associée aux efforts généralisés

$$R_{D,j} = \hat{K}^{-1}R_{L,j}, \quad [2]$$

où \hat{K}^{-1} est un pseudo-inverse de K , par exemple l'inverse de la matrice de raideur shiftée en masse ($\hat{K} = K + \alpha M$) si l'on est en présence de modes de corps rigides.

L'erreur de modèle est alors définie comme étant la norme en énergie de déformation du résidu en déplacement

$$\|R_{D,j}\|_K^2 = \{R_{D,j}\}^T [K] \{R_{D,j}\}. \quad [3]$$

La MDRE cherche alors à minimiser une somme pondérée des deux termes d'erreur

$$J(\omega_{Test,j}) = \min_{\phi_{exp,j}} (\|R_D(\phi_{exp,j})\|_K^2 + \gamma_j \epsilon_j). \quad [4]$$

Le facteur de pondération γ_j est défini de manière itérative de sorte que :

$$\frac{\|\{y_{Test,j}\} - [c]\{\phi_{exp,j}\}\|_{Q_j}}{\|\{y_{Test,j}\}\|_{Q_j}} = \delta_j, \quad [5]$$

où δ_j représente une estimation de l'erreur relative sur les mesures $y_{Test,j}$. Le choix de cette valeur dépend donc d'une quantification *a priori* de l'erreur sur les mesures.

La quantification *a priori* des erreurs de mesure est une question ouverte. Certains travaux [GUI 98] ont cherché à utiliser des informations sur la variance du signal mesuré (répétabilité) pour estimer une variance des informations modales identifiées. On pourrait aussi considérer des variances liées à des essais de reproductibilité (démontage/remontage, pièces différentes...). Au final cependant, les estimations de propriétés modales sont, en général, significativement biaisées. La validité des variances estimées n'est donc pas systématique. Pour les méthodes d'appropriation [BAL 95], la partie en phase de la réponse harmonique donne aussi une indication de la qualité de séparation du mode mesuré, mais il n'y a pas de transcription directe de cette indication en une valeur pour δ_j .

2.2. Formulation à deux champs

Plutôt que d'utiliser le pseudo-inverse \hat{K}^{-1} , on peut définir le résidu en déplacement par la relation $[K]\{R_{D,j}\} - [Z(\omega_{Test,j})]\phi_{exp,j} = 0$ et introduire un multiplicateur de Lagrange pour ajouter cette contrainte à la formulation du problème de minimisation [4]. On obtient alors :

$$J(\omega_{Test,j}) = \min_{R_{D,j}, \phi_{exp,j}, \lambda_j} \left(\{R_{D,j}\}^T K \{R_{D,j}\} + \gamma_j \| [c]\phi_{exp,j} - y_{Test,j} \|_{Q_j}^2 + \lambda_j (K \cdot \{R_{D,j}\} - Z(\omega_{Test,j})\phi_{exp,j}) \right). \quad [6]$$

A l'optimum, la dérivée de $J(\omega_{Test,j})$ par rapport à $R_{D,j}$, $\phi_{exp,j}$ et λ_j doit être nulle, ce qui implique :

$$\begin{bmatrix} K & 0 & K \\ 0 & \gamma_j c^T Q_j c & -Z_j \\ K & -Z_j & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{D,j} \\ \phi_{exp,j} \\ \lambda_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_j c^T Q_j y_{Test,j} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad [7]$$

où $Z_j = Z(\omega_{Test,j})$ est la raideur dynamique calculée aux fréquences expérimentales.

Les deux premières lignes de cette équation donnent $\lambda_j = -R_{D,j}$, de sorte que les inconnues se résument aux deux champs $R_{D,j}$ et $\phi_{exp,j}$ (voir [CHO 97]). Le problème que l'on cherche à résoudre est donc :

$$\begin{bmatrix} -K & Z_j \\ Z_j & \gamma_j c^T Q_j c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{D,j} \\ \phi_{exp,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_j c^T Q_j y_{Test,j} \end{Bmatrix}. \quad [8]$$

2.3. Version sur base réduite

La formulation [8] est particulièrement bien adaptée à la résolution du problème sur base réduite. L'hypothèse sous-jacente des méthodes de projection est qu'une bonne approximation de la solution peut être trouvée dans un sous-espace engendré par les colonnes (vecteurs de Ritz) d'une matrice T .

Dans la méthodologie présentée ici, les deux champs sont recherchés dans le sous-espace engendré par la même base T , c'est à dire que l'on cherche les champs sous la forme

$$\begin{Bmatrix} \hat{R}_{D,j} \\ \hat{\phi}_{exp,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T R_{red,D,j} \\ T \phi_{red,exp,j} \end{Bmatrix}, \quad [9]$$

où les champs réduits $(R_{red,D,j}, \phi_{red,exp,j})$ sont solutions du problème réduit associé

$$\begin{bmatrix} -T^T K T & T^T Z_j T \\ T^T Z_j T & \gamma_j T^T c^T Q_j c T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{red,j} \\ \phi_{red,exp,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_j T^T c^T Q_j y_{Test,j} \end{Bmatrix}. \quad [10]$$

Les bases de réduction proposées en [BAL 00] et utilisées comme point de départ des itérations sont typiquement formées de modes du modèle nominal et des réponses statiques à des efforts unitaires sur les capteurs.

2.4. Résolution itérative du problème exact

La solution de [10], déterminée sur base réduite, n'est qu'une approximation du problème exact [8]. En effet, le sous-espace engendré par la base T ne contient pas forcément la solution exacte. C'est pourquoi on propose ici une méthode d'enrichissement itératif de la base de réduction T qui évalue des résidus associés à la base T et enrichit la base avec ces résidus s'ils sont jugés trop importants.

Pour une base T , les résidus associés sont définis pour chacun des deux champs par :

$$\begin{Bmatrix} R_{L,R_D,j} \\ R_{L,\phi,j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & Z_j \\ Z_j & \gamma_j c^T Q_j c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{D,j}^{\hat{}} \\ \phi_{exp,j}^{\hat{}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_j c^T Q_j y_{Test,j} \end{Bmatrix}. \quad [11]$$

La procédure d'enrichissement de la base T est alors basée sur l'estimation de l'énergie associée à chacun de ces deux résidus. Au pas d'itération n , la procédure consiste à

1. Déterminer les résidus en effort $R_{n,L,R_D,j}$ et $R_{n,L,\phi,j}$ associés à T_n [11],
2. Déterminer les résidus en déplacement correspondants

$$\begin{aligned} R_{n,D,R_D,j} &= \hat{K}^{-1} R_{n,L,R_D,j} \\ R_{n,D,\phi,j} &= \hat{K}^{-1} R_{n,L,\phi,j}, \end{aligned} \quad [12]$$

3. Évaluer les indicateurs d'erreur en énergie de déformation

$$\epsilon_{n,R_D,j} = \frac{R_{n,D,R_D,j}^T K R_{n,D,R_D,j}}{R_{D,j}^{\hat{T}} K R_{D,j}^{\hat{}}}, \quad \epsilon_{n,\phi,j} = \frac{R_{n,D,\phi,j}^T K R_{n,D,\phi,j}}{\phi_{exp,j}^{\hat{T}} K \phi_{exp,j}^{\hat{}}}, \quad [13]$$

4. Enrichir la base T_n

$$\epsilon_{n,R_D,j} > Tol \Rightarrow T_{n+1} = [T_n, \{R_{D,R_D,j}\}]$$

$$\epsilon_{n,\phi,j} > Tol \Rightarrow T_{n+1} = [T_n, \{R_{D,\phi,j}\}]$$

Cette procédure est répétée jusqu'à ce que tous les ϵ_j soient inférieurs à la tolérance définie par l'utilisateur.

Bien sûr, des problèmes de normalisation apparaissent lorsqu'on rajoute un résidu à une base T_n . En effet, ces résidus peuvent être très colinéaires à l'espace engendré par T_n et n'ont pas forcément la même amplitude que les vecteurs de T_n . Ces problèmes sont résolus par une méthode de normalisation appropriée pour assurer le bon conditionnement.

3. Résolution de la MDRE

3.1. Modèle utilisé pour les applications

Le processus d'expansion de la section 2, ainsi que la capacité à localiser des défauts, ont été testés sur un modèle de couvre-culasse Renault comportant 16,840 DDLs (figure 1.a). A part l'importation des matrices élémentaires de Nastran, tous les calculs ont été réalisés avec la *Structural Dynamics Toolbox* [BAL 01].

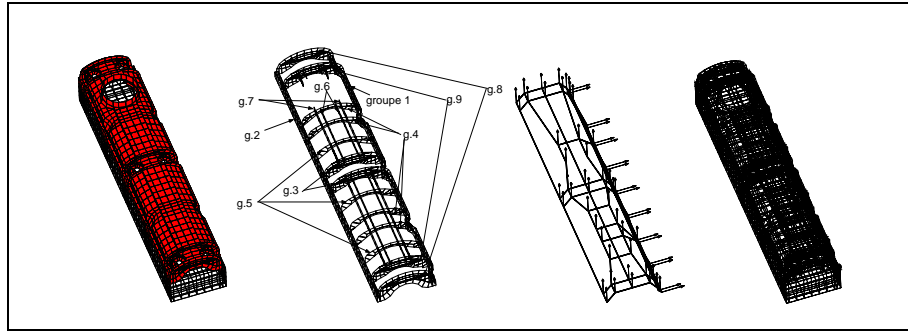


Figure 1. *a* : Modèle d'un couvre-culasse Renault vissé sur un bloc métallique. *b* : groupes d'éléments sélectionnés, ils représentent les nervures et renforts situés au dessous de la partie supérieure. Le groupe 10 est composé des 564 ressorts de jonction connectant la partie haute à la partie basse. *c* : Direction de mesure des capteurs, *d* : Maillage expérimental (en gras) du couvre-culasse

Les perturbations introduites dans le modèle pour tester la capacité à localiser des erreurs sont des modifications de raideur de certains groupes d'éléments (c.f. figure 1.b où les groupes d'éléments 1 à 9 correspondent à des renforts ou nervures du couvre-culasse, et le groupe 10 est composé des 564 ressorts de jonction connectant le couvre-culasse à son bloc support). Les pseudo-mesures ainsi générées sont définies sur les capteurs (représentés par des flèches sur la figure 1.c). Les capteurs ne correspondant pas forcément, en direction ou en position, à des DDLs EF, le mouvement aux capteurs est estimé à partir des déplacements EF par des méthodes d'interpolation élaborées. De ce fait la matrice $[c]$ (équation[1]) n'est pas booléenne.

3.2. Résolution de la MDRE, précision et temps de calcul

Le but de cette section est de comparer, en termes de précision et temps de calcul, les différentes méthodes de résolution de la MDRE proposées en section 2.

Les différentes bases étudiées sont respectivement

– Modale : $T_{mod} = [\phi_{nom,1:30}]$ calculée pour la structure nominale,

– Modale + réponses statiques à des efforts unitaires aux capteurs :

$T_{mod+stat} = [\phi_{nom,1:30}, \hat{K}^{-1}c^T]$ où c est la matrice d'observation,

– Enrichie : T_{enr} qui est la base $T_{mod+stat}$ enrichie itérativement (section 2.4).

La comparaison des précisions associées à l'utilisation des différentes bases de réduction utilise des erreurs relatives en énergie de déformation par rapport à la solution

exacte pour établir la validité des déformées modales (α_j) et des résidus en déplacement (β_j) :

$$\alpha_j = \frac{\|\phi_{exa,j} - \phi_{red,j}\|_K^2}{\|\phi_{exa,j}\|_K^2 + \|\phi_{red,j}\|_K^2}, \quad \beta_j = \frac{\|R_{D,exa,j} - R_{D,red,j}\|_K^2}{\|R_{D,exa,j}\|_K^2 + \|R_{D,red,j}\|_K^2}. \quad [14]$$

Bien sûr des erreurs relatives en énergies cinétiques peuvent être utilisées, mais les résultats obtenus étant similaires, ils ne sont pas exposés ici.

L'étude est menée sur le couvre-culasse à partir de résultats pseudo-expérimentaux (modes flexibles 1 à 14 bruités avec un bruit de type **Bruit1** d'amplitude $\sigma_j = 1\%$, c.f. section 4.2) définis sur les capteurs et générés à partir du modèle nominal. L'expansion MDRE est réalisée avec un modèle perturbé (augmentation de 100 % de la raideur du groupe 2, c.f. figure 1.b) en supposant $\delta_j = 1\%$.

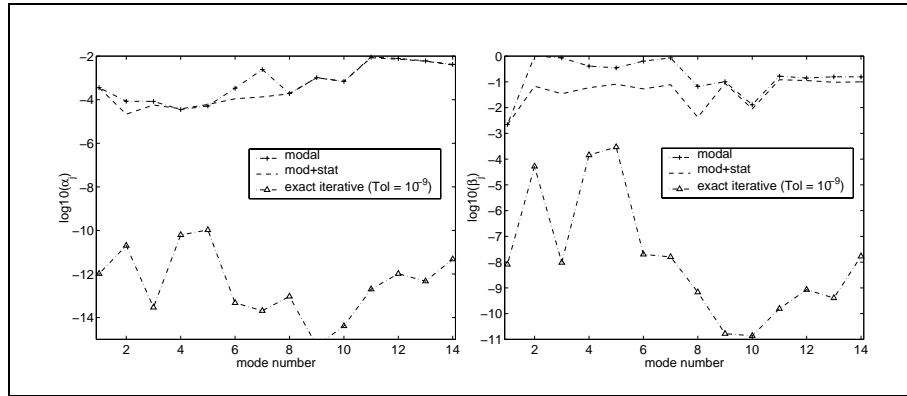


Figure 2. Comparisons des résultats de l'expansion pour différentes bases de réduction (cas du couvre-culasse). Gauche : Déformées modales [14], Droite : Résidus en déplacement [14]

La figure 2 représente les erreurs relatives α_j et β_j [14], pour les modes flexibles 1 à 14. L'erreur associée aux bases de réduction est plus élevée pour les résidus que pour les modes étendus, avec une erreur de l'ordre de 100 % sur les résidus pour la base modale. Rajouter les réponses statiques améliore la précision mais l'erreur sur les résidus atteint encore 10 %. L'utilisation de la base enrichie, avec une tolérance (critère d'arrêt pour les itérations) de 10^{-9} , donne des erreurs sur les résidus en deçà de 10^{-8} pour la plupart des modes, sauf pour les modes 2, 4 et 5 pour lesquels l'erreur relative sur le résidu atteint 10^{-4} . Le critère d'arrêt, sans être parfait, est donc pertinent.

Le tableau 1 résume les temps de calcul nécessaires pour la résolution de la MDRE sur le modèle du couvre-culasse. La résolution exacte nécessite, pour chacun des 14 modes expérimentaux, la résolution de [8], alors que la résolution itérative nécessite la construction d'une base de départ et son enrichissement. Pour une précision $Tol = 10^{-9}$, la résolution itérative nécessite 9 min au lieu de 1000 min pour la résolution exacte, ce qui représente un facteur 111 en temps de calcul.

Étapes de calcul	itératif $Tol = 10^{-9}$	direct
$\phi_{1:30}$	83 sec	”
$\hat{K}^{-1}c^T$	5 sec	”
$\phi_{1:30} \hat{K}^{-1}b$	12 sec	”
projection du modèle	30 sec	”
enrichissement	408 sec	”
total	9 min	1000 min
Espace Mémoire	350 Mo	1.6 Go
Taille du problème	316	33680

Tableau 1. Résumé des temps de calcul (Couvre-culasse, processeur R10000)

4. Utiliser la MDRE pour localiser des défauts

4.1. Localisation avec le résidu exact

Une des motivations pour utiliser la MDRE pour la localisation d'erreur est que les résidus en déplacement permettent théoriquement la localisation. Si l'on utilise la structure nominale ($p = p_0$) pour générer des pseudo-mesures et que la structure modifiée ($p = p_{mod}$) est utilisée pour l'expansion, la MDRE fournit idéalement une approximation de :

$$R_D = \hat{K}_{p_{mod}}^{-1} (Z_{p_{mod}}(\omega_{p_0})\phi_{p_0}), \quad [15]$$

où ϕ_{p_0} sont les modes calculés pour $p = p_0$ (pseudo-mesures) et $Z_{p_{mod}}(\omega_{p_0})$ est la matrice de raideur dynamique assemblée pour $p = p_{mod}$ aux fréquences pseudo-expérimentales ω_{p_0} .

La localisation d'erreur est alors réalisée en étudiant la répartition d'énergie des résidus associés aux NM modes "expérimentaux". La manière de post-traiter cette information est cruciale. La figure 3 montre un exemple de localisation visuelle à partir des résidus pour un défaut introduit dans le groupe 1. Les zones les plus sombres sont celles où l'énergie élémentaire du résidu est importante mais visuellement, il n'est pas évident de localiser l'erreur dans un groupe donné. De plus, si certains éléments ont une dimension nulle (poutres ou liens rigides de longueur nulle par exemple), tracer l'énergie sur le maillage n'a aucune signification. C'est pourquoi on a mis en oeuvre des indicateurs d'erreur beaucoup moins sujets à caution, faisant intervenir l'énergie des modes et des résidus associés. Pour chacune des modifications en raideur apportées au modèle, on calcule l'énergie de déformation des résidus R_D et des modes étendus ϕ_{exp} (ici $\phi_{exp} = \phi_{p_0}$ car on suppose des mesures sur tous les DDLs) dans chacune des $i = [1..11]$ sous-structures. En effet, en plus des 10 groupes d'éléments définis dans la figure 1, on a rajouté la sous-structure 11 pour étudier la répartition d'énergie. Elle correspond aux éléments non contenus dans les groupes 1 à 10, c'est-à-dire $ss - struct. 11 = (struct.) \setminus \bigcup_{i=1}^{10} (ss - struct.i)$. Elle est utilisée seulement

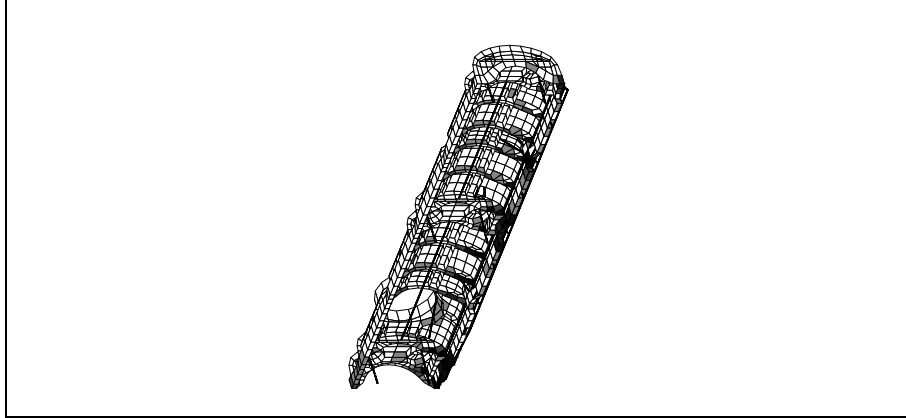


Figure 3. Localisation visuelle pour un défaut introduit dans le groupe 1. Tracé du résidu/ $\max(\text{résidu})$

pour pouvoir étudier la répartition d'énergie sur l'ensemble du couvre-culasse, sans que l'on y ait introduit de défaut de raideur.

Les différentes quantités étudiées pour la localisation sont alors l'énergie relative moyenne des modes dans la sous-structure i , en utilisant deux sortes de moyennes

$$E_{1,\phi,i} = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\frac{\sum_{el.\in ss-struct.i} \phi_j^T K^{el} \phi_j}{\sum_{struct} \phi_j^T K^{el} \phi_j} \right),$$

$$E_{2,\phi,i} = \frac{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\sum_{el.\in ss-struct.i} \phi_j^T K^{el} \phi_j \right)}{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\sum_{struct} \phi_j^T K^{el} \phi_j \right)},$$
[16]

l'énergie relative moyenne des résidus par rapport à celle des modes, en utilisant deux sortes de moyennes

$$E_{1,R_D,i} = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\frac{\sum_{el.\in ss-struct.i} R_{D,j}^T K^{el} R_{D,j}}{\sum_{struct} \phi_j^T K^{el} \phi_j} \right),$$

$$E_{2,R_D,i} = \frac{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\sum_{el.\in ss-struct.i} R_{D,j}^T K^{el} R_{D,j} \right)}{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\sum_{struct} \phi_j^T K^{el} \phi_j \right)},$$
[17]

et l'énergie relative moyenne des résidus par rapport à celle des modes dans la sous-structure i , en utilisant deux sortes de moyennes

$$E'_{1,R_D,i} = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\frac{\sum_{el.\in ss-struct.i} R_{D,j}^T K^{el} R_{D,j}}{\sum_{el.\in ss-struct.i} \phi_j^T K^{el} \phi_j} \right),$$

$$E'_{2,R_D,i} = \frac{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\sum_{el.\in ss-struct.i} R_{D,j}^T K^{el} R_{D,j} \right)}{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} \left(\sum_{el.\in ss-struct.i} \phi_j^T K^{el} \phi_j \right)}.$$
[18]

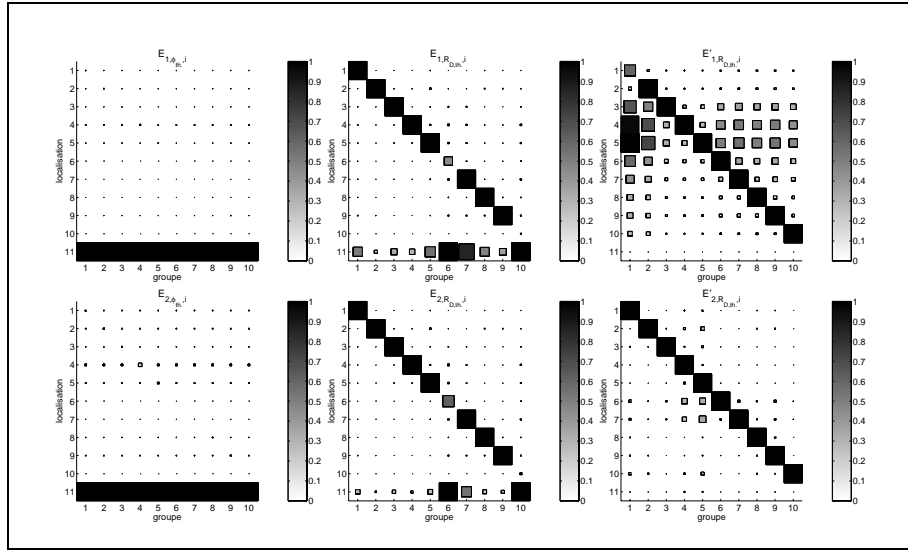


Figure 4. *Gauche* : $E_{\phi,i}$, *Milieu* : $E_{R_D,i}$, *Droite* : $E'_{R_D,i}$. *Haut* : 1ère moyenne, *Bas* : 2ème moyenne. En abscisse : modification introduite, en ordonnée : répartition de l'énergie. Assouplissement des ressorts de jonction.

Ces indicateurs sont tracés sur des figures à deux dimensions pour permettre une meilleure lisibilité. L'abscisse correspond aux modifications introduites, c'est à dire une modification introduite dans le groupe 1, 2, ... 10 et l'ordonnée correspond aux différents groupes d'éléments de 1 à 11. Pour chaque modification introduite (abscisse), on visualise donc la répartition des énergies dans la structure (ordonnée). Les indicateurs ont été normalisés de manière à ce que pour chaque colonne, le maximum soit 1.

La figure 4 représente ces différents indicateurs, pour des pseudo-mesures formées des $NM = 14$ premiers modes flexibles de la structure nominale, supposés mesurés sur tous les DDLs (résidus exacts). Les modifications introduites sont des modifications en raideur. Pour les groupes d'éléments 1 à 9, la raideur a été augmentée de 100 % ($K_{mod} = 2K_0$) et la raideur des ressorts de jonction (groupe 10) a été divisée par 10, passant de 10^{10} N/m à 10^9 N/m. Les indicateurs $E_{\phi,i}$ de la figure 4 indiquent que l'énergie des modes est principalement localisée dans la sous-structure 11 (structure complémentaire). Ceci s'explique par le fait que cette sous-structure contient beaucoup plus d'éléments que les autres.

Par la suite, on dira qu'un groupe est localisable par un indicateur si, lorsqu'on y introduit un défaut, l'indicateur a une valeur deux fois plus importante dans ce groupe que dans tous les autres.

En suivant cette règle on constate que l'indicateur E_{1,R_D} permet seulement la localisation des groupes 1, 2, 3, 4, 5, 8 et 9. E_{2,R_D} permet de localiser aussi le groupe

7. On remarque en outre que ces deux indicateurs ont tendance à localiser l'erreur dans le groupe 11, car ils privilégient les zones où l'énergie modale est élevée. $E'_{1,R_D,i}$ a tendance à localiser l'erreur notamment dans les groupes 4 et 5 mais pour l'autre type de moyenne, $E'_{2,R_D,i}$, on a une localisation quasi-parfaite de tous les groupes. Les problèmes de localisation liés à E_{1,R_D} et E_{2,R_D} sont éliminés par le fait qu'ici l'énergie relative est calculée pour chaque sous-structure i .

Cette figure a été réalisée en prenant comme raideur nominale des ressorts de jonction une valeur de 10^{10} N/m, alors que par la suite, on prendra une valeur nominale de 10^8 N/m et la modification introduite sera un raidissement de ces ressorts (multiplication par 10 de la raideur). Ce cas de figure a été utilisé pour illustrer le fait que l'indicateur E_{2,R_D} localise moins bien les erreurs que $E'_{2,R_D,i}$, ce qui a été vérifié dans [BOB 02].

4.2. Localisation avec le résidu issu de la MDRE

4.2.1. Procédure

La capacité de l'expansion par minimisation du résidu dynamique, ou MDRE, à localiser des défauts a été testée selon la procédure suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Projection} \\ \phi(p_0) \rightarrow c\phi(p_0) + \epsilon = y_{Test} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Expansion} \\ \text{MDRE}(p_{mod}) \\ \rightarrow \phi_{exp} \rightarrow [K_{p_{mod}}]R_D = [Z_{p_{mod}}(\omega_{p_0})]\phi_{exp} \end{array} \quad [19]$$

Dans un premier temps, on génère des pseudo-mesures à partir des $NM = 14$ premiers modes flexibles du modèle nominal ($p = p_0$). Pour ce faire, on projette les modes du modèle nominal sur les capteurs ($c\phi(p_0)$) et on y ajoute du bruit de mesure ϵ .

Deux types de bruits ont été considérés. Le premier (**Bruit1**) considère des bruits fréquents dans les mesures par appropriation, où les modes voisins viennent bruite le mode que l'on tente d'approprier. Pour ce type de bruit, au lieu de prendre $y_{Test} = c\phi(p_0)$, on prend pour chaque mode j

$$y_{Test,j} = c\phi(p_0)_j + \sigma_j \left(\sum_{i \neq j} x([-1; 1]) \frac{c\phi(p_0)_i}{|\omega_i^2 - \omega_j^2|} \right) A_j, \quad [20]$$

où σ_j est le niveau d'erreur introduit dans le mode j , $x([-1; 1])$ est un nombre aléatoire compris entre -1 et 1 (de distribution uniforme) et le terme $\frac{1}{|\omega_i^2 - \omega_j^2|}$ permet de prendre en compte le fait que les modes proches en fréquence interagissent plus que les modes à fréquences éloignées. Le terme de pondération A_j permet de vérifier la contrainte $\frac{\| \{y_{Test,j}\} - c\phi(p_0)_j \|}{\| \{y_{Test,j}\} \|} = \sigma_j$ (on prend ici $Q_j = I$ [5]).

Le deuxième type de bruit (**Bruit2**) est un bruit aléatoire sur chaque capteur, c'est à dire que l'on prend pour chaque composante k de $y_{Test,j}$ (qui correspond au capteur k)

$$y_{Test,j,k} = c\phi(p_0)_{j,k}(1 + \sigma_j x([-1; 1]))A_j \quad [21]$$

où σ_j est le niveau d'erreur introduit dans le mode j , $x([-1; 1])$ est un nombre aléatoire compris entre -1 et 1 (de distribution uniforme), et où le terme de pondération A_j permet de vérifier la contrainte $\frac{\| \{y_{Test,j}\} - c\phi(p_0)_j \|}{\| \{y_{Test,j}\} \|} = \sigma_j$ (ici aussi $Q_j = I$).

Les pseudo-fréquences expérimentales considérées sont, elles, les fréquences du modèle nominal non bruitées. En effet, la mesure des fréquences de résonance est généralement précise.

Ces pseudo-mesures sont alors étendues par la MDRE à l'ensemble des DDLs du modèle EF en utilisant les modèles perturbés, en fixant une tolérance pour l'enrichissement itératif $Tol = 10^{-6}$ (section 2.4). En effet, cette valeur est suffisante pour obtenir des résultats de localisation identiques à ceux obtenus avec un calcul exact. Le but de l'étude est alors de voir si l'on peut localiser, à partir des résultats issus de l'expansion, la perturbation que l'on a introduite.

Pour mémoire, la MDRE consiste en la minimisation de la somme d'une erreur de modèle et d'une erreur sur les mesures. La pondération entre ces deux termes est choisie de manière à ce que l'erreur relative sur les mesures $\frac{\| \{y_{Test,j}\} - [C] \{ \phi_{exp,j} \} \|_{Q_j}}{\| \{y_{Test,j}\} \|_{Q_j}}$ soit égale à l'erreur relative "supposée" δ_j (c.f. équation [5]).

Dans la suite, on va chercher à déterminer la capacité de la MDRE à localiser des défauts introduits dans le modèle, en fonction de l'erreur relative introduite dans les mesures σ_j , de l'erreur relative supposée *a priori* δ_j , ou encore de la position des capteurs.

4.2.2. Étude sur l'erreur introduite (σ_j) et supposée (δ_j) sur les mesures

On étudie ici l'influence de l'erreur relative σ_j introduite dans les pseudo-mesures et de l'erreur supposée *a priori* δ_j . La figure 5 résume de manière condensée la capacité à localiser les différents groupes en fonction des valeurs de (σ_j, δ_j) , en étudiant la répartition de l'indicateur $E'_{2,R_D,i}$. En effet, seul cet indicateur permet théoriquement la localisation (section 4.1). Pour une perturbation introduite dans chacun des 10 groupes d'éléments $i = 1..10$ décrits dans la figure 1, on visualise $\frac{E'_{2,R_D,i}}{\max_{k \neq i} (E'_{2,R_D,k})}$ si le maximum de $E'_{2,R_D,k}$ est atteint en $k = i$ (si le maximum d'énergie est dans le groupe où l'on a introduit la perturbation), sinon la valeur est fixée à 0 (localisation dans le mauvais groupe). Ainsi il est aisé de vérifier sur ces tracés si un groupe est localisable ou non. Si $\frac{E'_{2,R_D,i}}{\max_{k \neq i} (E'_{2,R_D,k})}$ est supérieur à 2, on considère la perturbation localisable, sinon on considère le groupe comme non localisable.

Les tests numériques ont été réalisés en introduisant des bruits dans les mesures d'amplitude $\sigma_j = 0.1\%$, 1% , 5% et 10% et pour chacune de ces valeurs on a supposé des niveaux de bruit $\delta_j = 0.1\%$, 1% et 10% . La figure 5 représente (de gauche à droite) seulement les cas $\sigma_j = 1\%$, 5% et 10% car le cas $\sigma_j = 0.1\%$ est quasi identique au cas $\sigma_j = 1\%$. Les figures du haut correspondent à un bruit de type **Bruit1** et celles du bas à un bruit de type **Bruit2** (c.f. 4.2.1).

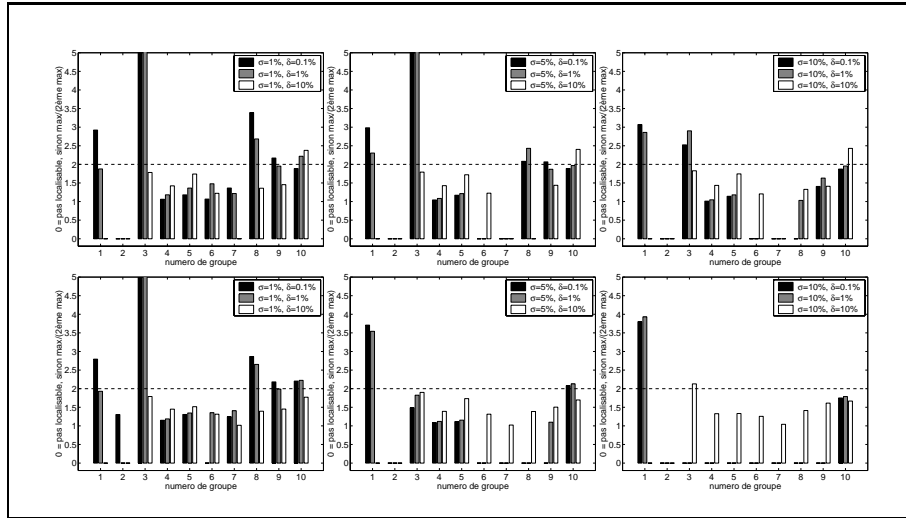


Figure 5. Haut : **Bruit1**, Bas : **Bruit2**. Localisation avec l'indicateur $E'_{2,R,D}$ pour σ_j égal à *Gauche* : 1% , *Milieu* : 5% , *Droite* : 10% , et pour des valeurs de δ_j égales à 0.1% , 1% et 10%

La figure 5 montre l'influence des paramètres σ_j et δ_j sur la capacité à localiser. Pour des erreurs de mesure simulées $\sigma_j = 0.1\%$ (cas non montré) ou $\sigma_j = 1\%$, les résultats sont quasiment identiques, ceci pour toutes les valeurs d'erreurs de mesure supposées δ_j étudiées. On peut donc dire que σ_j n'est pas très sensible pour des faibles valeurs. Par contre, pour $\sigma_j > 1\%$, plus σ_j est élevé plus la localisation est mauvaise, ce qui confirme notre intuition. Mais lorsque le bruit supposé est important ($\delta_j = 10\%$) alors la localisation est peu efficace mais aussi peu sensible au bruit introduit, même pour des valeurs importantes de σ_j . On remarque finalement que le **Bruit2** détériore plus la capacité à localiser que le **Bruit1**.

4.2.3. Étude sur la position des capteurs

Le groupe 2 n'est pas localisable avec la configuration de capteurs de la figure 1.c. En effet, on remarque que les capteurs sont beaucoup plus nombreux du côté du groupe 1 (qui est localisable) que du groupe 2.

On a alors testé une procédure de placement de capteurs adaptée à la localisation d'un paramètre donné, basée sur la sensibilité des modes à ce paramètre. En effet, si

l'on considère en première approximation que $\phi(p) = \phi(p_0) + (p - p_0) \frac{\partial \phi}{\partial p}$, alors la quantité qu'il faut mesurer pour détecter l'erreur est la sensibilité. Plus précisément, la quantité dont on cherche à distinguer la forme est la partie de la sensibilité orthogonale (par rapport aux matrices de masse M et de raideur K) aux modes, que l'on notera $\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)_{p,orth.}$.

Donc, si l'on veut optimiser le placement de capteurs pour la détection d'un défaut en raideur dans le groupe 2 (c.f. figure 1.b), on calcule $\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)_{p,orth.}$ où $p = \frac{k_{groupe\ 2}}{k_{groupe\ 2,0}}$, ceci pour les $NM = 14$ modes cibles. Puis en partant d'un nombre initial de capteurs (ici les 66 de la figure 1.c), on rajoute de manière itérative des capteurs au maximum de la moyenne sur les NM modes cibles des DDLs de translation l

$$\bar{\phi}_l = \frac{\sum_{j=1}^{NM} \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)_{p,orth.,l} \right|}{NM},$$

ou au maximum de l'énergie cinétique

$$\max_l \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^{NM} M_{ll} \left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)_{p,orth.,l} \right|^2,$$

où M_{ll} représente le terme diagonal de la matrice de masse correspondant au DDL de translation l .

Le problème de ces deux méthodes est qu'elles ont tendance à placer de nombreux capteurs dans la même zone. On est donc amené à définir une distance minimale entre les capteurs (par exemple un sous-multiple des longueurs caractéristiques de la structure). Bien sûr, deux capteurs mesurant dans des directions différentes peuvent être placés au même endroit et on interdit seulement la proximité de deux capteurs mesurant dans la même direction.

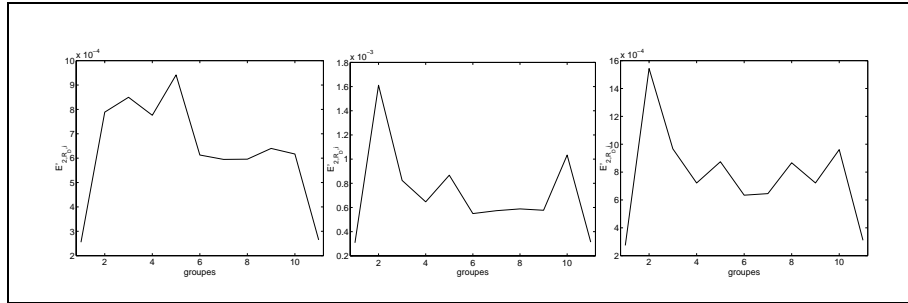


Figure 6. Localisation du groupe 2 avec différentes configurations de capteurs. *a* : nominale, *b* : déplacement maximal, *c* : énergie cinétique maximale

La figure 6 montre que l'ajout de 6 capteurs seulement (en plus des 66 présents initialement) permet de localiser de manière beaucoup plus efficace le groupe 2, ceci pour les deux méthodes basées sur la sensibilité.

5. Conclusion

Le développement principal de cet article est l'introduction d'une méthode itérative de résolution de l'expansion par minimisation du résidu dynamique, permettant son application à des modèles de taille industrielle. Grâce à cette méthode de calcul, une étude systématique de la capacité de la MDRE à localiser des défauts a pu être menée. On en conclut que la capacité à localiser est fortement dépendante du post-traitement effectué, de l'erreur réelle et de l'erreur supposée dans les mesures. Il semble donc nécessaire, lorsqu'on utilise des expériences, de faire une série de simulations avant de tirer des conclusions quant à la localisation d'erreurs dans le modèle. Finalement, des méthodes de placement de capteurs pour la détection d'une erreur donnée ont été mises en œuvre et fournissent des résultats très encourageants.

6. Bibliographie

- [BAL 95] BALMÈS E., CHAPELIER C., LUBRINA P., FARGETTE P., « An evaluation of modal testing results based on the force appropriation method », *IMAC*, 1995, p. 47-53.
- [BAL 00] BALMÈS E., « Review and Evaluation of Shape Expansion Methods », *IMAC*, 2000, p. 555-561.
- [BAL 01] BALMÈS E., *Structural Dynamics Toolbox 4.1* (for use with MATLAB), <http://www.sdtools.com>, February 2001.
- [BOB 02] BOBILLOT A., Méthodes de réduction pour le Recalage. Application au cas d'Ariane 5, Thèse de l'Ecole Centrale Paris, 2002.
- [CHO 97] CHOUAKI A., Recalage de Modèles Dynamiques de Structures avec Amortissement, Doctoral dissertation LMT/ENS Cachan, 1997.
- [CHO 98] CHOUAKI A., LADEVÈZE P., PROSLIER L., « Updating Structural Dynamic Models with Emphasis on the Damping Properties », *AIAA Journal*, vol. 36, n° 6, 1998, p. 1094-1099.
- [GUI 98] GUILLAUME P., VERBOVEN P., VANLANDUIT S., « Frequency Domain Maximum Likelihood Estimation of Modal Parameters with Confidence Intervals », *International Seminar on Modal Analysis, Leuven, September*, 1998.
- [GUY 65] GUYAN R., « Reduction of Mass and Stiffness Matrices », *AIAA Journal*, vol. 3, 1965, page 380.
- [KAM 87] KAMMER D., « Test-Analysis Model Development Using an Exact Modal Reduction », *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1987, p. 174-179.
- [KAM 91] KAMMER D., « A Hybrid Approach to Test-Analysis Model Development for Large Space Structures », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 113, n° 3, 1991, p. 325-332.
- [KID 73] KIDDER R., « Reduction of Structural Frequency Equations », *AIAA Journal*, vol. 11, n° 6, 1973.
- [O'C 89] O'CALLAHAN J., AVITABILE P., RIEMER R., « System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP) », *IMAC VII*, 1989, p. 29-37.
- [ROY 93] ROY N., GIRARD A., BUGEAT L.-P., « Expansion of Experimental Modeshapes - An Improvement of the Projection Technique », *IMAC*, 1993, p. 152-158.